STARK-Webinar Bernoulli/Binomialverteilung

BERNOULLI-EXPERIMENT

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ausgängen: Treffer oder Niete

Beispiel: Werfen eines Würfels mit dem Ziel eine 6 zu würfeln. (Treffer: 6; Niete: keine 6)
Trefferwahrscheinlichkeit: $p=\frac{1}{6}$; Nietenwahrscheinlichkeit: $q=1-p=\frac{5}{6}$

BERNOULLI-KETTE mit genau k Treffern

Führt man ein **Bernoulli-Experiment** <u>unter genau gleichen Bedingungen</u> **n-mal hintereinander** aus und interessiert nur die **Anzahl k der Treffer**, so erhält man eine **Bernoulli-Kette der Länge n**.

Allgemein gilt:
Die Wahrscheinlichkeit bei einer Bernoulli-Kette der **Länge n** und der **Trefferwahrscheinlichkeit p genau k Treffer** zu erzielen, berechnet sich zu

$$P(X=k)=B(n;p;k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

bzw. $$P(X=k)=B_{n;\,p}(k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Zugehörige Zahlenwerte können mithilfe von Tabellen oder dem TR bestimmt werden!

Beispiel: Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man beim sechsmaligen Werfen eines Würfels genau zweimal die Sechs?

$$P(X=2)=B(6;\tfrac{1}{6};2)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

BERNOULLI-KETTE mit mindestens/höchstens k Treffern

Allgemein gilt:
Für die Wahrscheinlichkeit bei einer Bernoulli-Kette der **Länge n** und der **Trefferwahrscheinlichkeit p** …

… **höchstens b Treffer** zu erzielen, gilt:

$$P(X\le b)=B(n;p;k\le b)=\sum_{i=0}^{b}B(n;p;i)=F_p^n(b)$$

… **mindestens a Treffer** zu erzielen, gilt:

$$P(X\ge a)=B(n;p;k\ge a)=1-\sum_{i=0}^{a-1}B(n;p;i)=1-F_p^n(a-1)$$

…**mindestens a und höchstens b Treffer** zu erzielen, gilt:

$$P(a\le X\le b)=B(n;p;a\le k\le b)=\sum_{i=0}^{b}B(n;p;i)-\sum_{i=0}^{a-1}B(n;p;i)=F_p^n(b)-F_p^n(a-1)$$

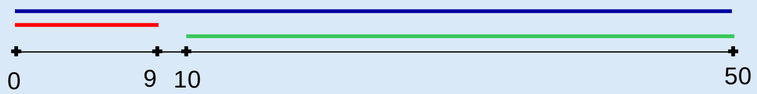
Auch kumulative Wahrscheinlichkeiten einer Bernoulli-Kette sind tabellarisiert oder lassen sich mit dem TR bestimmen!

Beispiele:

a) Ein Würfel wird 50 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint die „6“ **höchstens** 5 Mal?

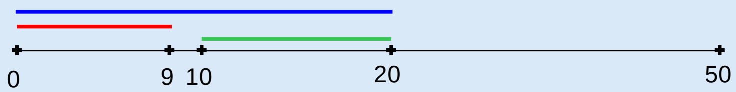
$$P(X \le 5) = B(50;\tfrac{1}{6};k \le 5)$$
$$= B(50;\tfrac{1}{6};0) + B(50;\tfrac{1}{6};1) + B(50;\tfrac{1}{6};2) + B(50;\tfrac{1}{6};3) + B(50;\tfrac{1}{6};4) + B(50;\tfrac{1}{6};5)$$
$$= \sum_{i=0}^{5} B(50;\tfrac{1}{6};i) = F_{\frac{1}{6}}^{50}(5)$$

b) Ein Würfel wird 50 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint die „6“ **mindestens** 10 Mal?



$$P(X \ge 10) = B(50;\tfrac{1}{6};k \ge 10) = \sum_{i=10}^{50} B(50;\tfrac{1}{6};i) = \sum_{i=0}^{50} B(50;\tfrac{1}{6};i) - \sum_{i=0}^{9} B(50;\tfrac{1}{6};i)$$
$$= 1 - \sum_{i=0}^{9} B(50;\tfrac{1}{6};i)$$

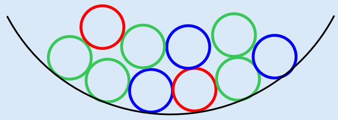
c) Ein Würfel wird 50 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint die „6“ **mindestens** 10 Mal **und höchstens** 20 Mal?



$$P(10 \le X \le 20) = B(50;\tfrac{1}{6};10 \le k \le 20) = \sum_{i=10}^{20} B(50;\tfrac{1}{6};i)$$
$$= \sum_{i=0}^{20} B(50;\tfrac{1}{6};i) - \sum_{i=0}^{9} B(50;\tfrac{1}{6};i)$$

Aufgabetyp 3 x MINDESTENS

Beispiel: Wie oft muss **mindestens** aus der Schale eine Kugel mit Zurücklegen gezogen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 99% **mindestens eine** rote Kugel gezogen wird.



Allgemeines Lösungsschema am Beispiel erklärt:

Schritt 1: *Aufgabe als Gleichung formulieren*

P(**mindestens eine** rote Kugel bei n Ziehungen) **mindestens** 99%

P(**mindestens eine** rote Kugel bei n Ziehungen) **≥** 99%

Schritt 2: *Gleichung umformen mithilfe des Gegenereignisses*

P(**mindestens eine** rote Kugel bei n Ziehungen) **≥** 99%

P(**nicht keine** rote Kugel bei n Ziehungen) **≥** 99%

1 – P(**keine** rote Kugel bei n Ziehungen) **≥** 99%

Schritt 3: *Einsetzen der Größe für P(keine rote Kugel bei n Ziehungen)*

Da sich in der Schale 2 rote Kugeln befinden, gilt $P(\text{rot}) = 0{,}2$ und somit $P(\overline{\text{rot}}) = 0{,}8$

P(**keine** rote Kugel bei n Ziehungen) $= 0{,}8^n$

Es ergibt sich eine Ungleichung der Form:

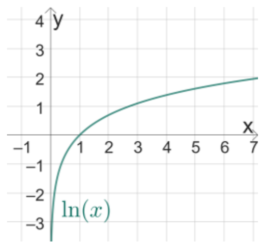
$1 - 0{,}8^n \geq 99\%$

Schritt 4: *Lösen der Ungleichung*

$$\begin{aligned}
1 - 0{,}8^n &\geq 0{,}99 && \mid -1 \\
-0{,}8^n &\geq 0{,}99 - 1 \\
-0{,}8^n &\geq -0{,}01 && \mid \cdot(-1) \\
0{,}8^n &\leq 0{,}01 && \mid \ln(\ldots) \\
\ln(0{,}8^n) &\leq \ln(0{,}01) \\
n \cdot \ln(0{,}8) &\leq \ln(0{,}01) && \mid : \ln(0{,}8) \\
n &\geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \\
n &\geq 20{,}64
\end{aligned}$$

Achtung! Das Ungleichzeichen kehrt sich um!

Achtung! $\ln(0{,}8) < 0$, das Ungleichzeichen kehrt sich um!



Schritt 5: *Ergebnis auswerten*

Die Anzahl der Ziehungen muss eine natürliche Zahl sein. Wegen $n \geq 20{,}64$ müssen **mindestens** 21 Ziehungen durchgeführt werden.

ERWARTUNGSWERT, VARIANZ UND STANDARDABWEICHUNG EINER BINOMIALVERTEILTEN ZUFALLSGRÖSSE

Allgemein gilt:
Ist die Zufallsgröße X nach B(n; p) binomialverteilt, so gilt

$$E(X) = n \cdot p$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot q = n \cdot p \cdot (1-p)$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Beispiel 1: Betrachtet werden die nach B(10; 0,3) und B(10; 0,75) binomialverteilten Zufallsgrößen X und Y.

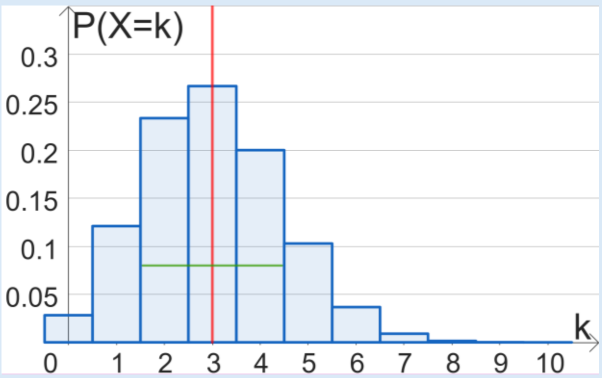
a) Bestimmen Sie für X und Y Erwartungswert und Standardabweichung.

$E(X) = 10 \cdot 0{,}3 = 3$ $\qquad$ $E(Y) = 10 \cdot 0{,}75 = 7{,}5$

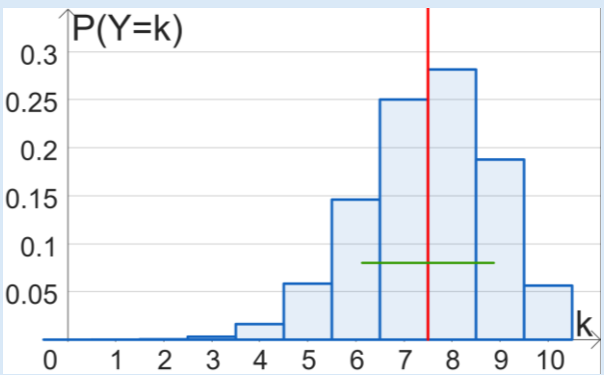
$Var(X) = 10 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 2{,}1$ $\qquad$ $Var(Y) = 10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 1{,}875$

$\sigma(X) = \sqrt{2{,}1} \approx 1{,}45$ $\qquad$ $\sigma(Y) = \sqrt{1{,}875} \approx 1{,}37$

B(10;0,3;k):



B(10;0,75;k):



b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht X um mindestens die Standardabweichung vom Erwartungswert ab?
Außerhalb des Intervalls $]3-1{,}45; 3+1{,}45[=]1{,}55; 4{,}45[$ nimmt die Zufallsgröße X die Werte 0; 1 und 5 bis 10 an.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit P ergibt sich somit zu:

$$P(0 \le X \le 1) + P(5 \le X \le 10) = B(10;0{,}3;k \le 1) + B(10;0{,}3;5 \le k \le 10)$$
$$= B(10;0{,}3;k \le 1) + 1 - B(10;0{,}3;k \le 4)$$
$$= 0{,}14931 + 1 - 0{,}84973 = 0{,}29958$$

Beispiel 2: Die nach B(n; p) binomialverteilte Zufallsgröße X besitzt den Erwartungswert 30 und die Standardabweichung $2\sqrt{3}$.
Bestimmen Sie n und p.

$\sigma(x) = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad Var(X) = (2\sqrt{3})^2 = 12$

$\Rightarrow n \cdot p \cdot q = 12$

$E(X) = 30 \quad \Rightarrow \quad n \cdot p = 30$

also

$30 \cdot q = 12 \quad \Rightarrow \quad q = 0{,}4$ und $p = 0{,}6$

wegen $n \cdot p = 30$ und $p = 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad n = 30 : 0{,}6 = 50$

X ist nach B(50; 0,6) binomialverteilt.