2027

>30 Millionen
bestandene
Prüfungen

50 Jahre STARK

STARK
Prüfung

MEHR
ERFAHREN

Abitur

Berlin/Brandenburg

Mathematik GK

✓ Original-Prüfungsaufgaben
✓ Ausführliche Lösungen
✓ Interaktives Training

PDF

Inhalt

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2027

Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Jahrgang 2025

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, können Sie das PDF auf der Plattform MySTARK herunterladen. Den Zugangscode finden Sie vorne in diesem Buch.

Autoren:

Dr. Detlef Launert:
Lösungen zur Abiturprüfung 2023, Aufgaben 1 und 2.1
Lösungen zur Abiturprüfung 2025
Lösungen zur Abiturprüfung 2026 von Brandenburg, Aufgaben 1, 2.1 und 2.2

Lauri Lehmann:
Lösungen zur Abiturprüfung 2023, Aufgaben 2.2 und 3

Harmut Müller-Sommer
Lösungen zur Abiturprüfung 2022 Aufgaben 3 und 4 (Anteile)

Markus Porzelt:
Lösungen zur Abiturprüfung 2023, Aufgabe 4
Lösungen zur Abiturprüfung 2024
Lösungen zur Abiturprüfung 2026 von Brandenburg, Aufgaben 3 und 4

Redaktion
Lösungen zur Abiturprüfung 2022

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2027** für den **Grundkurs in Berlin/Brandenburg** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das **Abitur 2027**. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.
- Der zweite Teil beinhaltet die **Original-Prüfungsaufgaben 2022 bis 2025**. Die **Original-Prüfung 2026** von Brandenburg steht Ihnen auf der **Plattform MySTARK** zum Download zur Verfügung. Mit diesen Aufgaben können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Der Zugangscode vorne in diesem Buch ermöglicht es Ihnen, Aufgaben im Rahmen eines **Online-Prüfungstrainings zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** interaktiv zu lösen.
- Die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.
- Zu allen Original-Prüfungsaufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die es Ihnen ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2027 durch die zuständigen Landesinstitute von Berlin und Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls auf der Plattform MySTARK. Den Zugangscode finden Sie vorne im Buch.

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2027

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

Die Grundlagen für die von Ihnen zu bearbeitenden Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe (für Berlin in der Ausgabe von 2021 mit dem Fachteil C Mathematik in der Fassung von 2014 und für Brandenburg in der Ausgabe von 2022) und die Bildungsstandards der KMK für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den im oben genannten Rahmenlehrplan beschriebenen bzw. aufgelisteten abschlussorientierten Standards.

Prüfungsrelevante Themen

Die Prüfungsaufgaben im Fach Mathematik basieren auf dem **Kerncurriculum**. Folgende zusätzliche Festlegungen sind dabei zu berücksichtigen:
Grundsätzlich **nicht** gefordert werden das Erläutern und Entwickeln von Beweisen.
Zudem **nicht** gefordert wird die Nutzung von Grenzwerten bei der Bestimmung von Ableitung oder Integral sowie Simulationen.

Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A**, den hilfsmittelfreien Aufgaben, stehen die Aufgaben und ihre Teilaufgaben in keinem übergeordneten Zusammenhang. Zumeist handelt es sich um kurze Aufgabenstellungen. Der Prüfungsteil A besteht aus zwei Aufgabengruppen.

- Aufgabengruppe 1 besteht aus 6 Aufgaben, von denen 4 bearbeitet werden müssen. Das Aufgabenniveau entspricht den Anforderungsbereichen I und II.
- Aufgabengruppe 2 besteht aus 3 Aufgaben, von denen 1 Aufgabe bearbeitet werden muss. Dabei ist mindestens eine Teilaufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Im **Prüfungsteil B** (mit Hilfsmitteln) ist jede Aufgabenstellung als strukturierte, inhaltlich zusammenhängende Aufgabe konstruiert, die in mehrere Teilaufgaben untergliedert ist. Jede dieser Aufgaben enthält entsprechende Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen. Üblicherweise beginnen die Aufgaben mit den dem Anforderungsbereich I zugeordneten Grundaufgaben. Es empfiehlt sich immer, die Aufgabe zunächst vollständig zu lesen, da Zwischenergebnisse gelegentlich auch in nachfolgenden Aufgabenteilen enthalten sein können.

Die Wahlmöglichkeiten sind in folgender Tabelle dargestellt:

Prüfungsteil A Aufgabengruppe 1	**hilfsmittelfrei** 3 Aufgaben verpflichtend und aus den weiteren 3 Aufgaben muss noch 1 ausgewählt werden
Prüfungsteil A Aufgabengruppe 2	**hilfsmittelfrei** 3 Aufgaben, von denen 1 ausgewählt werden muss
Prüfungsteil B	**mit Hilfsmitteln** 2 Aufgaben aus dem Bereich Analysis, von denen 1 ausgewählt werden muss; jeweils 1 Aufgabe aus dem Bereich Analytische Geometrie und Stochastik, welche beide bearbeitet werden müssen

Für die Bearbeitung der Prüfungsaufgaben stehen insgesamt **285 Minuten** zur Verfügung. Davon können maximal 100 Minuten für den Prüfungsteil A verwendet werden. Zudem beinhaltet die Gesamtarbeitszeit eine individuelle Lese- und Auswahlzeit, in denen die Aufgaben gelesen werden können und eine Wahl zwischen den Aufgaben getroffen werden kann. Die in den Prüfungsteilen A und B gewählten Aufgaben sind auf dem Deckblatt eindeutig zu markieren.

2023 und **2022** galten aufgrund der Coronapandemie **Ausnahmeregelungen**:

- Der hilfsmittelfreie Teil bestand aus 3 **verpflichtenden** Aufgaben aus dem Bereich der Analysis und die Lehrkraft wählte **zusätzlich** entweder 2 Aufgaben Analytische Geometrie **oder** 2 Aufgaben Stochastik aus.
- Im nicht hilfsmittelfreien Teil mussten beide Aufgaben aus dem Bereich der Analysis bearbeitet werden und die Lehrkraft wählte wiederum **zusätzlich** die Aufgabe Analytische Geometrie **oder** die Aufgabe Stochastik aus.
- Die Bewertungseinheiten und Aufgabenstellungen wurden entsprechend angepasst.

Für die Frage, welche **Hilfsmittel** bei der Prüfung zugelassen sind, ist entscheidend, ob die Abiturprüfung ohne oder mit Verwendung eines Modularen Mathematiksystems (MMS) bearbeitet wird. Grundsätzlich sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen (nur im Prüfungsteil B).

Für die Bearbeitung **ohne MMS** ist im Prüfungsteil B außerdem ein Taschenrechner zugelassen, der nicht programmierbar und nicht grafikfähig ist und nicht über die Möglichkeit der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügt.

Für die Bearbeitung **mit MMS** wird im Prüfungsteil B das in der Schule eingeführte MMS-Rechengerät verwendet. Grundsätzlich gilt, dass die Benutzung weiterer Software über das MMS hinaus nicht zugelassen ist.

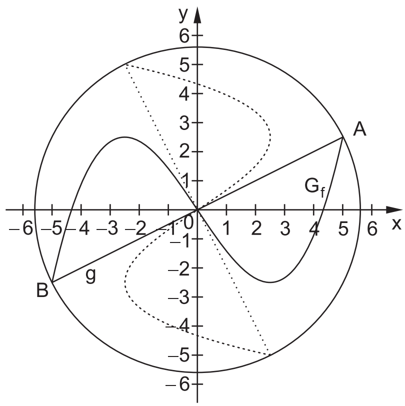
Windrad BE

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{25}x^3 - \frac{3}{2}x$.
Der Graph von f heißt G_f.

a) Weisen Sie nach, dass der Graph G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist. Bestimmen Sie die Nullstellen von f. 5

b) Der Graph G_f hat genau zwei Extrempunkte.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Extrempunkte.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Extrempunkte von G_f die Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten ist. 7

In einem Malbuch für Kinder wird ein Windrad abgebildet. Zur Modellierung zweier Flügel dieses Windrades werden der Graph G_f und die Gerade g mit $g(x) = \frac{1}{2}x$ im Intervall [–5; 5] verwendet.
Dreht man diese beiden Flügel um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung, so erhält man die anderen beiden Flügel (siehe Abbildung).
Die durch die Drehung der Geraden g entstandene Gerade heißt g*, die Endpunkte der Flügel auf dieser Geraden heißen A* bzw. B*. Der Punkt A(5 | 2,5) ist der Schnittpunkt von G_f mit g und liegt auf dem abgebildeten Kreis.



c) Begründen Sie, dass für g* gilt: $g^*(x) = -2x$.
Der Punkt A* geht durch die Drehung aus dem Punkt A hervor.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes A* an. 3

d) Betrachtet wird die Tangente k an G_f im Punkt $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2} \,\middle|\, 0\right)$. Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Tangente k. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage wahr ist:
Für den Schnittwinkel α von k und g gilt: sin(α) = cos(α). 5

e) Im Zusammenhang mit dem Windrad gibt es zwei Flächen: A_1 und A_2.
Für den Inhalt der Fläche A_1 gilt: $A_1 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 \pi$.
Der Inhalt der Fläche A_2 kann mit der Gleichung $A_2 = 4 \cdot \int_0^5 (g(x) - f(x))\,dx$ berechnet werden.
Veranschaulichen Sie die Fläche $A_1 - A_2$ in der Abbildung.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche $A_1 - A_2$. 5

25

Tipps und Hinweise zur Lösung von Aufgabe 2.1

Tipps zu Teilaufgabe a

- Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(x) = -f(-x)$ Wenden Sie diese Bedingung auf die gegebene Funktionsgleichung an.
- Eine Nullstelle x_0 der Funktion f liegt genau dann vor, wenn $f(x_0) = 0$.
- Nutzen Sie den Satz des Nullprodukts.

Tipp zu Teilaufgabe b

- Die notwendige Bedingung für Extremstellen lautet: $f'(x) = 0$
- Überlegen Sie mithilfe der Aufgabenstellung, weshalb die hinreichende Bedingung für Extremstellen nicht überprüft werden muss.
- Vergessen Sie nicht, die y-Koordinaten der Extrempunkte zu berechnen.
- Die allgemeine Geradengleichung lautet: $y = mx + n$
- Bestimmen Sie den Anstieg der Geraden durch die Extrempunkte mittels $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Den Wert des Parameters n erhalten Sie, indem Sie die Koordinaten eines der Extrempunkte in die Gleichung der Gerade einsetzen.
- Die Gleichung der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten lautet: $y = -x$

Tipp zu Teilaufgabe c

- Verlaufen zwei Geraden senkrecht zueinander, so entspricht der Anstieg der einen Gerade dem negativen Kehrwert des Anstiegs der anderen Geraden.
- Verwenden Sie die Abbildung, um die Koordinaten des Punktes A* zu bestimmen.

Tipps zu Teilaufgabe d

- Für den Steigungswinkel einer Geraden mit dem Anstieg m gilt: $\tan(\alpha) = m$
- Der Schnittwinkel zwischen den Geraden ergibt sich aus der Differenz der beiden Steigungswinkel der Geraden.

Tipp zu Teilaufgabe e

- Überlegen Sie zunächst, welche Flächen A_1 und A_2 beschreiben.
- Analysieren Sie die Struktur des Terms von A_1 und bestimmen Sie, welche Flächeninhaltsformel verwendet wurde.
- Im Term A_2 wird das Integral einer Differenzfunktion berechnet. Beachten Sie die Integrationsgrenzen und überlegen Sie insbesondere, welche Bedeutung der Faktor „4“ im Sachzusammenhang hat.
- Es ist ausreichend, wenn Sie die Fläche $A_1 - A_2$ in der Abbildung markieren. Erläuterungen sind nicht notwendig.
- Berechnen Sie zunächst die Fläche A_2. Setzen Sie dazu die Funktionsterme von f(x) und g(x) in den gegebenen Term ein. Berechnen Sie anschließend die Differenz $A_1 - A_2$.

Lösungen zu Aufgabe 2.1

a) Punktsymmetrie liegt vor, wenn gilt: $f(x) = -f(-x)$

$$f(x) = \frac{2}{25}x^3 - \frac{3}{2}x$$

$$f(-x) = \frac{2}{25}(-x)^3 - \frac{3}{2}(-x) = -\frac{2}{25}x^3 + \frac{3}{2}x$$

$$-f(-x) = \frac{2}{25}x^3 - \frac{3}{2}x = f(x)$$

Der Graph von f ist daher punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
x_0 ist Nullstelle von f, wenn gilt: $f(x_0) = 0$

$$\frac{2}{25}x^3 - \frac{3}{2}x = 0$$

$$x\left(\frac{2}{25}x^2 - \frac{3}{2}\right) = 0$$

Mit dem Satz des Nullprodukts folgt:

$$x_1 = \underline{\underline{0}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{2}{25}x^2 - \frac{3}{2} = 0$$

Auflösen der quadratischen Gleichung nach x:

$$\frac{2}{25}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \qquad \Big| + \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{25}x^2 = \frac{3}{2} \qquad \Big| \cdot \frac{25}{2}$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{2}$$

$$x^2 = \frac{75}{4} \qquad \Big| \sqrt{}$$

$$x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{75}{4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{75} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot 25} = \underline{\underline{\pm\frac{5}{2}\sqrt{3}}}$$

Die Nullstellen von f(x) sind $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{5}\sqrt{3}$ und $x_3 = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

b) Die erste Ableitung der Funktion f(x) lautet:

$$f'(x)=\frac{6}{25}x^2-\frac{3}{2}$$

Notwendige Bedingung für die Existenz von Extrema: $f'(x)=0$

$$\frac{6}{25}x^2-\frac{3}{2}=0 \qquad \Big| +\frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{25}x^2=\frac{3}{2} \qquad \Big| \cdot\frac{25}{6}$$

$$x^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{25}{6}$$

$$x^2=\frac{25}{4}$$

$$x_{E_{1/2}}=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\underline{\underline{\pm\frac{5}{2}}}$$

Da in der Aufgabenstellung bereits mitgeteilt wird, dass genau zwei lokale Extrema existieren, muss die hinreichende Bedingung für die Existenz von Extrema nicht geprüft werden.

Berechnung der y-Koordinaten der Extrempunkte:

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{25}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{2}{25}\cdot\frac{125}{8}-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{4}-\frac{15}{4}=-\frac{10}{4}=\underline{\underline{-\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E_1\left(\frac{5}{2}\;\middle|\;-\frac{5}{2}\right)}}$$

Wegen der Punktsymmetrie des Graphen muss gelten:

$$\underline{\underline{E_2\left(-\frac{5}{2}\;\middle|\;\frac{5}{2}\right)}}$$

Die allgemeine Geradengleichung lautet $y=mx+n$. Für den Anstieg der Geraden w durch die Punkte E_1 und E_2 gilt:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{5}{2}-\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{10}{2}}{-\frac{10}{2}}=-1$$

$$\Rightarrow y=-x+n$$

Der Punkt $E_1\left(\frac{5}{2}\;\middle|\;-\frac{5}{2}\right)$ liegt auf der Geraden, damit erhält man den Wert des Parameters n:

$$-\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}+n \quad\Rightarrow\quad n=0$$

Die Gleichung der Geraden durch die Punkte E_1 und E_2 lautet damit:

$$w:\; \underline{\underline{y=-x}}$$

Dies ist die Gleichung der Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten.

c) Für die Gerade g gilt: $g(x) = \frac{1}{2}x$

Da $g^* \perp g$ gilt:

$$m_{g^*} = -\frac{1}{m_g}$$

Damit folgt:

$$g^*(x) = -\frac{1}{\frac{1}{2}}x = \underline{\underline{-2x}}$$

Da A(5 | 2,5), gilt $\underline{\underline{A^*(-2{,}5 \mid 5)}}$.

d) Den Steigungswinkel β der Tangente k an der Stelle $x = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ erhält man aus dem Anstieg von f an dieser Stelle.

$$m_k\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{6}{25}\cdot\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{6}{25}\cdot\frac{25}{4}\cdot 3 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Es gilt allgemein $\tan\beta = m$, für den Steigungswinkel β folgt also:

$$\beta = \tan^{-1}(3) \approx \underline{\underline{71{,}57°}}$$

Der Schnittwinkel α zwischen der Geraden g mit $g(x) = \frac{1}{2}x$ und der Tangente k mit $k(x) = 3x + n$ ergibt sich aus der Differenz der Steigungswinkel dieser Geraden.
Für den Steigungswinkel von g gilt:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26{,}57°$$

Damit folgt für den Schnittwinkel α:

$$\alpha = 71{,}57° - 26{,}57° = 45°$$

$$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Die Aussage ist wahr.

e) Der Skizze kann man entnehmen, dass das Integral $\int_0^5 (g(x) - f(x))\,dx$ den Flächeninhalt des Flügels im I. und IV. Quadranten beschreibt.

Dann beschreibt $A_2 = 4\cdot\int_0^5 (g(x) - f(x))\,dx$ den Flächeninhalt aller 4 Flügel des Windrades.

$A_1 = \left(\frac{5}{2}\sqrt{5}\right)^2\pi = r^2\pi = \pi r^2$ mit $r = \frac{5}{2}\sqrt{5}$ ist der Inhalt der Kreisfläche, in der das Windrad einbeschrieben ist.