Aufgabe

Durch die Punkte $A(4|5|2)$ und $B(2|1|6)$ wird eine Gerade im dreidimensionalen Raum festgelegt.

a) Stellen Sie die zugehörige Geradengleichung auf.

b) Geben Sie drei weitere Punkte der Geraden an.

c) Überprüfen Sie, ob die Punkte $C(5|7|0)$ und $D(-3|-1|2)$ auf der Geraden liegen.

Lösung

a) Als Stützvektor kann man den Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ verwenden. Wählt man als Richtungsvektor den Vektor $\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, so erhält man die Geradengleichung für die Gerade g_{AB}, die durch die Punkte A und B geht:

$$g_{AB}:\ \vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Weitere Punkte auf der Geraden findet man, indem man beliebige Zahlen für k einsetzt, z. B.

- $k = 2$: $\vec{x}_1 = \vec{a} + 2 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow X_1(0|-3|10)$
- $k = -4$: $\vec{x}_2 = \vec{a} + (-4) \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ -14 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow X_2(12|21|-14)$
- $k = \frac{1}{2}$: $\vec{x}_3 = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow X_3(3|3|4)$

c) Zu überprüfen ist, ob die Ortsvektoren zu den Punkten C und D gleichzeitig Ortsvektoren sind, die zu jeweils einem Punkt der Geraden zeigen.

Dies führt für den Punkt C zuerst auf die Gleichung:

$$\vec{c} = \vec{a} + k \cdot \vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 5 = 4 - 2k \\ \text{II} & 7 = 5 - 4k \\ \text{III} & 0 = 2 + 4k \end{array}$$

Jede der drei Gleichungen dieses Systems führt auf $k = -\frac{1}{2}$. Da die Vektorgleichung also eine Lösung hat, liegt der Punkt C auf der Geraden.

Anders beim Punkt D: Hier besitzt die Gleichung

$\vec{d} = \vec{a} + k \cdot \vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

keine Lösung, denn jede Gleichung des Gleichungssystems

I $\quad -3 = 4 - 2k$

II $\quad -1 = 5 - 4k$

III $\quad 2 = 2 + 4k$

führt auf eine unterschiedliche Lösung für k ($k = \frac{7}{2}$ bzw. $k = \frac{3}{2}$ bzw. $k = 0$).

Der Punkt D liegt also nicht auf der Geraden.