2027

>30 Millionen bestandene Prüfungen

50 Jahre STARK

STARK Prüfung

MEHR ERFAHREN

Abitur

Thüringen

Mathematik eA

- ✓ Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen
- ✓ Übungsaufgaben mit der Struktur der Prüfung
- ✓ Interaktives Training

PDF

Inhalt

Abiturprüfung 2026

Aufgaben .... **www.stark-verlag.de/mystark**
Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2026 freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, können Sie das PDF auf der Plattform MySTARK herunterladen (Zugangscode vorne im Buch).

Bei **MySTARK** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A, inklusive **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen, teilweise mit Veranschaulichung durch Videos
- **Jahrgang 2026**, sobald dieser zum Download bereit steht
- **Jahrgänge 2019 bis 2023**

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Autoren:

Dr. Hubert Langlotz, Wutha-Farnroda (Übungsaufgaben für Teil A: Serie 1, Aufgaben 4 bis 10; Serie 2, Aufgaben 4, 7 bis 10; Serie 3, Aufgaben 4, 9, 10; Übungsaufgaben für B3; 2024: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1, 4, 5, 9, 10], B1 [Teilaufgaben 1e und 2], B3; 2025: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B1 [Teilaufgabe 2], B3; 2026: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B1 [Teilaufgabe 2], B3)
Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau (Übungsaufgaben für Teil A: Serie 1, Aufgaben 1 bis 3; Serie 2, Aufgaben 1, 2, 3, 5, 6; Serie 3, Aufgaben 1, 2, 3, 5 bis 8; Übungsaufgaben für B1 und B2; 2024: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 2, 3, 6, 7, 8], B1 [Teilaufgaben 1a bis d], B2; 2025: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 6 bis 10], B1 [Teilaufgabe 1], B2; 2026: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 6 bis 10], B1 [Teilaufgabe 1], B2)

Vorwort

Liebe Abiturientinnen und Abiturienten,

dieses Buch hilft Ihnen, sich frühzeitig und umfassend auf die schriftliche **Abiturprüfung 2027 im Fach Mathematik** mit erhöhtem Anforderungsniveau vorzubereiten. Dazu enthält es neben den **Prüfungsaufgaben der Jahre 2024 und 2025** speziell auf die Struktur der Prüfung mit Computeralgebrasystem (CAS) abgestimmte **Übungsaufgaben** sowohl für den hilfsmittelfreien Teil wie auch für alle anderen Aufgaben. Diese Übungsaufgaben berücksichtigen die Vorgaben des neuen Lehrplans. Wenn Sie anhand dieser Aufgaben die Prüfungssituation „durchspielen", sollten Sie sich sowohl an der vorgegebenen Bearbeitungszeit orientieren als auch die Situation des „Auswählen-Müssens" von bestimmten Aufgaben berücksichtigen. Die **Aufgaben des Jahres 2026** stehen Ihnen außerdem als PDF zum Download zur Verfügung, sobald sie zur Veröffentlichung freigegeben sind. Auf der Plattform MySTARK finden Sie zudem die **Prüfungsaufgaben der Jahre 2019 bis 2023**.

Die Bildschirmausdrucke im Lösungsteil wurden mit einem TI-NspireCX CAS erstellt. Sie sind aber in den meisten Fällen jeweils in annähernd gleicher Weise mit einem anderen CAS reproduzierbar. In vielen Fällen wurde die Möglichkeit genutzt, **alternative Lösungsvorschläge** darzustellen, die zum Teil die verschiedenen Möglichkeiten des digitalen Werkzeugs aufzeigen oder aber ganz ohne Hilfsmittel auskommen.

Weiter finden Sie zusätzliche **Hinweise und Tipps**, die zwischen den Aufgaben und Lösungen stehen und für jede Teilaufgabe ausgearbeitet sind. Diese liefern Denkanstöße zur Lösung und sind nach zunehmendem Grad der Hilfestellung geordnet. Sollten Sie bei einer Aufgabe also keinen eigenen Lösungsansatz finden, so lesen Sie zunächst den **ersten Tipp** zu der entsprechenden Teilaufgabe und verdecken die weiteren Tipps mit einem Blatt. Denken Sie über den Tipp nach und versuchen Sie nun selbst einen Ansatz zu schaffen. Sollten Sie gar nicht weiterkommen, dann lesen Sie den **nächsten Tipp** usw. Schlagen Sie in der Lösung erst nach, wenn Sie mit allen zu der Aufgabe gehörenden Tipps nicht weiterkommen. Im Lösungsteil werden zudem ausführliche **Hinweise** gegeben, die Ihnen die vorgerechnete **Lösung erläutern und erklären**, sodass Sie die Lösung selbstständig nachvollziehen und verstehen können. Bei der Lösungsdarstellung werden teilweise auch alternative Lösungswege aufgezeigt, damit Sie Ihre angefertigte Lösung korrigieren können und um zu zeigen, dass es oft eine Vielfalt von mathematischen Lösungsansätzen gibt.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2027 vom Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
http://www.stark-verlag.de/mystark

Viel Erfolg!

Ihr Autorenteam

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Ablauf der Prüfung

Im Freistaat Thüringen gibt es im Fach Mathematik für Kurse mit erhöhtem Anforderungsniveau ein zentrales schriftliches Abitur. Die Aufgaben werden durch eine Abituraufgabenkommission erstellt, in der erfahrene Lehrkräfte mitarbeiten. Die im Zusammenhang mit dem Abituraufgabenpool der Länder veröffentlichte Aufgabensammlung für Mathematik dient als Orientierung für die Weiterentwicklung der Aufgabenformate und Anforderungen in der Abiturprüfung in Thüringen. Sie finden sie im Internet unter:
www.iqb.hu-berlin.de/de/schule/aufgaben/sekii/abiturpruefungsaufgaben-mathematik

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die Abiturprüfung hatte in den vorigen Jahren bis einschließlich zum **Jahr 2023** folgende Struktur:

Teil A: hilfsmittelfreier Teil aus allen Lernbereichen (40 BE)
Teil B: Analysis (40 BE)
Teil C1: Geometrie (25 BE), Stochastik (15 BE)
Teil C2: Stochastik (25 BE), Geometrie (15 BE)

Für den Prüfungsteil A war ein Arbeitsblatt, das die Aufgaben sowie zu vervollständigende Koordinatensysteme und Platz für die Lösungen enthielt, vorgesehen. Nur die Teile B und C1 bzw. C2 konnten mit CAS bearbeitet werden.
Der Prüfungsteil A bestand aus acht Aufgaben, die von allen Prüflingen bearbeitet werden mussten; in den Jahren 2021 und 2022 bestand er aus zehn Aufgaben, von denen acht zu bearbeiten waren. Im Prüfungsteil B waren immer alle Teilaufgaben zu bearbeiten. Im Prüfungsteil C konnte zwischen C1 und C2 gewählt werden; in den Jahren 2021 und 2022 gab es zusätzlich die Möglichkeit, nur die Aufgaben zur Vektorrechnung/Analytischen Geometrie (C1 Aufgabe 1 und C2 Aufgabe 2) oder nur die zur Stochastik (C1 Aufgabe 2 und C2 Aufgabe 1) zu lösen.

Im **Jahr 2024** hatte die Prüfung folgende Struktur:

Teil A: hilfsmittelfreier Teil aus allen Lernbereichen (30 BE)
Teil B1: Analysis (40 BE)
Teil B2: Analytische Geometrie (25 BE)
Teil B3: Stochastik (25 BE)

Der Prüfungsteil A bestand aus einem Pflichtteil mit vier Aufgaben der Aufgabengruppe 1 (zweimal Analysis und je einmal Analytische Geometrie und Stochastik) sowie einem Wahlteil mit sechs Aufgaben der Aufgabengruppe 2 (jeweils zweimal Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik). In jeder Aufgabe waren 5 BE erreichbar. Die Aufgaben der Aufgabengruppe 1 waren den Anforderungsbereichen I und II (siehe Seite V) zuzuordnen, die Aufgaben der Aufgabengruppe 2 erreichten zumindest in einer Teilaufgabe den Anforderungsbereich III.

Der Pflichtteil war vollständig zu bearbeiten, aus dem Wahlteil waren zwei Aufgaben nach Wahl des Prüflings zu bearbeiten. Beide Aufgaben konnten aus demselben Sachgebiet gewählt werden. Im Prüfungsteil B waren alle drei Aufgaben B1, B2 und B3 zu lösen.

Seit dem **Jahr 2025** hat die Prüfung zwar dieselbe Struktur wie im Jahr 2024, aber die maximal erreichbaren Bewertungseinheiten haben sich im Prüfungsteil B geändert:
Teil A: hilfsmittelfreier Teil aus allen Lernbereichen (30 BE)
Teil B1: Analysis (30 BE)
Teil B2: Analytische Geometrie (20 BE)
Teil B3: Stochastik (20 BE)

Dauer der Prüfung

Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 300 Minuten. Jeder Prüfling entscheidet selbst über den Zeitpunkt, zu dem er die Bearbeitung zum Prüfungsteil A abgibt und die Hilfsmittel erhält. Dieser Zeitpunkt muss innerhalb der ersten 110 Minuten nach Prüfungsbeginn liegen.

Zugelassene Hilfsmittel

In Teil A dürfen außer Zeichengeräten keine weiteren Hilfsmittel verwendet werden. In Teil B kann das Dokument für mathematische Formeln sowie ein Computeralgebrasystem (CAS), das im Unterricht eingesetzt wurde, genutzt werden. Dieses Formeldokument steht in der Mediothek des Thüringer Schulportals (TSP) zum Download zur Verfügung:
www.schulportal-thueringen.de/web/guest/media/detail?tspi=16426

2 Inhalte und Schwerpunktthemen

Die verbindlichen Lehrplanvorgaben, nach denen in den vier Kurshalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen die inhaltlichen Anforderungen. Die Binomialverteilung einschließlich der Sigma-Regeln und deren Anwendungen spielen nach dem veränderten Lehrplan eine größere Rolle. Unter
www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=18835
finden Sie eine ausführliche Darstellung des weiterentwickelten Lehrplans für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik. Eine (nicht ganz vollständige) Übersicht über wichtige, abiturrelevante Kompetenzen dieses Lehrplans ist nachstehend aufgeführt.

Analysis – Sach- und Methodenkompetenz

Die Lernenden können
- den Differenzenquotienten als die durchschnittliche Änderungsrate innermathematisch und im Sachzusammenhang ermitteln und geometrisch als Sekantenanstieg interpretieren,
- Grenzwerte auf der Grundlage eines anschaulichen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitungen nutzen,
- die Ableitung einer Funktion als Differenzialquotient und als lokale Änderungsrate beschreiben, erläutern und geometrisch als Tangentenanstieg interpretieren sowie mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen aus der Anschauung heraus deuten,
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitungsfunktion erkennen, begründen und darstellen sowie den Graphen der Ableitungsfunktion aus dem Funktionsgraphen und umgekehrt bestimmen,

Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2025
Prüfungsteil B1: Analysis

1. Gegeben ist für jede positive reelle Zahl k eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_k.

   $f_k(x) = k \cdot x^3 + 2 \cdot k \cdot x^2 - 1$

   a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen von f_k und weisen Sie deren Art nach.
   Beschreiben Sie den Einfluss von k auf die Koordinaten dieser Punkte.
   [Kontrollergebnis: $H_k\left(x_H \,\middle|\, \frac{32}{27}k - 1\right)$] (6 BE)

   b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k, ohne die Nullstellen zu berechnen. (4 BE)

   c) Berechnen Sie den kleinsten Anstieg aller Tangenten an den Graphen von f_k in Abhängigkeit von k. (3 BE)

   d) Die Graphen der Funktionen f_5 und f_{10} begrenzen eine Fläche A vollständig.
   Berechnen Sie einen Wert für k, für den die von den Graphen der Funktionen f_5 und f_k vollständig eingeschlossene Fläche den doppelten Flächeninhalt der Fläche A besitzt. (5 BE)

2. Bei einer Operation wird für die Narkose ein Medikament verwendet, das im Laufe der Zeit vom Körper abgebaut wird. Die Restmenge des Medikaments in Milligramm, die nach t Minuten im Körper einer Patientin noch vorhanden ist, kann bis zum Zeitpunkt des Aufwachens durch die Funktion m mit

   $m(t) = m_0 \cdot e^{-0{,}0173 \cdot t}$

   beschrieben werden. Dabei gibt m_0 die Menge des Medikaments in Milligramm zum Zeitpunkt $t = 0$ im Körper der Patientin an. Die Patientin wacht auf, wenn die Restmenge des Medikaments im Körper 0,5 mg beträgt.

   a) Berechnen Sie den Wert des Terms $\frac{m_0 - m(30)}{m_0}$ und interpretieren Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang. (3 BE)

   b) Berechnen Sie die Mindestmenge des Medikaments, die sich zu Beginn einer einstündigen Narkose im Körper befinden müsste. (2 BE)

Zu Beginn der Narkose befinden sich 2 mg des Medikaments im Körper der Patientin.

   c) Stellen Sie die Restmenge des Medikaments in Abhängigkeit von der Zeit für die Dauer der Narkose graphisch dar. (2 BE)

   d) Um die Dauer der Narkose zu verlängern, wird eine Stunde nach Beginn der Narkose nochmals 1 mg des Medikaments direkt verabreicht. Ab dem Zeitpunkt des Aufwachens wird das Medikament linear mit der zum Zeitpunkt des Aufwachens vorliegenden Abbaurate des Medikaments abgebaut.
   Ermitteln Sie die Zeitdauer vom Aufwachen bis zum Zeitpunkt, zu dem das Medikament im Körper vollständig abgebaut ist. (5 BE)

(30 BE)

Hinweise und Tipps

Aufgabe 1 a

- Nutzen Sie zur Berechnung der Koordinaten der lokalen Extrempunkte die notwendige und die hinreichende Bedingung für die Existenz lokaler Extrempunkte.
- Beachten Sie, dass $k > 0$ vorgegeben ist.
- Beschreiben Sie die Lage der Extrempunkte in Abhängigkeit des Parameters k.
- Sie können sich die Lage dieser Punkte mithilfe der grafischen Darstellung einiger Vertreter der Kurvenschar veranschaulichen.

Aufgabe 1 b

- Nutzen Sie die zur vorigen Teilaufgabe empfohlene grafische Darstellung, um sich ein Bild von der Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von k zu machen.
- Es ist offensichtlich, dass die Lage des Hochpunkts H_k auf der Senkrechten $x = -\frac{4}{3}$ die Anzahl der Nullstellen bestimmt.
- Überlegen Sie, von welchen Werten für k die Anzahl der Nullstellen abhängt. Nutzen Sie dazu den Term für die y-Koordinate des Hochpunkts.

Aufgabe 1 c

- Der Wert der 1. Ableitung einer Funktion f_k an einer Stelle x gibt den Anstieg der Tangente an den Graphen von f_k an dieser Stelle an.
- Sucht man den kleinsten Tangentenanstieg, dann muss man das lokale Minimum von f_k' bestimmen.
- Nutzen Sie zur Berechnung der Koordinaten des lokalen Minimums von f_k' die notwendige Bedingung ($f_k''(x) = 0$) und die hinreichende Bedingung ($f_k'''(x_e) \neq 0$) für die Existenz lokaler Extrempunkte.

Aufgabe 1 d

- Veranschaulichen Sie den Sachverhalt für die Fläche A durch eine grafische Darstellung.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt A der Fläche, den die Graphen von f_{10} und f_5 einschließen, mit dem bestimmten Integral.
- Die Integrationsgrenzen sind die Schnittstellen der beiden Funktionen.
- Nach dem gleichen Muster lässt sich der Wert von k bestimmen, für den der Flächeninhalt der Fläche, die von den Graphen von f_k und f_5 eingeschlossen wird, doppelt so groß ist wie A:
  - Schnittstellen von f_k und f_5 bestimmen.
  - Integralansatz für die Fläche mit dem Inhalt $2 \cdot A$, um k zu berechnen.

Aufgabe 2 a

- Speichern Sie die Funktion m in Ihrem CAS. Beachten Sie dabei, dass „e“ die Euler’sche Zahl ist. Berechnen Sie den Quotienten mit dem CAS.
- Der zu berechnende Quotient kann als ein Verhältnis interpretiert werden.

Aufgabe 2 b

- Berücksichtigen Sie, dass nach 60 Minuten Narkose noch 0,5 mg des Medikaments im Körper sein sollen.

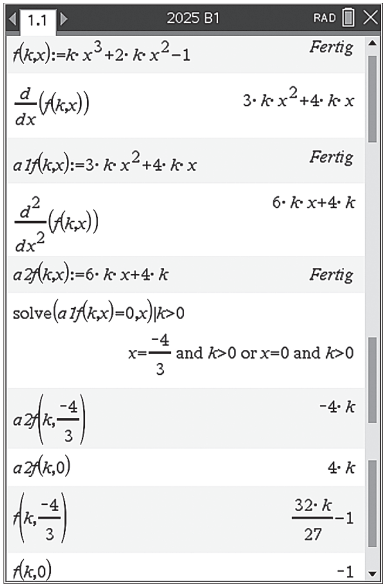
Lösungen

1. a) **Lokale Extrempunkte**

Der Funktionsterm von $f_k(x)$ wird auf dem CAS-Rechner gespeichert und die Ableitungen f_k' und f_k'' werden gebildet:

$f_k'(x) = 3k \cdot x^2 + 4k \cdot x$

$f_k''(x) = 6k \cdot x + 4k$



Achten Sie darauf, zunächst die Terme der Ableitungsfunktionen zu bilden, ehe Sie diese unter geeigneten Variablen als Gleichung speichern.

Notwendige Bedingung: Die Nullstellen von f_k' werden unter Beachtung von $k > 0$ berechnet. Lösen von $3k \cdot x^2 + 4k \cdot x = 0$ ergibt $x_{e_1} = -\frac{4}{3}$ und $x_{e_2} = 0$. Dies sind die möglichen Extremstellen.

Hinreichende Bedingung: Wegen $k > 0$ ist der Wert $f_k''\left(-\frac{4}{3}\right) = -4k$ stets negativ. An der Stelle $x_{e_1} = -\frac{4}{3}$ liegt ein lokales Maximum vor. Wegen $k > 0$ ist der Wert $f_k''(0) = 4k$ stets positiv. An der Stelle $x_{e_2} = 0$ liegt ein lokales Minimum vor.

Berechnung der Funktionswerte an den Extremstellen:

$$f_k\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{27}k - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Lokaler Hochpunkt } \underline{\underline{H_k\left(-\frac{4}{3} \,\middle|\, \frac{32}{27}k - 1\right)}}$$

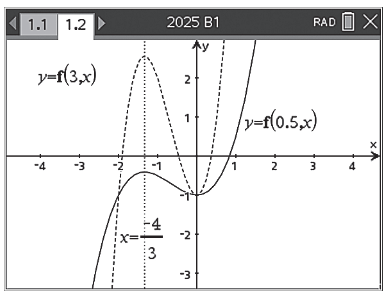
$$f_k(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{Lokaler Tiefpunkt } \underline{\underline{T(0 \mid -1)}}$$

Einfluss des Parameters k

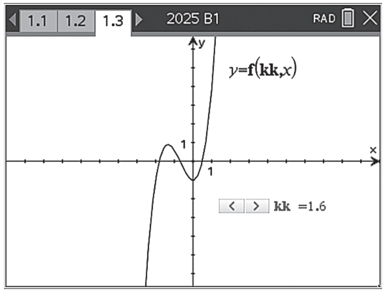
Der Parameter k hat keinen Einfluss auf die Lage des lokalen Tiefpunkts; dieser liegt immer bei $T(0 \mid -1)$. Der Parameter k hat auch keinen Einfluss auf die x-Koordinate des lokalen Hochpunkts; diese ist stets $x_{e_1} = -\frac{4}{3}$.

Die Lage des lokalen Hochpunkts in y-Richtung hängt allerdings vom Parameter k ab: Er liegt auf der Geraden mit der Gleichung $x = -\frac{4}{3}$ und hat den y-Wert $y_k = \frac{32}{27}k - 1$.

Veranschaulichen Sie sich dies zur Selbstkontrolle (ist nicht als Aufgabenstellung verlangt).

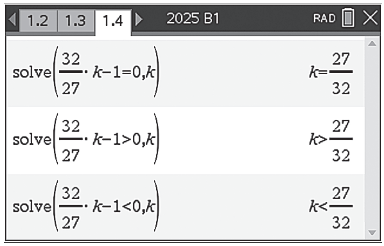


Eine Darstellung mit Schieberegler ist ebenfalls denkbar. Hier sollte die Variable für den Parameter k aber umbenannt werden, z. B. in **kk**, damit es nicht zu Kollisionen bei später eventuell notwendigen Rechnungen kommt.



b) Wenn der Hochpunkt H_k auf der Senkrechten $x = -\frac{4}{3}$ und gleichzeitig direkt auf der x-Achse liegt, dann gibt es **zwei Nullstellen**. Die y-Koordinate des Hochpunkts muss dazu den Wert null haben:

$$\frac{32}{27}k - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k = \frac{27}{32}}}$$



Wenn der Hochpunkt H_k auf der Senkrechten $x = -\frac{4}{3}$ und gleichzeitig oberhalb der x-Achse liegt, dann gibt es **drei Nullstellen**. Die y-Koordinate des Hochpunkts muss dazu größer als null sein:

$$\frac{32}{27}k - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k > \frac{27}{32}}}$$

Wenn der Hochpunkt H_k auf der Senkrechten $x = -\frac{4}{3}$ und gleichzeitig unterhalb der x-Achse liegt, dann gibt es **genau eine Nullstelle**. Die y-Koordinate des Hochpunkts muss dazu kleiner als null sein:

$$\frac{32}{27}k - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k < \frac{27}{32}}}$$

c) Für die notwendige Bedingung muss die Nullstelle von $f_k''(x) = 6k \cdot x + 4k$ unter Beachtung von $k > 0$ berechnet werden: Die Nullstelle hat den Wert $x = -\frac{2}{3}$.

Die 3. Ableitung $f_k'''(x) = 6k$ ist für $k > 0$ immer positiv. Daher liegt an der Stelle $x = -\frac{2}{3}$ ein lokales Minimum vor.

Der Wert $f_k'\left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{-\frac{4}{3}k}}$ beschreibt den kleinsten Anstieg aller Tangenten an den Graphen von f_k.