2027

>30 Millionen bestandene Prüfungen

50 Jahre STARK

STARK Prüfung

MEHR ERFAHREN

Abitur

Berlin/Brandenburg

Mathematik LK

- ✓ Original-Prüfungsaufgaben
- ✓ Ausführliche Lösungen
- ✓ Interaktives Training

PDF

Inhalt

Jahrgang 2025

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, können Sie das PDF auf der Plattform MySTARK herunterladen. Den Zugangscode finden Sie vorne in diesem Buch.

Autoren:

Dr. Detlef Launert:
Lösungen zur Abiturprüfung 2022, Aufgaben 1, 2.1 und 2.2
Lösungen zur Abiturprüfung 2024, Aufgaben 1, 2.1 und 2.2
Lösungen zur Abiturprüfung 2026 von Brandenburg, Aufgaben 1, 2.1 und 2.2

Lauri Lehmann:
Lösungen zur Abiturprüfung 2022, Aufgaben 3 und 4

Markus Porzelt
Lösungen zur Abiturprüfung 2023
Lösungen zur Abiturprüfung 2024, Aufgaben 3 und 4
Lösungen zur Abiturprüfung 2025
Lösungen zur Abiturprüfung 2026 von Brandenburg, Aufgaben 3 und 4

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2027** für den **Leistungskurs in Berlin/Brandenburg** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das **Abitur 2027**. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.
- Der zweite Teil enthält die **Original-Prüfungsaufgaben 2022 bis 2025**. Die **Original-Prüfung 2026** von Brandenburg steht Ihnen auf der **Plattform MySTARK** zum Download zur Verfügung. Mit diesen Aufgaben können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Der Zugangscode vorne in diesem Buch ermöglicht es Ihnen, Aufgaben im Rahmen eines **Online-Prüfungstrainings zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** interaktiv zu lösen.
- Die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.
- Zu allen Original-Prüfungsaufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die es Ihnen ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2027 durch die zuständigen Landesinstitute von Berlin und Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls auf der Plattform MySTARK. Den Zugangscode finden Sie vorne im Buch.

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2027

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

Die Grundlagen für die von Ihnen zu bearbeitenden Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe (für Berlin in der Ausgabe von 2021 mit dem Fachteil C Mathematik in der Fassung von 2014 und für Brandenburg in der Ausgabe von 2022) und die Bildungsstandards der KMK für die allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den im oben genannten Rahmenlehrplan beschriebenen bzw. aufgelisteten abschlussorientierten Standards.

Prüfungsrelevante Themen

Die Prüfungsaufgaben im Fach Mathematik basieren auf dem **Kerncurriculum**.
Grundsätzlich **nicht** gefordert werden das Erläutern und Entwickeln von Beweisen sowie Simulationen. Für das Land Berlin werden zudem komplexe gebrochen-rationale Funktionen nicht gefordert.

Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A**, den hilfsmittelfreien Aufgaben, stehen die Aufgaben und ihre Teilaufgaben in keinem übergeordneten Zusammenhang. Zumeist handelt es sich um kurze Aufgabenstellungen. Der Prüfungsteil A besteht aus zwei Aufgabengruppen.

- Die Aufgabengruppe 1 besteht aus 4 Aufgaben, von denen alle verpflichtend bearbeitet werden müssen. Das Aufgabenniveau entspricht den Anforderungsbereichen I und II.
- Die Aufgabengruppe 2 besteht aus 6 Aufgaben, von denen 2 Aufgaben bearbeitet werden müssen. Dabei ist mindestens eine Teilaufgabe dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

Im **Prüfungsteil B** (mit Hilfsmitteln) ist jede Aufgabenstellung als strukturierte, inhaltlich zusammenhängende Aufgabe konstruiert, die in mehrere Teilaufgaben untergliedert ist. Jede dieser Aufgaben enthält entsprechende Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen. Üblicherweise beginnen die Aufgaben mit den dem Anforderungsbereich I zugeordneten Grundaufgaben. Es empfiehlt sich immer, die Aufgabe zunächst vollständig zu lesen, da Zwischenergebnisse gelegentlich auch in nachfolgenden Aufgabenteilen enthalten sein können.

Die Wahlmöglichkeiten sind in folgender Tabelle dargestellt:

Prüfungsteil A Aufgabengruppe 1	**hilfsmittelfrei** 4 Aufgaben verpflichtend ohne Wahlmöglichkeit
Prüfungsteil A Aufgabengruppe 2	**hilfsmittelfrei** 6 Aufgaben, von denen 2 ausgewählt werden müssen
Prüfungsteil B	**mit Hilfsmitteln** 2 Aufgaben aus dem Bereich Analysis, von denen 1 ausgewählt werden muss; jeweils 1 Aufgaben aus dem Bereich Analytische Geometrie und Stochastik, welche beide bearbeitet werden müssen

Für die Bearbeitung der Prüfungsaufgaben stehen insgesamt **330 Minuten** zur Verfügung. Davon können maximal 110 Minuten für den Prüfungsteil A verwendet werden. Zudem beinhaltet die Gesamtarbeitszeit eine individuelle Lese- und Auswahlzeit, in denen die Aufgaben gelesen werden können und eine Wahl zwischen den Aufgaben getroffen werden kann. Die in den Prüfungsteilen A und B gewählten Aufgaben sind auf dem Deckblatt eindeutig zu markieren.

2023 und **2022** galten aufgrund der Coronapandemie **Ausnahmeregelungen**:

- Der hilfsmittelfreie Teil bestand aus 4 **verpflichtenden** Aufgaben aus dem Bereich der Analysis. Die Lehrkraft wählte **zusätzlich** entweder 2 Aufgaben Analytische Geometrie **oder** 2 Aufgaben Stochastik aus.
- Im nicht hilfsmittelfreien Teil mussten beide Aufgaben aus dem Bereich der Analysis. bearbeitet werden und die Lehrkraft wählte wiederum **zusätzlich** die Aufgabe Analytische Geometrie **oder** die Aufgabe Stochastik aus.
- Die Bewertungseinheiten und Aufgabenstellungen wurden entsprechend angepasst.

Für die Frage, welche **Hilfsmittel** bei der Prüfung zugelassen sind, ist entscheidend, ob die Abiturprüfung ohne oder mit Verwendung eines Modularen Mathematiksystems (MMS) bearbeitet wird. Grundsätzlich sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen ist (nur im Prüfungsteil B).

Für die Bearbeitung **ohne MMS** ist im Prüfungsteil B außerdem ein Taschenrechner zugelassen, der nicht programmierbar und nicht grafikfähig ist und nicht über die Möglichkeit der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügt.

Für die Bearbeitung **mit MMS** wird im Prüfungsteil B das in der Schule eingeführte MMS-Rechengerät verwendet. Grundsätzlich gilt, dass die Benutzung weiterer Software über das MMS hinaus nicht zugelassen ist.

Berlin/Brandenburg – Mathematik Leistungskurs
2025 – Aufgabe 2.1: Analysis

Regenwasser BE

Aufgabenteil 1

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^2 \cdot (x-2k)^2 = \frac{1}{2k}x^4 - 2x^3 + 2kx^2 \text{ und } k \in \mathbb{R}^+.$$

Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a) Begründen Sie, dass f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an. 3

b) Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung der ersten Ableitungsfunktion von f_k durch $f_k'(x) = \frac{1}{k} \cdot x \cdot (x-2k) \cdot (2x-2k)$ beschrieben werden kann. 3

c) Der Hochpunkt von G_k hat zu den beiden Tiefpunkten von G_k denselben Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand in Abhängigkeit von k. 5

Hinweis: Verwenden Sie die Funktionsgleichung von f_k' aus Teilaufgabe b.

d) Betrachtet wird die Fläche, die G_k, die x-Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen. Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert eines Integrals zu berechnen:

Für jeden Wert von k gibt der Term $\int_{-1}^{1} f_k(x)\,dx$ *den Inhalt der betrachteten Fläche an.* 4

e) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_k mit

$$h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x-2k)^2.$$

Die folgenden Schritte stellen die Lösung einer Aufgabe dar.
Interpretieren Sie jeden der beiden Schritte geometrisch in Bezug auf die Graphen von f_k und h_k.

I $\quad f_k(x) = h_k(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = -k \ \vee \ x = k \ \vee \ x = 2k$

II $\quad \int_{-k}^{k} (h_k(x) - f_k(x))\,dx + \int_{k}^{2k} (f_k(x) - h_k(x))\,dx = \frac{29}{10}k^4$

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist.

Für k > 3 gilt $\int_{-k}^{k} (h_k(x) - f_k(x))\,dx + \int_{k}^{2k} (f_k(x) - h_k(x))\,dx < k^5$. 5

Tipps und Hinweise zur Lösung von Aufgabe 2.1

Aufgabenteil 1

Tipps zu Teilaufgabe a

- Die Gleichung der gegebenen Schar liegt einmal als Produkt und einmal als Summe vor. Überlegen Sie, welche Darstellungsform sich eher eignet, um Nullstellen durch Ablesen zu bestimmen.
- Erinnern Sie sich an die Bedingung für Nullstellen.

Tipps zu Teilaufgabe b

- Leiten Sie die gegebene Funktion ab und überlegen Sie dabei geschickt, ob Sie lieber die Darstellung als Produkt oder als Summe verwenden.
- Zeigen Sie anschließend durch geschickte Umformungen, dass die gebildete Ableitung der in Teilaufgabe b gegebenen Ableitung entspricht.

Tipps zu Teilaufgabe c

- Erinnern Sie sich daran, mit welcher Formel Sie den Abstand zweier Punkte zueinander berechnen.
- Beachten Sie, dass bereits gegeben ist, dass der Abstand des Hochpunktes zu den Tiefpunkten identisch ist.
- Die notwendige Bedingung für Extremstellen lautet $f_k'(x) = 0$.
- Sie wissen aus der Aufgabenstellung bereits, dass es einen Hochpunkt und zwei Tiefpunkte gibt. Es ist also möglich, die Aufgabe ohne Beachtung der hinreichenden Bedingung zu lösen.

Tipps zu Teilaufgabe d

- Beachten Sie, dass die Lösung ohne Rechnung begründet werden soll. Dazu ist es notwendig, dass Sie sich die Situation (ggf. graphisch) zu vergegenwärtigen.
- Die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ sind Parallelen zur y-Achse und stellen somit Intervallgrenzen dar.
- Um die Aussage zu beurteilen, müssen Sie zudem darauf achten, unter welcher Bedingung eine Fläche durch ein Integral beschrieben werden kann.

Tipps zu Teilaufgabe e

- Zur geometrischen Interpretation der Rechenschritte: Analysieren Sie die Notation gründlich und beschreiben Sie mit eigenen Worten, was für eine Art von Rechnung vorgenommen wurde.
- Da es sich um eine Rechnung im Kontext der Integralrechnung handelt, hilft es, wenn Sie einerseits die Grenzen, andererseits das Ergebnis interpretieren.
- Zur Untersuchung der gegebenen Aussage: Deuten Sie auch hier durch kritisches Hinsehen, was die in der Aussage aufgeführten Integrale bedeuten. Verwenden Sie den ersten Teil der Teilaufgabe.
- Achten Sie speziell auf den Ausdruck „$< k^5$“ und setzen Sie ggf. zum besseren Verständnis der Aussage einige Testwerte für $k > 3$ ein.

Lösungen zu Aufgabe 2.1

Aufgabenteil 1

a) Der erste Teil der gegebenen Funktionsgleichung liegt in Produktschreibweise vor, sodass der Satz vom Nullprodukt anwendbar ist.
Nullstellenbedingung:

$$0 = \frac{1}{2k} x^2 (x - 2k)^2$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt:

$$0 = \frac{1}{2k} x^2 (x - 2k)^2 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = 2k$$

Da $k > 0$ gilt, gibt es genau zwei Nullstellen.

b) Ableiten von $f_k(x)$ in Summenschreibweise:

$$f_k'(x) = \frac{2}{k} x^3 - 6x^2 + 4kx$$

Ausklammern von $\frac{1}{k} \cdot x$ ergibt:

$$f_k'(x) = \frac{1}{k} \cdot x \cdot (2x^2 - 6kx + 4k^2)$$

Man erhält den Term in der Klammer, wenn man die beiden Klammerfaktoren der zu zeigenden Gleichung $f_k'(x) = \frac{1}{k} \cdot x \cdot (x - 2k) \cdot (2x - 2k)$ ausmultipliziert:

$$(x - 2k)(2x - 2k) = 2x^2 - 6kx + 4k^2$$

Somit muss gelten:

$$f_k'(x) = \frac{2}{k} x^3 - 6x^2 + 4kx = \frac{1}{k} x (x - 2k)(2x - 2k)$$

Alternativ ließe sich die zu zeigende Gleichung der Ableitung von der Produktform in die Summenform umformen:

$$\begin{aligned} f_k'(x) &= \frac{1}{k} \cdot x \cdot (x - 2k) \cdot (2x - 2k) \\ &= \frac{1}{k} x (2x^2 - 4kx - 2kx + 4k^2) \\ &= \frac{2}{k} x^3 - 4x^2 - 2x^2 + 4kx \\ &= \frac{2}{k} x^3 - 6x^2 + 4kx \end{aligned}$$

Da wir diese umgeformte Gleichung ebenfalls durch direktes Ableiten erhalten haben (s. o), muss $f_k'(x) = \frac{2}{k} x^3 - 6x^2 + 4kx = \frac{1}{k} x (x - 2k)(2x - 2k)$ gelten.

c) Notwendige Bedingung für die Existenz von lokalen Extrema:

$$f_k'(x) = 0$$

$$\frac{1}{k} \cdot x \cdot (x - 2k) \cdot (2x - 2k) = 0$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt lassen sich die Extremstellen berechnen, indem jeder der Faktoren für sich gleich 0 gesetzt wird:

$x_{E_1} = 0 \quad$ oder $\quad x - 2k = 0 \;\Rightarrow\; x_{E_2} = 2k \quad$ oder $\quad 2x - 2k = 0 \;\Rightarrow\; x_{E_3} = k$

Alternativ lassen sich die Extremstellen auch direkt aus der Produktform ablesen.

Aus der Aufgabenstellung ist ersichtlich, dass der Graph von f_k einen Hochpunkt und zwei Tiefpunkte hat. Der Hochpunkt muss zwischen den beiden Tiefpunkten liegen und somit bei $x = k$. Außerdem ist bekannt, dass der Abstand des Hochpunktes zu den Tiefpunkten identisch ist. Daher genügt es, zu einem Tiefpunkt die y-Koordinate zu ermitteln.

Um die zugehörigen y-Koordinaten zu berechnen – diese werden für die Berechnung des Abstandes benötigt – werden die Extremstellen in $f_k(x)$ eingesetzt.

Hierbei bietet sich die Summenform an. Ein Einsetzen in die Produktform ist allerdings ebenfalls möglich.

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}x^4 - 2x^3 + 2kx^2$$

$$f_k(0) = 0 \;\Rightarrow\; (0\,|\,0)$$

$$f_k(k) = \frac{1}{2k} \cdot k^4 - 2 \cdot k^3 + 2k \cdot k^2 = \frac{1}{2}k^3 - 2k^3 + 2k^3 = \frac{1}{2}k^3 \;\Rightarrow\; \left(k \,\middle|\, \frac{1}{2}k^3\right)$$

Die Formel zur Berechnung des Abstandes d lautet:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Durch Einsetzen der ermittelten Punktkoordinaten ergibt sich:

$$d = \sqrt{(k-0)^2 + \left(\frac{1}{2}k^3 - 0\right)^2} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1}{2}k^3\right)^2} = \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}k^6}$$

d) Das Integral $\int_{-1}^{1} f_k(x)\,dx$ beschreibt eine Flächenbilanz, das bedeutet:

- Bereiche, in denen $f_k(x) > 0$, tragen positiv zum Integralwert bei.
- Bereiche, in denen $f_k(x) < 0$, tragen negativ zum Integralwert bei.

Die Aussage bezieht sich also darauf, dass die betrachtete Fläche nur dann durch das Integral beschrieben werden kann, wenn sich die Fläche im Intervall I [1; −1] durchweg oberhalb der x-Achse befindet. Dies ist der Fall, wenn alle Funktionswerte innerhalb des Intervalls nicht negativ werden können.
Die Funktion f_k besteht aus den drei Faktoren $\frac{1}{2k}$, x^2 sowie $(x - 2k)^2$. Weil $k > 0$ nach Voraussetzung gilt, ist $\frac{1}{2k} > 0$. Die übrigen beiden Faktoren sind quadratische Terme und können daher nicht negativ werden, da jede reelle Zahl zum Quadrat positiv oder null ist. Somit ist auch das Produkt all dieser stets positiven Faktoren immer positiv. Es liegen also alle Punkte des Graphen oberhalb der x-Achse. Somit ist die zu beurteilende Aussage korrekt.

e) Geometrische Interpretation der gegebenen Lösungsschritte:

- I beschreibt die Schnittstellenberechnung der Graphen der beiden Funktionsscharen f_k und h_k. Diese schneiden sich in den Stellen $x = -k$, $x = k$ sowie $x = 2k$.
- In II wird die Größe der Differenzfläche, also der Fläche, die zwischen den beide Graphen von f_k und h_k eingeschlossen ist, berechnet. Insgesamt besteht die Fläche aus zwei Teilflächen. Im Intervall $[-k; k]$ wird $h_k(x) - f_k(x)$ integriert, in diesem Bereich liegt der Graph von h_k also oberhalb des Graphen von f_k. Im zweiten Intervall $[k; 2k]$ verlaufen die beiden Graphen andersherum. Der Flächeninhalt beträgt $\frac{29}{10}k^4$.

Beurteilung der gegebenen Aussage:

Die Aussage besagt, dass das im ersten Aufgabenteil interpretierte Integral – mit der Größe $\frac{29}{10}k^4$ – kleiner als k^5 ist, wenn für k Werte eingesetzt werden, die größer als 3 sind. Die zu untersuchende Frage ist also, ob für $k > 3$ die Ungleichung $\frac{29}{10}k^4 < k^5$ gilt oder nicht.

Wird bspw. $k = 4$ in $\frac{29}{10}k^4 < k^5$ eingesetzt, erhält man:

$$\frac{29}{10}4^4 < 4^5$$

$$742{,}4 < 1\,024$$

Für $k = 4$ ist die Aussage also erfüllt.

Betrachtung der Ungleichung für ein allgemeines k und Umformen nach k liefert:

$$\frac{29}{10}k^4 < k^5 \quad |:k^4$$

$$\frac{29}{10} < k$$

Die Aussage gilt also genau dann, wenn $\frac{29}{10} < k$ ist.

Da $k > 3$ nach Voraussetzung gelten soll und $\frac{29}{10} < 3$ erfüllt ist, ist die zu beurteilende Aussage richtig.

Aufgabenteil 2

a) Die erste Ableitungsfunktion von r kann der Aufgabenstellung entnommen werden:

$$r'(x) = \frac{1}{5}x\,(x-5)\,(x^2 - x - 10)\,e^x$$

Notwendige Bedingung für Extremstellen:

$$r'(x) = 0$$

$$\frac{1}{5}x\,(x-5)\,(x^2 - x - 10)\,e^x = 0$$

Die Gleichung kann mithilfe des Satzes vom Nullprodukt leicht gelöst werden.

Da $e^x > 0$, gilt $r'(x) = 0 \iff x = 0$ oder $x - 5 = 0$ oder $x^2 - x - 10 = 0$.

Die Extremstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 5$ sind aus den Faktoren direkt ablesbar.