
MEHR
ERFAHREN
NEUES ABITUR
ABITUR-TRAINING
Mathematik
Analytische Geometrie
Mit 40 Lernvideos zur Veranschaulichung der Musteraufgaben
STARK

Inhalt

Autoren:
Dr. Raimund Ordowski, Arnold Zitterbart

Bei **MySTARK** finden Sie **Lernvideos** zu allen Musteraufgaben.
Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband für die **Analysis** halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik umfassend unterstützt.

Das Buch ist sowohl für das **grundlegende** als auch für das **erhöhte Anforderungsniveau** (also **GK** und **LK**) geeignet. Lernabschnitte, die nur für das erhöhte Anforderungsniveau relevant sind, wurden mit einem ✱ markiert. Die Einteilung erfolgte hierbei nach den **Vorgaben der Bildungsstandards** und kann in den einzelnen Bundesländern leicht davon abweichen.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie Probleme haben. Folgende Elemente erleichtern dabei das Lernen und Verstehen:

- **Definitionen** und **Regeln** werden klar und präzise formuliert und in blauen Kästen hervorgehoben, damit Sie die zentralen Inhalte eines Abschnitts schnell erfassen können.
- **Beispiele** verdeutlichen die Themen und helfen Ihnen, die Theorie praktisch nachzuvollziehen.
- **Musteraufgaben** zeigen Ihnen Schritt für Schritt, wie Sie die Rechen- und Denkwege nachvollziehen und anwenden können.
- **Lernvideos** ergänzen die Musteraufgaben: Auf MySTARK finden Sie alle Videos, die Ihnen das jeweilige Thema anschaulich erläutern.
- **Übungsaufgaben** ermöglichen Ihnen, den gelernten Stoff anzuwenden und Ihre Fähigkeiten zu überprüfen.

  Darunter gibt es Übungsaufgaben, die **ohne Hilfsmittel** gelöst werden können.
- **Lösungen** zu allen Übungsaufgaben finden Sie am Ende des Buches. Sie sind ausführlich erklärt, damit Sie jeden Schritt und den Lösungsansatz genau nachvollziehen können.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für die gesamte Abiturprüfung und alles erdenklich Gute für Ihren weiteren Lebensweg.

Ihr Autorenteam und Ihr STARK Verlag

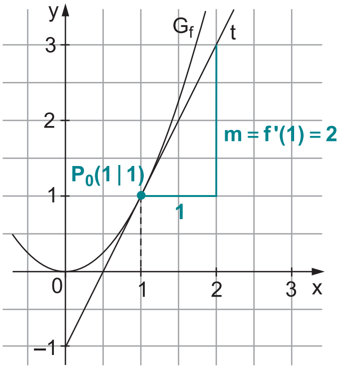
1 Bedeutung der Ableitung

Unter bestimmten Bedingungen kann man eine Funktion f **ableiten** oder **differenzieren** und erhält die zugehörige **Ableitungsfunktion** oder kurz **Ableitung f'**.
Die folgende Darstellung soll verschiedene Bedeutungen der Ableitung erläutern, ohne auf ausführliche und exakte Herleitungen des Unterrichts einzugehen.
Für die Funktion f mit $f(x) = x^2$ erhält man die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 2x$ (vgl. Abschnitt 2 ab Seite 45).

Die **Ableitung $f'(x_0)$ an einer Stelle x_0** kann man auf zwei Arten interpretieren:

(1) **Steigung des Graphen im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$**

Dabei versteht man unter der Steigung des Graphen G_f in P_0 die Steigung der Geraden, die sich in diesem Punkt „optimal" an den Graphen „anschmiegt", d. h., ihn in P_0 „berührt". Man nennt sie **Tangente t** an den Graphen im Punkt P_0.



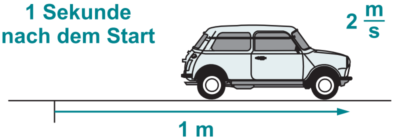
Für die vorgegebene Funktion f gilt:
Der Funktionswert an der Stelle $x_0 = 1$ ist $f(1) = 1$.
Die Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ hat den Wert $f'(1) = 2$.

Daher hat die Tangente t im Punkt $P_0(1 \mid 1)$ die Steigung $m = f'(1) = 2$.

(2) **Momentane oder lokale Änderungsrate an der Stelle x_0**

Die vorgegebene Funktion f kann beispielsweise den zurückgelegten Weg eines Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben, wobei f(x) in Meter und x in Sekunden gemessen wird.

Dann bedeutet:



$f(1) = 1$: Das Fahrzeug hat in einer Sekunde ab dem Start einen **Weg** der Länge 1 Meter zurückgelegt.

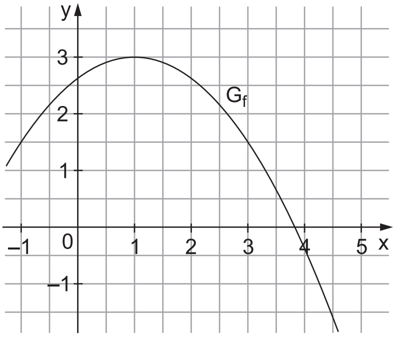
$f'(1) = 2$: Das Fahrzeug hat nach einer Sekunde eine **Geschwindigkeit** von 2 Meter pro Sekunde, d. h., die **momentane Änderungsrate** des Weges beträgt 2 Meter pro Sekunde.

Die nachfolgende Übersicht zeigt Beispiele für momentane Änderungsraten.

Die **Funktion f** stellt dar:	Die **Ableitung f'** bedeutet:
zurückgelegte **Wegstrecke** in Meter (m) in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden (s)	**Geschwindigkeit** in $\frac{m}{s}$
Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ in Abhängigkeit von der Zeit in Sekunden (s)	**Beschleunigung** in $\frac{m}{s^2}$
Wassermenge in m^3 in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit in min	**Zuflussrate** oder **Abflussrate** in $\frac{m^3}{min}$
Kraftstoffinhalt eines Autotanks in Liter in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg in km	**Kraftstoffverbrauch** in $\frac{Liter}{km}$
Bestand einer Population in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren (a)	**Zuwachsrate** in $\frac{1}{a}$

Musteraufgabe

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer Funktion f.
Zeichnen Sie möglichst genau die Tangenten an G_f bei den Stellen $x_1=1$ und $x_2=3$ in die Abbildung ein und bestimmen Sie grafisch f'(1) und f'(3).
Der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' ist eine Gerade.
Zeichnen Sie $G_{f'}$ in die Abbildung ein.

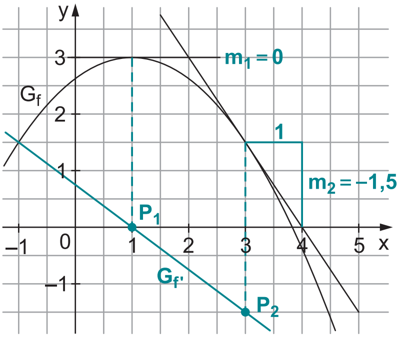


Lösung Die beiden Tangenten zeichnet man mit dem Geodreieck nach Augenmaß in die Abbildung ein.

Video 16

Die Tangente an der Stelle $x_1=1$ verläuft waagrecht. Ihre Steigung ist daher $m_1=0$, es gilt also $f'(1)=0$.

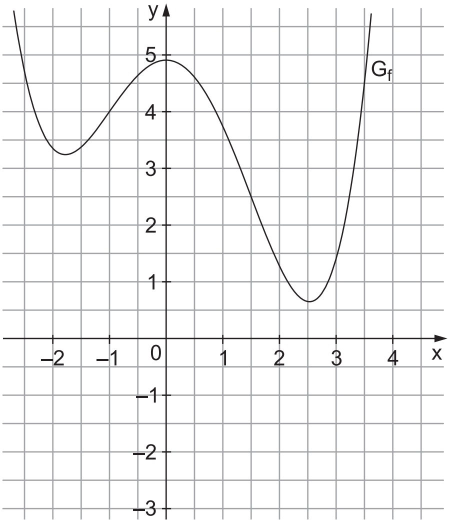
An einem geeigneten Steigungsdreieck liest man für die Tangente an der Stelle $x_2=3$ die Steigung $m_2=-1{,}5$ ab. Somit gilt $f'(3)=-1{,}5$.
Der Graph $G_{f'}$ der Ableitung f' ist die Gerade, die durch die Punkte $P_1(1\,|\,0)$ und $P_2(3\,|\,-1{,}5)$ verläuft.



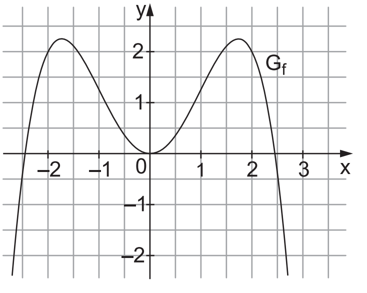
Beispiele und Aufgaben zu Änderungsraten finden Sie in Abschnitt 7 (ab Seite 66) sowie in Abschnitt 6 im Kapitel „Integralrechnung“ ab Seite 93.

Übungsaufgaben

41 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.
Bestimmen Sie grafisch wie in der Musteraufgabe näherungsweise f'(–1) und f'(1,5).
Skizzieren Sie den Graphen von f' in die Abbildung.



42 Der abgebildete Graph einer Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse. Im Bereich $0 \leq x \leq 2$ ist $f'(1) = 2$ der größte Wert der Ableitungsfunktion f'.
Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in die Abbildung.



Also gilt für $\mathbf{x_1 = 0}$: $(u \circ v)(0) = u(v(0)) = u(-1) = 0$

und für $\mathbf{x_2 = 2}$: $(u \circ v)(2) = u(v(2)) = u(3) = 0$

40 Für die Verkettung $f \circ g$ mit $f(x) = \frac{1}{x-1}$ und $g(x) = x^2 - 3$ erhält man:

$$f(g(x)) = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{(x^2-3)-1} = \frac{1}{x^2-4}$$

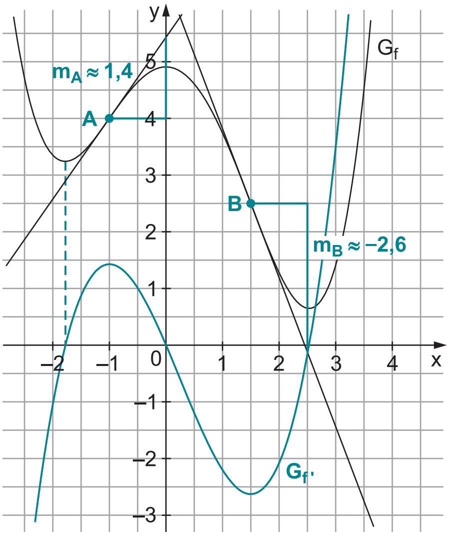
Die Definitionslücken dieser gebrochenrationalen Funktion erhält man, indem man das Nennerpolynom gleich 0 setzt:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x_{1;\,2} = \pm 2$$

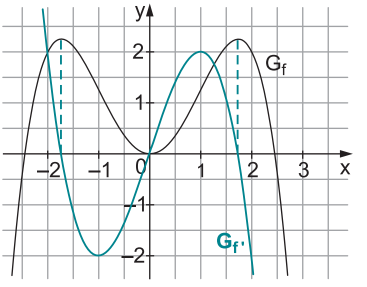
Für $\mathbf{x_1 = -2}$ und $\mathbf{x_2 = 2}$ ist die Verkettung nicht definiert.

41 An den Graphen G_f zeichnet man mit dem Geodreieck möglichst genau die Tangenten an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1{,}5$. Mithilfe von Steigungsdreiecken bestimmt man ihre Steigungen, die gleich den Ableitungen an diesen Stellen sind. Man erhält: $f'(-1) \approx 1{,}4$ und $f'(1{,}5) \approx -2{,}6$

Diese beiden Werte geben auch ungefähr die größte bzw. kleinste Steigung des Graphen zwischen den Tiefpunkten an. Berücksichtigt man noch, dass am Hochpunkt bzw. an den Tiefpunkten von G_f die Tangenten waagrecht verlaufen, d. h., dass f' an den entsprechenden x-Werten den Funktionswert 0 hat, kann man mit diesen Informationen den Graphen $G_{f'}$ der Ableitung skizzieren.



42 Aus $f'(1) = 2$ folgt wegen der Achsensymmetrie von G_f zur y-Achse $f'(-1) = -2$ als kleinste Steigung im Bereich $-2 \le x \le 0$.
Berücksichtigt man noch, dass am Tiefpunkt bzw. an den Hochpunkten von G_f die Tangenten waagrecht verlaufen, d. h., dass f' an den entsprechenden x-Werten den Funktionswert 0 hat, kann man mit diesen Informationen den Graphen $G_{f'}$ der Ableitung skizzieren.



43 Für die folgenden Ableitungen brauchen Sie neben der Summen- und der Faktorregel vor allem die Produkt- und die Kettenregel.

a) $f(x) = x^4 \cdot e^{3x+1}$

$$f'(x) = 4x^3 \cdot e^{3x+1} + x^4 \cdot e^{3x+1} \cdot 3 = 4x^3 \cdot e^{3x+1} + 3x^4 \cdot e^{3x+1}$$
$$= (4x^3 + 3x^4) \cdot e^{3x+1}$$

b) $f(x) = (2x^2 + x) \cdot e^{-4x}$

$$f'(x) = (4x+1) \cdot e^{-4x} + (2x^2 + x) \cdot e^{-4x} \cdot (-4)$$
$$= (4x+1) \cdot e^{-4x} + (-8x^2 - 4x) \cdot e^{-4x}$$
$$= (1 - 8x^2) \cdot e^{-4x}$$

c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-3x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-3x} + \sqrt{x} \cdot e^{-3x} \cdot (-3) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\sqrt{x}\right) \cdot e^{-3x}$$

d) $f(x) = (2 + e^{2x})^3$

$$f'(x) = 3 \cdot (2 + e^{2x})^2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 6 \cdot (2 + e^{2x})^2 \cdot e^{2x}$$

e) $f(x) = \frac{1}{x^3} \cdot e^{-5x+2} = x^{-3} \cdot e^{-5x+2}$

$$f'(x) = -3 \cdot x^{-4} \cdot e^{-5x+2} + x^{-3} \cdot e^{-5x+2} \cdot (-5) = -\frac{3}{x^4} \cdot e^{-5x+2} - \frac{5}{x^3} \cdot e^{-5x+2}$$
$$= -\left(\frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^3}\right) \cdot e^{-5x+2}$$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{3x+2}$

$$f'(x) = 2x \cdot \sqrt{3x+2} + x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} \cdot 3 = 2x \cdot \sqrt{3x+2} + \frac{3x^2}{2\sqrt{3x+2}}$$

Inhalt

Autor: Eberhard Endres

Bei **MySTARK** finden Sie **Lernvideos** zu allen Musteraufgaben.
Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband für die **Analytische Geometrie** halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik umfassend unterstützt.

Das Buch ist sowohl für das **grundlegende** als auch für das **erhöhte Anforderungsniveau** (also **GK** und **LK**) geeignet. Lernabschnitte, die in der Regel nur für das erhöhte Anforderungsniveau relevant sind, wurden mit einem ✳ markiert. Die Einteilung erfolgte hierbei nach den **Vorgaben der Bildungsstandards** und kann in den einzelnen Bundesländern leicht davon abweichen.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie Probleme haben. Folgende strukturelle Maßnahmen erleichtern dabei Ihre Arbeit:

- **Definitionen** und **Regeln** werden klar und präzise formuliert und in farbigen Kästen hervorgehoben, damit Sie die zentralen Inhalte eines Abschnitts schnell erfassen können.
- **Beispiele** verdeutlichen die Themen und helfen Ihnen, die Theorie praktisch nachzuvollziehen.
- **Musteraufgaben** zeigen Ihnen Schritt für Schritt, wie Sie die Rechen- und Denkwege nachvollziehen und anwenden können.
- **Lernvideos** ergänzen die Musteraufgaben: Auf MySTARK finden Sie alle Videos, die Ihnen das jeweilige Thema anschaulich erläutern.
- **Übungsaufgaben** ermöglichen Ihnen, den gelernten Stoff anzuwenden und Ihre Fähigkeiten zu überprüfen.

  Darunter gibt es Übungsaufgaben, die **ohne Hilfsmittel** gelöst werden sollen; sie enthalten insbesondere Fragestellungen, die auch in hilfsmittelfreien Prüfungsteilen abgefragt werden können.
- **Lösungen** zu allen Übungsaufgaben finden Sie am Ende des Buches. Sie sind ausführlich erklärt, damit Sie jeden Schritt und den Lösungsansatz genau nachvollziehen können.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für die gesamte Abiturprüfung und alles erdenklich Gute für Ihren weiteren Lebensweg.

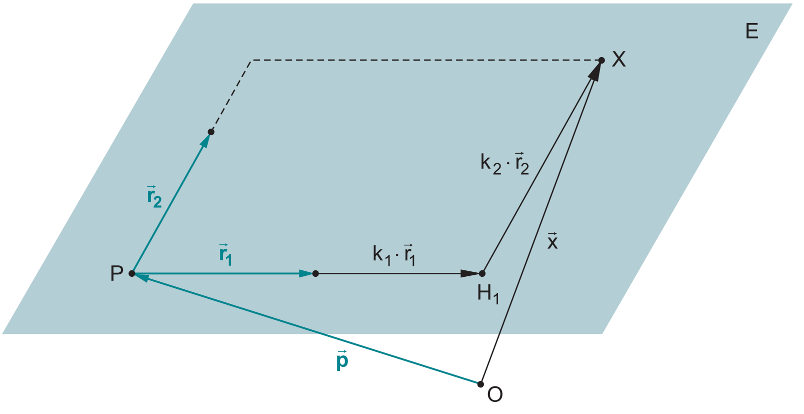
Ihr Autor und Ihr STARK Verlag

Eberhard Endres

Eberhard Endres

1 Ebenen in Parameterform

Im Gegensatz zu Geraden haben Ebenen zwei Dimensionen. Folglich kann man sich auf der Ebene nicht nur in eine Richtung bewegen, sondern in eine Kombination von zwei Richtungen. Hieraus ergibt sich die Idee, wie man vom Ursprung zu jedem beliebigen Punkt X in einer Ebene E gelangen kann:



Man geht zunächst vom Ursprung aus zu einem gegebenen Punkt P in der Ebene (auch **Aufpunkt** genannt). Hierzu ist der Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ von P hilfreich, der als Stützvektor bezeichnet wird. Die Ebene E wird von zwei Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ „aufgespannt", die in die zwei verschiedenen Richtungen der Ebene weisen. Diese beiden Vektoren werden entsprechend Spannvektoren genannt. Man geht vom Startpunkt P aus zunächst in Richtung des einen Spannvektors $\vec{r}_1$ bis zu einem Hilfspunkt H_1 und danach in Richtung des anderen Spannvektors $\vec{r}_2$ und kann somit jeden gewünschten Punkt X der Ebene erreichen.
Der Ortsvektor $\vec{x}$ vom Ursprung zu einem Punkt X der Ebene lässt sich deshalb als Linearkombination ausdrücken: $\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \vec{p} + k_1 \cdot \vec{r}_1 + k_2 \cdot \vec{r}_2$

Parameterform einer Ebene
Eine Ebene E wird bestimmt durch einen **Stützvektor** $\vec{p}$, der vom Ursprung zu einem Punkt der Ebene führt, und zwei nicht kollineare **Spannvektoren** $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$.
Sie kann beschrieben werden durch die Parametergleichung:
E: $\vec{x} = \vec{p} + k_1 \cdot \vec{r}_1 + k_2 \cdot \vec{r}_2$; $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$
Die reellen Faktoren k_1 und k_2 sind die **Parameter** der Ebenengleichung.

Um zu überprüfen, ob ein bestimmter Punkt in einer gegebenen Ebene liegt, führt man analog zu Geraden eine **Punktprobe** durch. Dazu setzt man den Ortsvektor des Punktes für den variablen Ortsvektor $\vec{x}$ in die Ebenengleichung ein und untersucht das entstehende lineare Gleichungssystem auf Lösbarkeit.

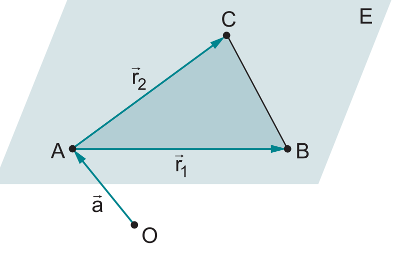
Musteraufgabe

Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC mit A(1|−4|−2), B(5|0|2) und C(7|5|4) liegt. Untersuchen Sie zudem, ob die Punkte D(4|1|1) und F(−2|3|0) in dieser Ebene E liegen.

Lösung

Video 15

Als Stützvektor der Ebene kann man jeden Vektor vom Ursprung zu einem Punkt der Ebene, z. B. zum Punkt A, verwenden, also $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Die Ebene wird dann aufgespannt durch die (nicht kollinearen) Vektoren

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ und

$\vec{r}_2 = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Eine mögliche Gleichung der Ebene E lautet also:

$$E:\ \vec{x} = \vec{a} + k_1 \cdot \vec{r}_1 + k_2 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix};\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Genauso gut kann man beliebige Vielfache der beiden Spannvektoren (ungleich dem Nullvektor) verwenden, z. B.:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Punktprobe für den Punkt D(4|1|1):

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung führt auf ein lineares Gleichungssystem für k_1 und k_2:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & 4 = 1 + k_1 + 2k_2 \\ \mathrm{II} & 1 = -4 + k_1 + 3k_2 \\ \mathrm{III} & 1 = -2 + k_1 + 2k_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \mathrm{I} & k_1 + 2k_2 = 3 \\ \mathrm{II} & k_1 + 3k_2 = 5 \\ \mathrm{III} & k_1 + 2k_2 = 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & k_1 + 2k_2 &=& 3 \\ \mathrm{IV} = \mathrm{I} - \mathrm{II} & -\ k_2 &=& -2 \\ \mathrm{V} = \mathrm{I} - \mathrm{III} & 0 &=& 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung: Aus Gleichung IV ergibt sich $k_2 = 2$ und damit aus Gleichung I: $k_1 + 2 \cdot 2 = 3 \Leftrightarrow k_1 = -1$

Der Punkt D kann vom Ursprung aus über

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+4 \\ -4-1+6 \\ -2-1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

angesteuert werden und liegt somit in der Ebene E.

Punktprobe für den Punkt F(–2|3|0):

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}+k_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llcllcll}
\text{I} & -2 = 1 + k_1 + 2k_2 & & \text{I} & k_1 + 2k_2 = -3 & & \text{I} & k_1 + 2k_2 = -3\\
\text{II} & 3 = -4 + k_1 + 3k_2 & \Leftrightarrow & \text{II} & k_1 + 3k_2 = 7 & \Leftrightarrow & \text{IV} = \text{I} - \text{II} & -k_2 = -10\\
\text{III} & 0 = -2 + k_1 + 2k_2 & & \text{III} & k_1 + 2k_2 = 2 & & \text{V} = \text{I} - \text{III} & 0 = -5
\end{array}$$

Gleichung V stellt einen Widerspruch dar; somit liegt der Punkt F nicht in der Ebene E.

Übungsaufgaben

73 Geben Sie jeweils eine Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B und C an.

a) A(5|2|1); B(1|1|3); C(–3|1|3)

b) A(6|–1|–3); B(3|–3|1); C(0|1|0)

74 Geben Sie jeweils vier Punkte in der Ebene E an.

a) E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

b) E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$; $s, t \in \mathbb{R}$

75 Bestimmen Sie die Parameter r und s, die den Punkt C der Ebene bestimmen.

a) E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$; C(9|–6|–1)

b) E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$; C(–1|5|–1)

76 Prüfen Sie, ob die Punkte A, B oder C in der Ebene E liegen.

E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$; A(1|1|1); B(–5|2|2); C(7|2|1)

77 a) In einer Ebene E liegen der Punkt A(1|1|–1) und die Gerade

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $k \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E.

b) Begründen Sie, warum sich mit dem Punkt P(3|2|3) und der Geraden g aus Teilaufgabe a keine eindeutige Ebenengleichung aufstellen lässt.

73 Man verwendet z. B. jeweils den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ als Stützvektor und die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Spannvektoren.

a) $\mathbf{E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}}$

b) $\mathbf{E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}}$

74 Man setzt beliebige Zahlen für r und s bzw. s und t ein und erhält damit beliebig viele Punkte in der Ebene E, z. B.:

a) $r=1;\ s=0$: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{P_1(7|1|2)}$

$r=0;\ s=1$: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{P_2(6|0|5)}$

$r=0;\ s=0$: $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{P_3(5|0|3)}$

$r=-1;\ s=1$: $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{P_4(4|-1|6)}$

b) $s=1;\ t=0$: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{P_1(0|6|1)}$

$s=0;\ t=-1$: $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{P_2(-1|1|-2)}$

$s=2;\ t=1$: $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{P_3(1|11|4)}$

$s=-1;\ t=-1$: $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\mathbf{P_4(-2|-2|-3)}$

75 a) Ansatz: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 1 + r - 2s & = & 9 \\ \text{II} & -4 - r & = & -6 \\ \text{III} & -2 + 2r + s & = & -1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcl} \text{I} & r - 2s & = & 8 \\ \text{II} & -r & = & -2 \\ \text{III} & 2r + s & = & 1 \end{array}$$

Aus Gleichung II ergibt sich $\mathbf{r=2}$; eingesetzt in Gleichung III erhält man $\mathbf{s=-3}$. In Gleichung I ergibt sich mit diesen Werten von r und s eine wahre Aussage: $2-2\cdot(-3)=2+6=8$

b) Ansatz: $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 1+\ \ r+\ \ s=-1\\ \text{II} & 0-2r-\ \ s=\ \ 5\\ \text{III} & 5+\ \ r-3s=-1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & r+\ \ s=-2\\ \text{II} & -2r-\ \ s=\ \ 5\\ \text{III} & r-3s=-6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & r+\ \ s=-2\\ \text{IV}=2\cdot\text{I}+\text{II} & s=\ \ 1\\ \text{V}=\text{I}-\text{III} & 4s=\ \ 4 \end{array}$$

Aus Gleichung IV bzw. V ergibt sich **s = 1**, eingesetzt in I folgt **r = –3**.

76 Punktprobe für A ergibt:

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2r-2s=2\\ \text{II} & r+2s=3\\ \text{III} & -4r+\ \ s=1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2r-2s=\ \ 2\\ \text{IV}=\text{I}-2\cdot\text{II} & -6s=-4\\ \text{V}=2\cdot\text{I}+\text{III} & -3s=\ \ 5 \end{array}$$

Gleichung IV ergibt $s=\frac{2}{3}$, während sich aus Gleichung V der Wert $s=-\frac{5}{3}$ ergibt. Wegen dieses Widerspruchs liegt A **nicht** in der Ebene E.

Punktprobe für B ergibt:

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2r-2s=-4\\ \text{II} & r+2s=\ \ 4\\ \text{III} & -4r+\ \ s=\ \ 2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2r-2s=\ \ -4\\ \text{IV}=\text{I}-2\cdot\text{II} & -6s=-12\\ \text{V}=2\cdot\text{I}+\text{III} & -3s=\ \ -6 \end{array}$$

Aus den Gleichungen IV und V folgt jeweils $s=2$; eingesetzt in I erhält man:
$2r-4=-4 \Leftrightarrow r=0$
Der Punkt B liegt somit in der Ebene E.

Punktprobe für C ergibt:

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2r-2s=8\\ \text{II} & r+2s=4\\ \text{III} & -4r+\ \ s=1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} \text{I} & 2r-2s=\ \ 8\\ \text{IV}=\text{I}-2\cdot\text{II} & -6s=\ \ 0\\ \text{V}=2\cdot\text{I}+\text{III} & -3s=17 \end{array}$$

Gleichung IV ergibt $s=0$, während sich aus Gleichung V der Wert $s=-\frac{17}{3}$ ergibt. Wegen dieses Widerspruchs liegt C **nicht** in der Ebene E.

77 a) Der Punkt $A(1\,|\,1\,|\,-1)$, der aufgrund seiner x_3-Koordinate offensichtlich nicht auf g liegt, und der Aufpunkt $B(-1\,|\,0\,|\,3)$ der Geraden g liegen in der Ebene E. Daher kann man den Ortsvektor von A als Stützvektor der Ebene E verwenden und den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ sowie den Richtungsvektor der Geraden g als (nicht kollineare) Spannvektoren. Eine Gleichung der Ebene E lautet somit:

$$\mathbf{E:}\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix};\ s,t\in\mathbb{R}$$

Inhalt

Autoren:
Ingeborg Goller, Jürgen Mehnert, Raimund Ordowski, Franz Wieand

Bei **MySTARK** finden Sie **Lernvideos** zu allen Musteraufgaben.
Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband für die **Stochastik** halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik umfassend unterstützt.

Das Buch ist sowohl für das **grundlegende** als auch für das **erhöhte Anforderungsniveau** (also **GK** und **LK**) geeignet. Lernabschnitte, die nur für das erhöhte Anforderungsniveau relevant sind, wurden mit einem ✱ markiert. Die Einteilung erfolgte hierbei nach den **Vorgaben der Bildungsstandards** und kann in den einzelnen Bundesländern leicht davon abweichen.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie Probleme haben. Folgende Elemente erleichtern dabei das Lernen und Verstehen:

- **Definitionen** und **Regeln** werden klar und präzise formuliert und in blauen Kästen hervorgehoben, damit Sie die zentralen Inhalte eines Abschnitts schnell erfassen können.
- **Beispiele** verdeutlichen die Themen und helfen Ihnen, die Theorie praktisch nachzuvollziehen.
- **Musteraufgaben** zeigen Ihnen Schritt für Schritt, wie Sie die Rechen- und Denkwege nachvollziehen und anwenden können.
- **Lernvideos** ergänzen die Musteraufgaben: Auf MySTARK finden Sie alle Videos, die Ihnen das jeweilige Thema anschaulich erläutern.
- **Übungsaufgaben** ermöglichen Ihnen, den gelernten Stoff anzuwenden und Ihre Fähigkeiten zu überprüfen.

  Darunter gibt es Übungsaufgaben, die **ohne Hilfsmittel** gelöst werden können.
- **Lösungen** zu allen Übungsaufgaben finden Sie am Ende des Buches. Sie sind ausführlich erklärt, damit Sie jeden Schritt und den Lösungsansatz genau nachvollziehen können.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für die gesamte Abiturprüfung und alles erdenklich Gute für Ihren weiteren Lebensweg.

Ihr Autorenteam und Ihr STARK Verlag

1 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Vierfeldertafel

In Aufgabe 16 auf S. 23 ging es um Jugendliche, die zum Teil in einem Sportverein (kurz: S) sind und/oder ein Musikinstrument (kurz: M) spielen. Es ergab sich folgende Vierfeldertafel:

	S	$\overline{S}$	
M	40	200	240
$\overline{M}$	110	50	160
	150	250	400

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt **ein Jugendlicher, der im Sportverein ist,** auch ein Instrument?

Betrachtet man diese Frage genauer, stellt man schnell fest, dass man nur an den 150 Jugendlichen im Sportverein interessiert ist und nicht an der Gesamtheit aller 400 Jugendlichen. Aus der Vierfeldertafel kann man ablesen, dass von diesen 150 Jugendlichen 40 auch ein Instrument spielen.
Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{40}{150} \approx 26{,}67\ \%$.

Antwort: **Wenn** ein Jugendlicher im Sportverein ist, dann spielt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 26,67 % ein Musikinstrument.

Wie kann die Wahrscheinlichkeit $\frac{40}{150}$ als Formel geschrieben werden? Teilt man Zähler und Nenner des Bruches jeweils durch die Anzahl aller 400 Jugendlicher, so erhält man $\frac{\frac{40}{400}}{\frac{150}{400}}$. Im Zähler steht dann die Wahrscheinlichkeit $P(M \cap S)$ und im Nenner die Wahrscheinlichkeit P(S). Der Quotient $\frac{P(M \cap S)}{P(S)}$ gibt also die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Jugendlicher ein Musikinstrument spielt, wenn er in einem Sportverein ist. Statt **„wenn“** kann man auch **„unter der Bedingung, dass“** sagen. Für diese Wahrscheinlichkeit schreibt man $P_S(M)$.

Sind zwei Ereignisse A und B (mit $P(B) \neq 0$) gegeben, dann heißt

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist.

Bemerkung: Bedingte Wahrscheinlichkeiten können in der Vierfeldertafel nicht direkt als Zahl eingetragen werden. Es ist immer eine Rechnung erforderlich.

Musteraufgabe

In einem Abi-Jahrgang möchten 60 % der Abiturientinnen und Abiturienten sudieren. 54 % aller Abiturientinnen und Abiturienten haben in ihrem Abitur eine gute oder sehr gute Note erhalten. 25 % der Abiturientinnen und Abiturienten haben keine gute oder sehr gute Note im Abitur und möchten studieren.

a) Erstellen Sie die zugehörige Vierfeldertafel.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person aus diesem Abi-Jahrgang, die nicht studieren möchte, eine gute oder sehr gute Note erhalten hat.

Lösung

Video 19

a) Abkürzend wird S für „Person möchte studieren" und G für „gute oder sehr gute Note" verwendet. Gegeben sind dann:

$P(S) = 0{,}6$ — 60 % möchten studieren.

$P(G) = 0{,}54$ — 54 % haben eine gute oder sehr gute Note erhalten.

$P(S \cap \overline{G}) = 0{,}25$ — 25 % haben keine gute oder sehr gute Note erhalten und möchten studieren.

Nun kann die Vierfeldertafel vollständig ausgefüllt werden:

	S	$\overline{S}$	
G	0,35	0,19	**0,54**
$\overline{G}$	**0,25**	0,21	0,46
	0,6	0,4	**1**

Die farbig gedruckten Zahlen sind (indirekt) gegeben. Die restlichen Werte ergeben sich durch Subtraktionen.

b) Es ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit gesucht. Die Bedingung ist hier „Person möchte nicht studieren", gesucht ist $P_{\overline{S}}(G)$.

$$P_{\overline{S}}(G) = \frac{P(\overline{S} \cap G)}{P(\overline{S})} = \frac{0{,}19}{0{,}4} = 0{,}475 = 47{,}5\,\%$$

Übungsaufgaben

58 Gegeben sind die Ereignisse A: „Ein zufällig ausgewähltes Teststück hat den Fehler A." und B: „Ein zufällig ausgewähltes Teststück hat den Fehler B." Kreuzen Sie an, bei welchen Fragestellungen die Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ gesucht ist.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Teststück den Fehler A, wenn es den Fehler B aufweist?	☐
Ein Teststück hat den Fehler A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es auch den Fehler B?	☐
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weist das Teststück, das den Fehler A hat, den Fehler B auf?	☐
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das Teststück den Fehler B, wenn es den Fehler A hat?	☐

59 Geben Sie für jede Aussage die richtige Formelgleichung an.

a	18 % aller Mathelehrkräfte haben einen Hund.
b	Jedes fünfte Kind mag Kaugummi, aber kein Schnitzel.
c	Jedes vierte Mädchen möchte kein Pferd haben.
d	Alle Lügner haben kurze Beine.
e	Mindestens 76 von 80 Schülerinnen und Schülern, die ihre Hausaufgaben nicht regelmäßig machen, bekommen zu Hause Ärger.

60 Der TÜV-Bericht ergab: 12 % der vorgeführten Pkws haben schwerwiegende Mängel und erhalten deshalb nicht die Plakette. 60 % dieser Pkws sind über 7 Jahre alt. Von den vorgeführten Pkws erhalten 20 % die Plakette und sind älter als 7 Jahre.
Frau Schmitt fährt mit ihrem 9 Jahre alten Auto zum TÜV.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ihr Auto die Plakette bekommt. Verwenden Sie eine Vierfeldertafel.

61 Jeder vierte aller bei Dr. Medicus vorsprechenden Patientinnen und Patienten leidet an hohem Fieber. 8,2 % der Patientinnen und Patienten fiebern, ohne infiziert zu sein. 8 von 10 Patientinnen und Patienten mit einer Virusinfektion leiden auch an hohem Fieber.

a) Stellen Sie die zugehörige Vierfeldertafel auf und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine behandelte Person weder fiebert noch einen Virusinfekt hat.

b) Es haben sich 38 Patientinnen und Patienten für heute bei Dr. Medicus angemeldet.
Mit wie vielen virusinfizierten Personen kann Dr. Medicus heute rechnen? Nehmen Sie zu dem Ergebnis Stellung.

59 a) $P_{\text{Mathelehrkraft}}(\text{Hund}) = 0{,}18$

b) $P(\text{Kaugummi} \cap \overline{\text{Schnitzel}}) = 0{,}20$

c) $P_{\text{Mädchen}}(\overline{\text{Pferd}}) = 0{,}25$

d) $P_{\text{Lügner}}(\text{kurze Beine}) = 1$

e) $P_{\overline{\text{Hausaufgaben}}}(\text{Ärger}) \geq \frac{76}{80} = 0{,}95$

60 M stehe für „mangelhaft“ (deshalb ohne Plakette).
A stehe für „älter als 7 Jahre“.

Gegeben:
$P(M) = 0{,}12$
$P_M(A) = 0{,}60$
$P(A \cap \overline{M}) = 0{,}20$

Aus den ersten beiden Werten folgt:

$$P_M(A) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap M) = P_M(A) \cdot P(M) = 0{,}60 \cdot 0{,}12 = 0{,}072$$

Damit lässt sich die Vierfeldertafel vollständig ausfüllen.

	A	$\overline{A}$	
M	**0,072**	0,048	**0,120**
$\overline{M}$	**0,200**	0,680	0,880
	0,272	0,728	**1**

Die farbig gedruckten Zahlen sind (indirekt) gegeben.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Schmitts mehr als 7 Jahre altes Auto die TÜV-Plakette erhält. Die Bedingung ist also „mehr als 7 Jahre“.

$$P_A(\overline{M}) = \frac{P(A \cap \overline{M})}{P(A)} = \frac{0{,}200}{0{,}272} \approx 73{,}53\,\%$$

Das Auto von Frau Schmitt erhält mit einer Wahrscheinlichkeit von 73,53 % die Plakette.

61 a) I stehe für „Behandelte Person leidet an einer Virusinfektion“.
F stehe für „Behandelte Person hat hohes Fieber“.

Gegeben:
$P(F) = 0{,}25$
$P(F \cap \overline{I}) = 0{,}082$
$P_I(F) = 0{,}80$ „8 von 10“ bedeutet 80 %

Trägt man die Wahrscheinlichkeiten in die Vierfeldertafel ein, so erkennt man, dass sich $P(F)$ aus $P(F \cap \overline{I})$ sowie $P(F \cap I)$ zusammensetzt.

	I	$\overline{I}$	
F		0,082	0,25
$\overline{F}$			
			1

$P(F) = P(F \cap I) + P(F \cap \overline{I})$

Es folgt:

$P(F \cap I) = P(F) - P(F \cap \overline{I}) = 0,25 - 0,082 = 0,168$

Nun kann aus der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit P(I) gefolgert werden:

$P_I(F) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} \quad \Rightarrow \quad P(I) = \frac{P(F \cap I)}{P_I(F)} = \frac{0,168}{0,80} = 0,21$

Damit kann die Vierfeldertafel vollständig ausgefüllt werden:

	I	$\overline{I}$	
F	0,168	0,082	0,250
$\overline{F}$	0,042	0,708	0,750
	0,210	0,790	1

Dass die behandelte Person weder Fieber noch einen Virusinfekt hat, heißt übersetzt $P(\overline{F} \cap \overline{I})$. Diese Wahrscheinlichkeit ist aus der Vierfeldertafel direkt ablesbar als:

$P(\overline{F} \cap \overline{I}) = 0,708 = 70,80\ \%$

b) Die Wahrscheinlichkeit, infiziert zu sein, beträgt 21 %.
$0,21 \cdot 38 = 7,98$
Dr. Medicus kann mit etwa 8 virusinfizierten Personen rechnen.

Das Ergebnis ist als Durchschnittswert einer langen Zeitspanne zu sehen, da die Zahl der Viruspatientinnen und Viruspatienten immer stark von der Jahreszeit abhängt.

62 a) $P(\overline{K} \cap \overline{H}) = 0,17$ in Worten:
17 % aller Radfahrerinnen und Radfahrer erlitten beim Unfall weder eine Kopfverletzung noch trugen sie einen Helm.

$P(H) = 0,38$ in Worten:
38 % der Radfahrerinnen und Radfahrer trugen beim Unfall einen Helm.

$P_K(\overline{H}) = 0,69$ in Worten:

69 % derjenigen Radfahrerinnen und Radfahrer, die beim Unfall eine Kopfverletzung erlitten, trugen keinen Helm.