

2027

>30 Millionen
bestandene
Prüfungen

50
Jahre
STARK

STARK
Prüfung

**MEHR
ERFAHREN**

FOS • B

Bayern

Mathematik Nichttechnische

- ✓ Abitur-Prüfungsaufgaben mit Lösungen
- ✓ Interaktives Training



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Stichwortverzeichnis 2022 – 2025

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1	Aufgabe der Beruflichen Oberschule	I
2	Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik	II
3	Arbeit mit diesem Buch	III
4	Inhalte und Schwerpunktthemen	IV
5	Operatoren	VIII
6	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung	IX

Original-Abituraufgaben

Abiturprüfung 2022 (Nichttechnik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel)	2022-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel)	2022-7
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	2022-12
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	2022-22
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln)	2022-32
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln)	2022-40

Abiturprüfung 2023 (Nichttechnik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel)	2023-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel)	2023-9
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	2023-13
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	2023-24

Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln)	2023-35
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln)	2023-43

Abiturprüfung 2024 (Nichttechnik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel)	2024-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel)	2024-7
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	2024-12
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	2024-25
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln)	2024-35
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln)	2024-42

Abiturprüfung 2025 (Nichttechnik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel)	2025-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel)	2025-7
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	2025-11
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	2025-22
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln)	2025-32
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln)	2025-39

Abiturprüfung 2026 (Nichttechnik) www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2026 freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, können Sie das PDF auf der Plattform MySTARK herunterladen (Zugangscode vorne im Buch).

Musterprüfungen zum Abitur ab 2020 (online)

Musterprüfung I www.stark-verlag.de/mystark

Teil 1, Analysis I (ohne Hilfsmittel)	M-1
Teil 1, Geometrie I (ohne Hilfsmittel)	M-8
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	M-12
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln)	M-22

Musterprüfung II www.stark-verlag.de/mystark

Teil 1, Analysis II (ohne Hilfsmittel)	M-29
Teil 1, Geometrie II (ohne Hilfsmittel)	M-35
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	M-41
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln)	M-51

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie haben zwei lehrreiche Jahre an der BOS oder ein zusätzliches 13. Schuljahr an der FOS absolviert und werden eine schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik ablegen. Bei der Vorbereitung darauf wird Ihnen dieses Buch eine gute Hilfe sein.

- Mit dem Buch erhalten Sie die **offiziellen schriftlichen Abituraufgaben** für die nichttechnischen Ausbildungsrichtungen der letzten Jahre.
- Um Ihnen weitere Übungsmöglichkeiten auf die neuen Abiturprüfung zu geben, erhalten Sie zudem online auf MySTARK zwei **Musterprüfungen**.
- Das **Stichwortverzeichnis** erlaubt Ihnen die gezielte Suche nach bestimmten Begriffen und Inhalten.

Allen prüfungsrelevanten Aufgaben folgen **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie zusätzliche **Lösungshinweise**, die Ihnen das eigenständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Die angeführten Lösungen sind dabei als **möglicher, aber keineswegs einziger Weg** zum Erreichen des Ergebnisses zu sehen.

Das Ziel der Arbeit mit dem Buch besteht darin, dass Sie die Problemstellungen weitgehend selbstständig bearbeiten können und die dargestellten Lösungen nur noch zur Kontrolle Ihrer eigenen Ergebnisse nutzen. Wenn Sie dieses Ziel erreicht haben, sind Sie gut auf die bevorstehende Prüfung vorbereitet.

Darüber hinaus können Sie dieses Buch **unterrichtsbegleitend** bei der systematischen Vorbereitung auf schriftliche Leistungsnachweise einsetzen, da Ihr Fachlehrer oder Ihre Fachlehrerin hier auch immer die Abiturprüfung im Blick haben wird.

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen für Ihre Prüfungen viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Aufgabe der Beruflichen Oberschule

In der Beruflichen Oberschule sind die Fachoberschule (FOS) und die Berufsoberschule (BOS) zusammengefasst.

Ziel der Berufsoberschule (BOS) ist es, Schülerinnen und Schüler mit einem mittleren Schulabschluss und einer Berufsausbildung innerhalb von zwei Schuljahren (Jahrgangsstufen 12 und 13) in den Ausbildungsrichtungen Technik; Wirtschaft und Verwaltung; Sozialwesen; Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie; Gesundheit bzw. Internationale Wirtschaft zur fachgebundenen Hochschulreife (nur Englisch als Fremdsprache) oder auch zur allgemeinen Hochschulreife (mit einer zweiten Fremdsprache) zu führen. Die Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule können nach der 12. Jahrgangsstufe an der Fachabiturprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife teilnehmen und mit diesem Abschluss die Schule verlassen. Dies wurde durch eine Abstimmung der Lehrpläne und Stundentafeln für die Fachoberschule (11. und 12. Jahrgangsstufe) und die Berufsoberschule (12. Jahrgangsstufe) ermöglicht.

Ziel der Fachoberschule (FOS) ist es, Schülerinnen und Schüler mit einem mittleren Schulabschluss innerhalb von zwei Schuljahren (Jahrgangsstufen 11 und 12) in den Ausbildungsrichtungen Technik; Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie; Wirtschaft und Verwaltung; Sozialwesen; Gestaltung; Gesundheit bzw. Internationale Wirtschaft zur Fachhochschulreife zu führen. Im Anschluss daran können Schülerinnen und Schüler, die im Zeugnis der Fachhochschulreife einen bestimmten Notendurchschnitt erreicht haben, die 13. Jahrgangsstufe der Fachoberschule besuchen. Stundentafeln, Lehrpläne, Abiturprüfungen und die möglichen Abschlüsse (fachgebundene bzw. allgemeine Hochschulreife) stimmen mit denen der Berufsoberschule überein.

2.1 Aufbau und Auswahl der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben werden einheitlich vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus gestellt. Die Prüfungsstruktur ist identisch mit der der Fachabiturprüfung am Ende der 12. Jahrgangsstufe. Die Prüfung ist in zwei Teile gegliedert:

- Teil 1: Die Bearbeitung erfolgt ohne Verwendung von Hilfsmitteln.
Die vorgesehene Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Teil 2: Die Bearbeitung erfolgt unter Verwendung von Hilfsmitteln (siehe Abschnitt 2.3). Die vorgesehene Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Jeder Teil setzt sich aus den beiden Aufgabengruppen A (Analysis) und G (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) zusammen.

In Teil 2 gibt es für jede Aufgabengruppe zwei Varianten (AI und AII bzw. GI und GII). Die Auswahl jeweils einer Variante trifft die Schule; die Schülerinnen und Schüler haben keine Wahlmöglichkeit.

In Teil 1 wird zentral nur eine Variante gestellt.¹

Alle Aufgaben werden zu Beginn der Prüfung ausgeteilt. Die Aufgaben und die angefertigten Lösungen zu Teil 1 werden nach 60 Minuten eingesammelt.

Das Geheft mit den Aufgaben zu Teil 2 und die dazu angefertigten Lösungen sind am Ende der Prüfung abzugeben.

Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen dürfen nur auf Papier, das den Stempel der Schule trägt, angefertigt werden.

2.2 Bewertung der Prüfungsaufgaben

Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten (BE) angegeben. Es sind maximal 100 BE zu erreichen. Diese werden wie folgt verteilt:

	Aufgaben- gruppe	Bewertungs- einheiten
Teil 1	A	22 BE
	G	12 BE
Teil 2	A	43 BE
	G	23 BE

¹ Teil 1 des Musterprüfungssatzes zu diesem Buch besteht dennoch aus zwei Varianten pro Aufgabengruppe, um Ihnen zwei vollständige Prüfungen zum Üben zur Verfügung zu stellen.

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungseinheiten	100	94	89	84	79	74	69	64	59	54	49	44	39	32	26	19
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	27	20	0

2.3 Zugelassene Hilfsmittel

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Nichttechnik für Berufliche Oberschulen. Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.

Die Merkhilfe Mathematik/Nichttechnik ist auf der Webseite des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (www.isb.bayern.de) zu finden.

3 Arbeit mit diesem Buch

Mit dem Buch erhalten Sie die **offiziellen schriftlichen Prüfungsaufgaben** zum Erwerb der (fachgebundenen) Hochschulreife (Nichttechnik) der letzten Jahre, um sich optimal und zielgerichtet auf die Abiturprüfung in Mathematik vorzubereiten. Die Original-Aufgaben 2022 bis 2025 sind im Buch abgedruckt. Sobald die Prüfungsaufgaben 2026 freigegeben sind, stehen diese auf MySTARK zur Verfügung (Zugangscode vorne im Buch).

Zur weiteren Einübung der Prüfungsinhalte und insbesondere zur Simulation der Prüfungssituation stehen Ihnen online auf MySTARK **Musterprüfungen** zur Verfügung, die der Form der Abiturprüfung seit 2020 entsprechen. Der Aufgabensatz mit den Varianten AI und GI bzw. AII und GII stellt dabei jeweils eine vollständige Prüfung dar. Die Musterprüfungen decken ein möglichst breites Spektrum an unterschiedlichen Aufgabenstellungen ab, erheben aber nicht den Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller möglichen Aufgabentypen und -varianten.

Eine zusätzliche Übungsmöglichkeit für den hilfsmittelfreien Teil bietet Ihnen das **interaktive Training** auf MySTARK.

4 Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen für die schriftliche Abiturprüfung stichpunktartig aufgeführt. Diese Auflistung soll Ihnen einen Überblick über den prüfungsrelevanten Lehrstoff vermitteln, sie ersetzt jedoch nicht den ausführlichen Lehrplan für das Fach Mathematik.

Die Zusammenstellung kann Ihnen bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als Leitfaden für die verbindlichen Inhalte und wichtigsten mathematischen Begriffe dienen.

In der Analysis werden die Lerninhalte der 12. Jahrgangsstufe (in der FOS auch die der 11. Jahrgangsstufe) als bekannt vorausgesetzt, sie sind daher im Folgenden noch einmal aufgeführt. Das Lerngebiet Stochastik wird nicht geprüft.

Die Aufgabenstellung in der 13. Jahrgangsstufe unterscheidet sich von der der 12. Jahrgangsstufe auch darin, dass die Aufgaben nicht mehr so kleinschrittig untergliedert sind. Bei vielen Teilaufgaben müssen Sie eine komplexere Lösungsstrategie selbst entwickeln.

4.1 Analysis – 12. Jahrgangsstufe

Grundbegriffe bei reellen Funktionen

Grundlagen

- Reelle Funktionen: Abbildungsvorschrift, Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge, Funktionsgraph
- Lineare Funktionen und lineare Ungleichungen
- Quadratische Funktionen und quadratische Ungleichungen

Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) und Funktionenscharen

- Verknüpfung von Funktionen: Summe, Differenz, Produkt und Quotient
- Nullstellenbestimmung unter Verwendung von Polynomdivision und Substitution
- Faktorisierung des Funktionsterms und Vielfachheit der Nullstellen
- Schnittpunkte von Funktionsgraphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow \pm\infty$
- Symmetrie des Funktionsgraphen (Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Exponentialfunktion und Logarithmus

- Eigenschaften der Funktion $f: x \mapsto a \cdot b^{c \cdot (x-d)} + y_0$ mit $b > 0$
- Einfluss der Parameter a , b , c , d und y_0 auf den Graphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow \pm\infty$
- Lösen von Exponentialgleichungen unter Verwendung des Logarithmus und der Rechenregeln für Logarithmen
- Exponentielles Wachstum bzw. exponentielle Abnahme

Aufgabenstellung

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-x^2 - 5}{x^3 - 5x}$ mit ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}; 0; \sqrt{5}\}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie, ob G_f eine Symmetrie zum Koordinatensystem besitzt.

3

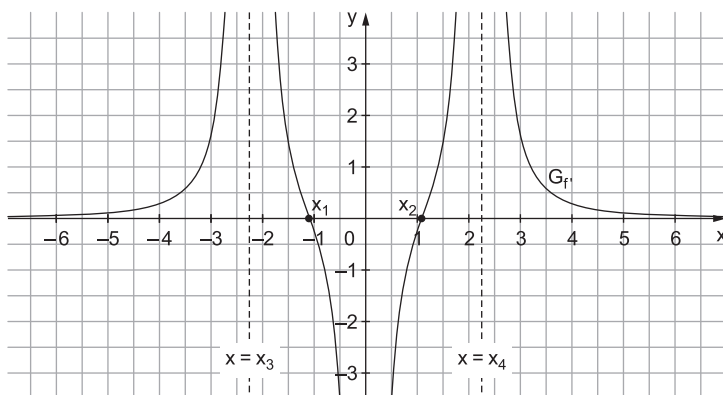
1.2 Ermitteln Sie die exakten Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f' mit der Definitionsmenge $D_{f'} = D_f$.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{x^4 + 20x^2 - 25}{(x^3 - 5x)^2}$]

6

1.3 Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen $G_{f'}$ der Funktion f' . Alle Nullstellen und Definitionslücken von f' sind in der Abbildung ersichtlich. Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie jeweils die Art aller relativen Extremstellen von f an.

Hinweis: Anstelle der exakten Zahlenwerte können bei der Angabe der Intervalle die in der Abbildung ersichtlichen Bezeichnungen x_1 , x_2 , x_3 und x_4 verwendet werden.



4

- 1.4** Zeigen Sie, dass die Funktion f auch durch die Gleichung $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 5}$ dargestellt werden kann und berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_1^2 f(x) dx$ exakt. 7
- 2.0** Bei der Milchsäuregärung wandeln Bakterien die in Milch befindliche Laktose in Milchsäure um. Die Funktion $M: t \mapsto \frac{a}{1 + 9 \cdot e^{b \cdot t}}$ mit $a, b, t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ gibt die Milchsäurekonzentration $M(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t an. Dabei wird $M(t)$ in Gramm pro Liter $\left(\frac{g}{\ell}\right)$ gemessen und t gibt die Zeit in Stunden an, die seit Beobachtungsbeginn vergangen ist. Bei Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle.
- 2.1** In einem Laborversuch wird die Milchsäurekonzentration von einem Liter Milch stündlich gemessen. Zu Beobachtungsbeginn ($t=0$) beträgt die Milchsäurekonzentration 0,8 Gramm pro Liter und drei Stunden nach Beobachtungsbeginn 5,0 Gramm pro Liter. Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass die Modellfunktion mit diesen beiden Messwerten im Einklang steht. 3
- 2.2.0** Im Folgenden gilt $a=8$ und $b=-0,9$. Somit ergibt sich $M(t) = \frac{8}{1 + 9 \cdot e^{-0,9 \cdot t}}$ mit $t \geq 0$.
Der Graph von M wird mit G_M bezeichnet.
- 2.2.1** Zeigen Sie, dass die Milchsäurekonzentration nach diesem Modell stets zunimmt.
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{M}(t) = \frac{64,8 \cdot e^{-0,9 \cdot t}}{(1 + 9 \cdot e^{-0,9 \cdot t})^2}$] 4
- 2.2.2** Für die zweite Ableitungsfunktion $\ddot{M}$ gilt $\ddot{M}(t) = -58,32 \cdot e^{-0,9 \cdot t} \cdot \frac{1 - 9 \cdot e^{-0,9 \cdot t}}{(1 + 9 \cdot e^{-0,9 \cdot t})^3}$ mit $t > 0$ (Nachweis nicht erforderlich). Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1 , zu dem die erste Ableitungsfunktion $\dot{M}$ ein absolutes Maximum besitzt. Berechnen Sie die Differenz $M(t_1 + 0,5) - M(t_1 - 0,5)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. 6
- 2.2.3** Zeichnen Sie G_M im Bereich $0 \leq t \leq 13$ in ein Koordinatensystem. Wählen Sie auf beiden Achsen einen geeigneten Maßstab. Kennzeichnen Sie auch die Differenz $M(t_1 + 0,5) - M(t_1 - 0,5)$ in Ihrer Abbildung. 4
- 2.2.4** Weisen Sie nach, dass die Funktion $G: t \mapsto \frac{80}{9} \ln(9 + e^{0,9 \cdot t})$ mit der Definitionsmenge $D_G = [0; +\infty[$ eine Stammfunktion von M ist. 3

2.2.5 Die durchschnittliche Milchsäurekonzentration $\bar{M}$ in $\frac{g}{\ell}$ über einen Zeitraum $[t_1; t_2]$ in Stunden beträgt $\bar{M} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} M(t) dt$. Berechnen

Sie die durchschnittliche Milchsäurekonzentration in dieser Milchprobe in den ersten sechs Beobachtungsstunden.

3
43

TIPP Lösungshinweise – Teil 2, Analysis II

Teilaufgabe 1.1

Ersetzen Sie im Funktionsterm $f(x)$ die Variable x durch $-x$.

Zeigen Sie, dass gilt: $f(-x) = -f(x)$

Teilaufgabe 1.2

Berechnen Sie die 1. Ableitung der Funktion f mit der Quotientenregel.

Setzen Sie den Zähler der 1. Ableitung gleich null und lösen Sie die entstehende Gleichung durch Substitution.

Teilaufgabe 1.3

Untersuchen Sie das Vorzeichenverhalten von f' mithilfe des gegebenen Graphen $G_{f'}$ und seiner Nullstellen.

Teilaufgabe 1.4

Bringen Sie die beiden Bruchterme des hier gegebenen Funktionsterms durch Erweitern auf den gleichen Nenner.

Verwenden Sie den hier gegebenen Funktionsterm zur Berechnung des bestimmten Integrals.

Zur Berechnung der jeweiligen Stammfunktion finden Sie Formeln in der Merkhilfe.

Teilaufgabe 2.1

Da die Milchsäurekonzentration zu Beobachtungsbeginn 0,8 beträgt, gilt $M(0) = 0,8$.

Durch Einsetzen in $M(t)$ erhält man sofort den Wert des Parameters a .

Teilaufgabe 2.2.1

Zeigen Sie, dass die Funktion M für $t \geq 0$ streng monoton steigend ist.

Berechnen Sie die 1. Ableitungsfunktion $\dot{M}$ mit der Quotienten- und der Kettenregel.

Teilaufgabe 2.2.2

Bestimmen Sie die Nullstelle von $\ddot{M}(t)$ und untersuchen Sie dann, wie $\ddot{M}(t)$ sein Vorzeichen an dieser Stelle ändert.

Teilaufgabe 2.2.3

Erstellen Sie eine Wertetabelle für $M(t)$ mit der Schrittweite $\Delta t = 1$.

Teilaufgabe 2.2.4

Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion G mit der Kettenregel. Durch geeignetes Erweitern des Funktionsterms $\dot{G}(t)$ kann dieser auf die Form von $M(t)$ gebracht werden.

Teilaufgabe 2.2.5

Verwenden Sie zur Berechnung des bestimmten Integrals die Stammfunktion G aus Teilaufgabe 2.2.4.

Lösungsvorschlag – Teil 2, Analysis II

1.0 $f(x) = \frac{-x^2 - 5}{x^3 - 5x}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}; 0; \sqrt{5}\}$; Graph G_f

1.1 Symmetrie von G_f zum Koordinatensystem

Der gegebene Definitionsbereich D_f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Da im Funktionsterm $f(x)$ der Zählerterm eine gerade Funktion ist (er enthält nur gerade Potenzen von x) und der Nennerterm eine ungerade Funktion ist (er enthält nur ungerade Potenzen von x), ist $f(x)$ eine ungerade Funktion und G_f somit punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Alternative:

$$f(-x) = \frac{-(-x)^2 - 5}{(-x)^3 - 5 \cdot (-x)} = \frac{-x^2 - 5}{-x^3 + 5x} = \frac{-x^2 - 5}{-(x^3 - 5x)} = -\frac{-x^2 - 5}{x^3 - 5x} = -f(x)$$

Da D_f symmetrisch zum Koordinatenursprung ist, ist G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

1.2 Berechnung der 1. Ableitung

$$f(x) = \frac{-x^2 - 5}{x^3 - 5x}$$

$$f'(x) = \frac{-2x \cdot (x^3 - 5x) - (-x^2 - 5) \cdot (3x^2 - 5)}{(x^3 - 5x)^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$f'(x) = \frac{-2x^4 + 10x^2 - (-3x^4 + 5x^2 - 15x^2 + 25)}{(x^3 - 5x)^2} \quad (\text{Ausmultiplizieren})$$

$$f'(x) = \frac{-2x^4 + 10x^2 + 3x^4 - 5x^2 + 15x^2 - 25}{(x^3 - 5x)^2} \quad (\text{Klammer ausmultiplizieren})$$

$$f'(x) = \frac{x^4 + 20x^2 - 25}{(x^3 - 5x)^2} \quad (\text{Zusammenfassen; zur Kontrolle gegeben})$$

Nullstellen von f'

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 20x^2 - 25 = 0$$

$$\text{Substitution } x^2 = z: \quad z^2 + 20z - 25 = 0$$

$$\text{Lösungsformel: } z_{1;2} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-25)}}{2 \cdot 1}$$

$$z_{1;2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 100}}{2}$$

$$z_{1;2} = \frac{-20 \pm \sqrt{500}}{2}$$

$$z_{1;2} = \frac{-20 \pm 10\sqrt{5}}{2}$$

$$z_{1;2} = -10 \pm 5\sqrt{5}$$

$$z_1 = -10 - 5\sqrt{5} \approx -21,18 < 0; \quad z_2 = -10 + 5\sqrt{5} \approx 1,18$$

Rücksubstitution:

$$x^2 = z_1 < 0 \quad \text{keine reellen Lösungen}$$

$$x^2 = -10 + 5\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = \sqrt{-10 + 5\sqrt{5}}; \quad x_2 = -\sqrt{-10 + 5\sqrt{5}}$$

1.3 Maximale Monotonieintervalle von G_f

Das Monotonieverhalten von G_f wird bestimmt vom Vorzeichen der 1. Ableitungsfunktion. Im Schaubild des Graphen G_f erkennt man die Nullstellen x_1 und x_2 , die Definitionslücken x_3 und x_4 sowie die Bereiche mit positivem bzw. negativem Vorzeichen von f' . Somit ergibt sich folgende Vorzeichen-tabelle:

x	$-\infty < x < x_3$	$x = x_3$	$x_3 < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < 0$	$x = 0$
$f'(x)$	+	n. d.	+	0	-	n. d.
$f(x)$	$\nearrow$	n. d.	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	n. d.
x	$0 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < x_4$	$x = x_4$	$x_4 < x < \infty$	
$f'(x)$	-	0	+	n. d.	+	
$f(x)$	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	n. d.	$\nearrow$	

Also ist G_f streng monoton steigend in den Intervallen $]-\infty; x_3[$, $]x_3; x_1[$, $[x_2; x_4[$ sowie $]x_4; +\infty[$ und streng monoton fallend in den Intervallen $[x_1; 0[$ sowie $]0; x_2[$.

TIPP Bei maximalen Monotonieintervallen sind die Randpunkte einzuschließen, sofern die Funktion dort definiert ist.

Art aller relativen Extremstellen von f

TIPP Die Art der Extrempunkte ergibt sich aus dem Monotonieverhalten (siehe Vorzeichentabelle).

Somit besitzt f an der Stelle $x = x_1$ eine relative Maximalstelle und bei $x = x_2$ eine relative Minimalstelle.

1.4 Nachweis des alternativen Funktionsterms von f(x)

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 5}$$

TIPP Um die beiden Bruchterme addieren zu können, müssen sie so erweitert werden, dass sie denselben Nenner besitzen.

$$f(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 5)}{x \cdot (x^2 - 5)} - \frac{2x \cdot x}{(x^2 - 5) \cdot x} \quad (\text{Erweitern})$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 5 - 2x^2}{x \cdot (x^2 - 5)} \quad (\text{Auf einen Bruchstrich bringen})$$

$$f(x) = \frac{-x^2 - 5}{x^3 - 5x} \quad (\text{Zusammenfassen})$$

Dies entspricht dem in 1.0 angegebenen Funktionsterm.

Berechnung des bestimmten Integrals

$$I = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 5} \right) dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{2x}{x^2 - 5} dx$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK