2027

>30 Millionen bestandene Prüfungen

50 Jahre STARK

STARK Prüfun[g]

MEHR ERFAHREN

Berufliches G[ymnasiu]m

Baden-Württemberg

Mathematik eAN

- ✓ Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen
- ✓ Offizielle Musterprüfung

PDF

Inhalt

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik (eAN)

Offizielle Musterprüfung für 2024

Schriftliche Abiturprüfung 2024

Schriftliche Abiturprüfung 2025

Schriftliche Abiturprüfung 2026 . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2026 freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, können Sie diese als PDF auf der Plattform MySTARK herunterladen. Den Zugangscode finden Sie vorne im Buch.

Bei **MySTARK** finden Sie:
– **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil, inklusive **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen; teilweise mit Veranschaulichung durch **Videos**
– **Jahrgang 2026**, sobald dieser zum Download bereit steht

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Lösungen der Aufgaben:
Karen Grabarek, Jens Hatzenbühler, Ulrich Müller

Vorwort

Liebe Abiturientin, lieber Abiturient,

haben Sie Mathematik als Kernkompetenzfach auf erhöhtem Anforderungsniveau gewählt, ist die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik verpflichtend vorgeschrieben.

Das vorliegende Buch soll Ihnen helfen, sich optimal auf die **schriftliche Abiturprüfung in Mathematik auf erhöhtem Anforderungsniveau** (eAN) vorzubereiten. Es wendet sich an Abiturienten und Abiturientinnen der Beruflichen Gymnasien:

- AG: Agrarwissenschaftliches Gymnasium
- BTG: Biotechnologisches Gymnasium
- EG: Ernährungswissenschaftliches Gymnasium
- SGG: Sozial- und gesundheitswissenschaftliches Gymnasium
- TG: Technisches Gymnasium
- WG: Wirtschaftswissenschaftliches Gymnasium

Das Buch enthält die **offizielle Musterprüfung** für das Abitur ab 2024 sowie die vollständigen **Abiturprüfungen 2024 und 2025**.
Die vollständige **Abiturprüfung 2026** steht Ihnen auf der Plattform MySTARK zum Download zur Verfügung.

Zu allen Aufgaben finden Sie **ausführliche Lösungen**. Die beste Vorbereitung auf das Abitur wäre, die Aufgaben selbstständig zu lösen. Da das vielleicht nicht in jedem Fall reibungslos klappt, haben wir zu jeder Aufgabe **Hinweise und Tipps** hinzugefügt, die Ihnen den Einstieg in die Aufgabe erleichtern sollen.

Beachten Sie bei der Arbeit mit diesem Buch insbesondere die „Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik (eAN)“.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2027 vom Kultusministerium Baden-Württemberg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MySTARK.

Wir wünschen Ihnen allen viel Erfolg bei Ihrer Prüfungsvorbereitung und Ihrer Abiturprüfung.

Ihr Autorenteam

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung in Mathematik (eAN)

Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

Die schriftliche Abiturprüfung wird seit 2024 in vier Fächern abgelegt:
- im jeweiligen Profilfach
- im fünfstündig gewählten Kernkompetenzfach Deutsch oder Mathematik auf erhöhtem Anforderungsniveau
- im vierstündigen Kernkompetenzfach Deutsch oder Mathematik auf grundlegendem Anforderungsniveau oder in einer fortgeführten Fremdsprache
- in einem 4. schriftlichen Prüfungsfach

Zusätzlich gilt: Eines Ihrer Prüfungsfächer muss Mathematik oder eine Naturwissenschaft sein.

Genauere Informationen finden Sie im **Leitfaden für die gymnasiale Oberstufe** des Ministeriums für Kultus, Jugend und Sport, der jedes Jahr neu herausgegeben wird.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Bitte beachten Sie, dass nach der schriftlichen Abiturprüfung im Jahr 2024 eine Anpassung der Prüfungsmodalitäten im Fach Mathematik durch das Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg stattgefunden hat.
Die in diesem Prüfungsband abgedruckte Musterprüfung sowie die schriftliche Abiturprüfung aus dem Jahr 2024 beziehen sich auf die damals gültigen Prüfungsmodalitäten. Die wesentlichen Veränderungen betreffen den Aufgabenteil B der Abiturprüfung. Statt ehemals max. 90 BE sind ab der Prüfung 2025 hier nur noch max. 70 BE zu erreichen.
Diese Veränderungen betreffen nicht die Inhalte der schriftlichen Prüfung.

Die aktuell gültigen Prüfungsmodalitäten sind nachfolgend beschrieben.

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik auf erhöhtem Anforderungsniveau besteht aus zwei Prüfungsteilen: Teil A (ohne Hilfsmittel) und Teil B (mit zugelassenen Hilfsmitteln). Beide Teile beinhalten jeweils Prüfungsaufgaben aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Lineare Algebra.

Das Sachgebiet Lineare Algebra umfasst dabei die Themengebiete Vektorgeometrie und Matrizen. Die Prüfungsaufgaben aus diesem Sachgebiet können dabei ausschließlich aus einem der beiden Themengebiete stammen – entweder nur Vektorgeometrie bzw. nur Matrizen – oder aus beiden Themengebieten zusammengestellt sein.

Beim Themengebiet Matrizen sind die Inhalte in der schriftlichen Prüfung so gewählt, dass sie unabhängig von der Profilierung – Produktionsprozesse (WG), Abbildungen (TG), Austausch- und Populationsprozesse (AG, BTG, EG, SGG) – gelöst werden können.

Die Aufgaben im Fach Mathematik (eAN) bestehen aus zwei Teilen nach dem folgenden Schema:

Teil	Aufgabe	Stoffgebiet	BE	Auswahl
Teil A (ohne Hilfsmittel)	1	Analysis	5	keine Auswahl (Pflicht)
	2	Analysis	5	keine Auswahl (Pflicht)
	3	Stochastik	5	keine Auswahl (Pflicht)
	4	Lineare Algebra	5	keine Auswahl (Pflicht)
	5 (I)	Stoffgebiet 1	5	Schülerauswahl: Entweder zwei Aufgaben mit je 5 BE aus den Aufgaben 5 (I) bis 5 (IV) oder: Aufgabe 6 mit 10 BE (**P**roblem**L**öse**A**ufgabe)
	5 (II)		5	
	5 (III)	Stoffgebiet 2	5	
	5 (IV)		5	
	6 (PLA)	Stoffgebiet 3	10	
Teil B (mit Hilfsmitteln)	1 (I)	Analysis	30	Die Auswahl erfolgt durch die Lehrperson.
	1 (II)	Analysis	30	
	2 (I)	Stochastik	20	Die Auswahl erfolgt durch die Lehrperson.
	2 (II)	Stochastik	20	
	3 (I)	Lineare Algebra	20	Die Auswahl erfolgt durch die Lehrperson.
	3 (II)	Lineare Algebra	20	

Zu Beginn der Prüfung werden **alle** Aufgaben an die Schülerinnen und Schüler ausgeteilt, getrennt nach Teil A und Teil B.

Im **Teil A** (ohne Hilfsmittel) sind **keine Hilfsmittel** zugelassen. Bei der Bearbeitung von **Teil B** ist die **Nutzung aller zugelassenen Hilfsmittel erlaubt**. In Baden-Württemberg sind dies ein wissenschaftlicher Taschenrechner **(WTR)** ohne Handbuch sowie die **mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung** des Instituts für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik) bzw. eine für die beruflichen Schulen eingeführte **Merkhilfe**. Weitere Hilfsmittel sind nicht erlaubt.

Nach Abgabe der bearbeiteten Aufgaben aus Teil A (ggf. mit Ausnahme der PLA) erhält die Schülerin/der Schüler die zugelassenen Hilfsmittel (siehe oben). Teil A kann dann nachträglich nicht mehr bearbeitet werden.

Insgesamt können in der Prüfung **100 Bewertungseinheiten (BE)** erreicht werden. Davon sind maximal **30 BE** im **Teil A** und maximal **70 BE** im **Teil B** erreichbar.

Teil A:
Für die ersten vier Aufgaben aus Teil A besteht keine Auswahlmöglichkeit. Diese vier Aufgaben aus dem Pflichtteil müssen alle wie vorgelegt bearbeitet werden. Zwei Aufgaben sind dabei aus dem Sachgebiet Analysis und je eine weitere Aufgabe aus dem Sachgebiet Stochastik bzw. Lineare Algebra. Jede dieser vier Aufgaben umfasst 5 BE.

Für die restlichen 10 BE im Teil A besteht eine Schülerauswahl. Die Schülerinnen und Schüler erhalten insgesamt vier Aufgaben mit jeweils 5 BE (Aufgabe 5 (I) bis (IV)) und eine **P**roblem**L**öse**A**ufgabe (PLA) mit insgesamt 10 BE (Aufgabe 6).
Die Aufgaben 5 (I) bis 5 (IV) und Aufgabe 6 decken die drei Sachgebiete (Analysis, Stochastik und Lineare Algebra) ab (insgesamt 10 BE je Sachgebiet). Dabei ist nicht vorgegeben, aus welchem Sachgebiet die PLA stammt. Dies kann von Jahr zu Jahr variieren.

Die Schülerinnen und Schüler haben die Möglichkeit, zwei der vier Aufgaben 5 (je 5 BE) **oder** die PLA (10 BE) zu wählen. Bei der Auswahl aus den Aufgaben 5 (I) bis 5 (IV) ist die Wahl des Sachgebiets irrelevant. Es können dabei zwei Aufgaben aus demselben Sachgebiet oder aber je eine Aufgabe aus einem der beiden Sachgebiete gewählt werden. Entscheidet sich die Schülerin/der Schüler für die PLA (Aufgabe 6), so stehen zum Bearbeiten alle zugelassenen Hilfsmittel zur Verfügung, d. h., diese wird in Teil B (mit Hilfsmitteln) bearbeitet.

Teil B:
In Prüfungsteil B müssen drei Aufgaben bearbeitet werden. Eine aus dem Sachgebiet Analysis, eine aus dem Sachgebiet Stochastik und eine aus dem Sachgebiet Lineare Algebra. Im Sachgebiet Analysis sind maximal 30 BE (ehemals 40 BE), in den Sachgebieten Stochastik und Lineare Algebra sind jeweils maximal 20 BE (ehemals 25 BE) zu erreichen.

Die Auswahl der drei Aufgaben trifft vor Beginn der Prüfung die Lehrperson. Dieser liegen zwei Aufgaben je Sachgebiet vor, aus denen sie jeweils genau eine Aufgabe auswählt. Alle drei Aufgaben der Lehrerauswahl sind von den Schülerinnen und Schülern in der Prüfung zu bearbeiten.

Bearbeitungszeit:
Die Bearbeitungszeit beträgt **insgesamt 300 Minuten**. Die Reihenfolge der Bearbeitung und der Zeitaufwand pro Aufgabe bleiben grundsätzlich der Schülerin/dem Schüler überlassen. Jedoch muss die **Abgabe von Teil A spätestens nach 110 Minuten** erfolgen.

Als Orientierung kann man einen Zeitrichtwert von 3 Minuten je BE (inklusive Auswahlzeit im Aufgabenteil A) einplanen. Dies ist jedoch nur als Empfehlung zu verstehen.

Eine Pause zwischen den Aufgabenteilen findet nicht statt.

Arbeit mit diesem Buch

Die Aufgaben der **Musterprüfung** sowie der **Prüfungen 2024 bis 2026** dienen zur Orientierung für die Struktur und die Inhalte der Abiturprüfung.

Falls Sie bei einer Aufgabe nicht gleich eine Idee zur Lösung haben, helfen Ihnen die **Hinweise und Tipps**, einen Einstieg in die Aufgabe zu finden. Ihre erarbeitete Lösung können Sie mit den abgedruckten **ausführlichen Lösungsvorschlägen** vergleichen.

Üben Sie außerdem die Verwendung der Formelsammlung bzw. Merkhilfe bei der Lösung der Aufgaben im Teil B; Sie finden die aktuelle Fassung der Merkhilfe auf den Seiten des Landesbildungsservers Baden-Württemberg (https://www.schule-bw.de).

Die folgende Auflistung gibt einen groben Überblick über die Inhalte des gültigen Bildungsplans für das berufliche Gymnasium; für detaillierte Auskünfte steht der ausführliche Bildungsplan zur Verfügung. Sie finden diesen unter https://www.bildungsplaene-bw.de.

Pflichtteil

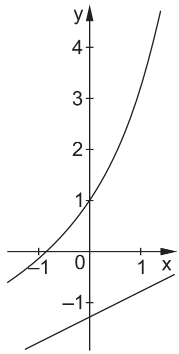
BE

Aufgabe 1: Analysis

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

a Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen. 2

b Für eine positive reelle Zahl c wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet.
Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g_c.
Die beiden Graphen schließen mit der y-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein.
Berechnen Sie c. 3



5

Aufgabe 2: Analysis

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = x^3 + x$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K.

a Zeigen Sie, dass K keine waagrechte Tangente besitzt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an K mit der Steigung 1. 3

b Eine der folgenden Abbildungen zeigt das Schaubild einer Stammfunktion von f.
Begründen Sie, welche dies ist. 2

5

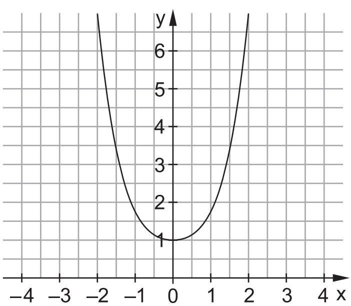


Abb. 1

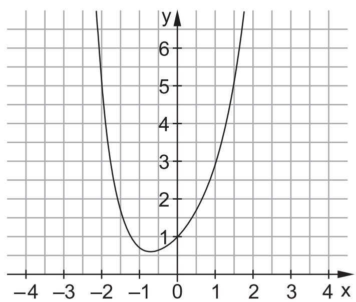


Abb. 2

Hinweise und Tipps – Pflichtteil

Aufgabe 1: Analysis

a **Tipp:**
Setzen Sie zur Bestimmung der gemeinsamen Punkte (= Schnittpunkte) die Funktionsterme gleich. Zeigen Sie, dass die Gleichung keine Lösung besitzt.

b **Tipps:**
- Skizzieren Sie die Problemstellung. Dabei ist die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Parallele zur y-Achse, welche die x-Achse bei 1 schneidet. Markieren Sie die gesuchte Fläche in der Skizze.
- Welche Lage haben die beiden Graphen zueinander? Schneiden sie sich auf dem angegebenen Intervall? Welcher Graph liegt im angegebenen Intervall oberhalb?
- Bestimmen Sie das Integral, welches die gesuchte Fläche zwischen den zwei Kurven angibt.
- Setzen Sie den Integralwert mit dem angegebenen Flächeninhalt gleich und lösen Sie die Gleichung nach c auf.

Aufgabe 2: Analysis

a **Tipps:**
- Was gibt die erste Ableitung einer Funktion an?
- Eine waagrechte Tangente hat die Steigung null ($m = 0$).
- Bestimmen Sie durch Ableiten die erste Ableitungsfunktion f'. Setzen Sie diese mit null gleich und zeigen Sie, dass die Gleichung $f'(x) = 0$ zu keiner Lösung führt.
- Wie lautet die Gleichung einer Tangente allgemein?
- Welche Informationen sind über die gesuchte Tangentengleichung bereits bekannt?
- Wie erhält man den Berührpunkt, an dem die Tangente an K anliegt?

b **Tipps:**
- Welche grafischen Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Stammfunktion existieren?
- Welche Eigenschaften besitzt das Schaubild von f und inwieweit kann man darüber Aussagen über das Schaubild ihrer Stammfunktion treffen?

Aufgabe 3: Stochastik

a **Tipp:**
Die Dichtefunktion einer Normalverteilung ist symmetrisch zur Geraden $x = \mu$. Dabei ist μ der Erwartungswert. Lesen Sie aus der Abbildung diesen Wert für x ab.

b **Tipps:**
- Die Gesamtfläche unter der Dichtefunktion hat den Wert 1.
- Überlegen Sie, wie groß die Fläche unter der Kurve wird, wenn X nur den einzelnen Wert 2,4 annimmt.

c **Tipps:**
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert zwischen 1 und 1,4 annimmt, entspricht der Fläche unter der Dichtefunktion im Intervall [1; 1,4].
- Markieren Sie diese Fläche in der Abbildung.
- Wie lässt sich die Fläche ohne Hilfsmittel möglichst einfach (näherungsweise) berechnen?

Lösungen – Pflichtteil

Aufgabe 1: Analysis

a **Begründung, dass keine gemeinsamen Punkte existieren**
Zur Bestimmung der gemeinsamen Punkte werden die Funktionsterme gleichgesetzt. Anschließend wird die Gleichung nach x umgeformt:

$$f(x) = g(x)$$

$$e^x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - 1 \quad \left| -\frac{1}{2}x \right.$$

$$e^x = -1$$

Die Gleichung $e^x = -1$ hat keine Lösung, da $e^x > 0$ (positiv) ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f und der Graph von g besitzen somit keinen gemeinsamen Punkt.

b **Bestimmung eines Parameters mithilfe der Integralrechnung**
Gesucht ist der Wert für den Parameter c, der sich durch die Fläche zwischen zwei Kurven bestimmt. Die untere Integralgrenze ergibt sich aus der Beschränkung durch die y-Achse $(a = 0)$ und die obere Integralgrenze ergibt sich durch die Beschränkung mit der Parallelen zur y-Achse $(b = 1)$.
Die Abbildung zeigt, dass der Graph der Funktion f auf dem Intervall [0; 1] oberhalb des Graphen der Funktion g_c (= Gerade) liegt. Daher kann man die Fläche mithilfe eines Integrals ermitteln (keine Schnittstelle, siehe Teilaufgabe a). Um einen positiven Integralwert zu erhalten, muss man die Differenz $f(x) - g_c(x)$ bilden.

Der Parameter c soll so bestimmt werden, dass die Fläche zwischen den zwei Graphen von f und g_c auf dem Intervall [0; 1] den Inhalt 3 hat. Man setzt das Integral mit 3 gleich und löst die Gleichung nach c auf:

$$\int_0^1 (f(x) - g_c(x))\,dx = 3$$

$$\int_0^1 \left(e^x + \frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{2}x - c\right)\right)dx = 3$$

$$\int_0^1 \left(e^x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + c\right)dx = 3$$

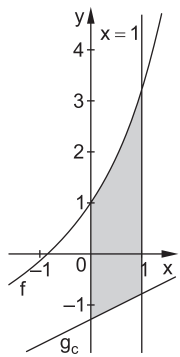
$$\int_0^1 (e^x + c)\,dx = 3$$

$$\left[e^x + cx\right]_0^1 = 3$$

$$e^1 + c - (e^0 + c \cdot 0) = 3$$

$$e + c - 1 = 3 \quad \left| +1 - e \right.$$

$$c = 4 - e$$



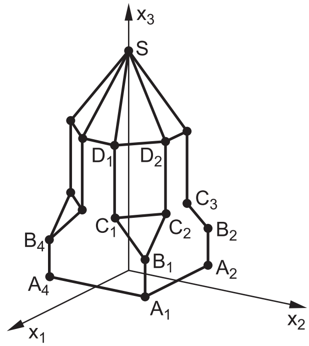
Anmerkung: Die Skizze ist nicht Teil der erwarteten Lösung. Sie soll Ihnen helfen, die Problemstellung besser zu verstehen.

Aufgabe 3 – Lehrerauswahl II: Lineare Algebra

BE

Ein Kirchturm hat einen quadratischen Grundriss. In einer gewissen Höhe geht der Kirchturm in ein achteckiges Prisma über. Das Dach hat die Form einer achteckigen Pyramide.

Der obere Teil des Kirchturms ist in der Abbildung dargestellt. Der quadratische Grundriss des Turms hat eine Seitenlänge von 6 Metern.



Die Punkte $A_1(3\,|\,3\,|\,0)$, $A_2(-3\,|\,3\,|\,0)$, … liegen in der x_1x_2-Ebene. Folgende weitere Punkte sind gegeben:

$B_1(3\,|\,3\,|\,2)$, $B_2(-3\,|\,3\,|\,2)$
$C_1(3\,|\,1\,|\,4)$, $C_2(1\,|\,3\,|\,4)$, $C_3(-1\,|\,3\,|\,4)$
$D_1(3\,|\,1\,|\,8)$, $D_2(1\,|\,3\,|\,8)$, $D_3(-1\,|\,3\,|\,8)$

Alle Punkte $B_{\dots}$ haben die x_3-Koordinate 2. Alle Punkte $C_{\dots}$ haben die x_3-Koordinate 4. Alle Punkte $D_{\dots}$ haben die x_3-Koordinate 8. Eine Längeneinheit entspricht 1 Meter.

a Zeichnen Sie das Quadrat $A_1A_2A_3A_4$ in ein zweidimensionales x_1x_2-Koordinatensystem ein.
Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem die orthogonalen Projektionen der Punkte C_1 und C_2 ein. 5

b Zeigen Sie, dass das Dreieck $C_1B_1C_2$ gleichseitig ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $C_1B_1C_2$. 5

Die Spitze S liegt auf der x_3-Achse.

c Vier der acht Dreiecksflächen des Daches sind parallel zu den jeweils unterhalb liegenden Dreiecksflächen.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Spitze S. 3

d Der Mittelpunkt der Strecke D_1D_2 ist M. Der Mittelpunkt der Strecke D_2D_3 ist N.
Begründen Sie, dass die Strecken MS und NS unterschiedliche Neigungswinkel haben. 3

e Der Kirchplatz liegt in einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene. Die Spitze S befindet sich 30 m über dem Kirchplatz.
An einem Sommertag scheint die Sonne in der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Dadurch wirft sie einen Schatten von S auf den Kirchplatz.
Berechnen Sie, wie groß der Abstand der Spitze S von deren Schattenpunkt ist. 4

20

Hinweise und Tipps

a **Tipps:**

- Die vier Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 liegen in der x_1x_2-Ebene. Die Koordinaten der Punkte A_3 und A_4 ergeben sich aus den gegebenen Koordinaten der Punkte A_1 und A_2, sodass Sie das Quadrat direkt in das x_1x_2-Koordinatensystem übertragen können.
- Bei orthogonaler Projektion der Punkte C_1 und C_2 in die x_1x_2-Ebene ändert sich bei beiden Punkten nur die x_3-Koordinate. Welchen Wert hat diese dann? Damit können Sie auch die Projektionen der Punkte C_1 und C_2 in das Koordinatensystem eintragen.

b **Tipps:**

- Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle Dreiecksseiten gleich lang. Stellt man die Dreiecksseiten als Vektoren dar, so ist also zu zeigen, dass gilt:
  $\left|\overrightarrow{C_1B_1}\right| = \left|\overrightarrow{B_1C_2}\right| = \left|\overrightarrow{C_1C_2}\right|$
- Ist M der Mittelpunkt der Dreiecksseite C_1C_2, dann lässt sich der Flächeninhalt A des gleichseitigen Dreiecks $C_1B_1C_2$ z. B. berechnen mit $A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MB_1}\right|$.

c **Tipps:**

- Da in Teilaufgabe b die Dreiecksfläche $C_1B_1C_2$ untersucht wurde, ist es naheliegend, mit der hierzu parallelen Dreiecksfläche D_1D_2S die Koordinaten der Spitze S zu ermitteln. Bestimmen Sie mit den Eckpunkten C_1, B_1 und C_2 eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck $C_1B_1C_2$ liegt (in Parameter- oder Koordinatenform).
- Wie lautet dann eine Ebenengleichung der Ebene F, die parallel zu E verläuft und das Dreieck D_1D_2S enthält?
- Da die Spitze S auf der x_3-Achse liegt und folglich die Koordinaten $S(0\,|\,0\,|\,s_3)$ hat, kann durch Punktprobe mit der Ebenengleichung der Ebene F die noch unbekannte x_3-Koordinate s_3 der Spitze S bestimmt werden.

d **Tipps:**

- Als Neigungswinkel der Strecken MS bzw. NS können die Winkel aufgefasst werden, die die Kanten MS bzw. NS mit der Horizontalen einschließen.
- Wählt man auf der x_3-Achse zusätzlich einen Punkt P so, dass er auf x_3-Höhe der Punkte D_1, D_2 und D_3 und damit auch der Punkte M und N liegt, so erhält man die beiden rechtwinkligen Dreiecke SPM und SPN. Wie lassen sich in diesen Dreiecken mithilfe der Winkelfunktion Tangens die beiden Neigungswinkel darstellen?
- Die Dreiecke stimmen in der gemeinsamen Dreiecksseite SP überein. In welcher Seitenlänge müssen sich also die beiden Dreiecke unterscheiden, damit die Tangenswerte und damit auch die Neigungswinkel unterschiedlich groß sind?
- Es ist also nachzuweisen, dass gilt: $\left|\overrightarrow{PM}\right| \neq \left|\overrightarrow{PN}\right|$

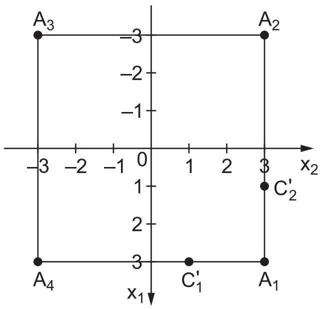
e **Tipps:**

- Erstellen Sie eine Skizze eines Längsschnitts des Kirchturms mit der Spitze S, dem Fußpunkt F der Kirchturmspitze auf dem Kirchplatz und dem Schattenpunkt T. In diesem rechtwinkligen Dreieck ist der Abstand der Punkte S und T dann als Länge der Hypotenuse ST zu bestimmen.
- Wie lange ist die Strecke SF laut Aufgabenstellung? Welchen Winkel φ schließt der Vektor $\vec{v}$ mit dem Vektor $\overrightarrow{SF}$ ein? Wie lässt sich somit im rechtwinkligen Dreieck SFT mit der Ankathete SF und dem Winkel φ die Hypotenuse ST, also der Abstand der Spitze S von deren Schattenpunkt T, berechnen?

Lösungen

a **Zeichnen des Quadrats $A_1A_2A_3A_4$ und der orthogonalen Projektionen von C_1 und C_2 in ein zweidimensionales x_1x_2-Koordinatensystem**

Das Quadrat $A_1A_2A_3A_4$ liegt nach Aufgabenstellung in der x_1x_2-Ebene und hat die Eckpunkte $A_1(3|3|0)$, $A_2(-3|3|0)$, $A_3(-3|-3|0)$ und $A_4(3|-3|0)$.
Die orthogonalen Projektionen der Punkte C_1 und C_2 in die x_1x_2-Ebene behalten die Werte der x_1- und x_2-Koordinaten bei, die x_3-Koordinate nimmt den Wert null an. Mit den Koordinaten der Projektionen $C_1'(3|1|0)$ und $C_2'(1|3|0)$ kann die Zeichnung etwa so aussehen:



b **Zeigen, dass das Dreieck $C_1B_1C_2$ gleichseitig ist**

Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle Dreiecksseiten gleich lang. Stellt man die Dreiecksseiten als Vektoren dar, so ergeben sich die drei Vektoren:

$$\overrightarrow{C_1B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_1C_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für ihre Längen erhält man:

$$\left|\overrightarrow{C_1B_1}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{B_1C_2}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Da alle Dreiecksseiten C_1B_1, B_1C_2 und C_1C_2 die gleiche Länge $\sqrt{8}\text{ m} = 2\sqrt{2}\text{ m}$ haben, ist das Dreieck $C_1B_1C_2$ gleichseitig.

Berechnen des Flächeninhalts des Dreiecks $C_1B_1C_2$

Ein gleichseitiges Dreieck ist auch gleichschenklig. Ist M der Mittelpunkt der Dreiecksseite C_1C_2, dann lässt sich der Flächeninhalt A des Dreiecks $C_1B_1C_2$ daher zum Beispiel berechnen mit $A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{C_1C_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MB_1}\right|$.

Mit $M\left(\frac{3+1}{2}\,\middle|\,\frac{1+3}{2}\,\middle|\,\frac{4+4}{2}\right)=M(2|2|4)$ ergibt sich für den Vektor:

$$\overrightarrow{MB_1}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Als Länge dieses Vektors $\overrightarrow{MB_1}$ erhält man:

$$\left|\overrightarrow{MB_1}\right|=\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

Mit $\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right|=2\sqrt{2}$ (siehe oben!) und $\left|\overrightarrow{MB_1}\right|=\sqrt{6}$ gilt:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{C_1C_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MB_1}\right|=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks $C_1B_1C_2$ beträgt $2\sqrt{3}\ m^2$.

c **Ermitteln der Koordinaten der Spitze S des Kirchturms**

Da in Teilaufgabe b die Dreiecksfläche $C_1B_1C_2$ untersucht wurde, ist es naheliegend, mit der hierzu parallelen Dreiecksfläche D_1D_2S die Koordinaten der Spitze S zu ermitteln.

Sei E die Ebene, in der das Dreieck $C_1B_1C_2$ liegt, so kann mit dessen Eckpunkten und den bereits in Teilaufgabe b berechneten Vektoren eine Ebenengleichung dieser Ebene E in Parameterform bestimmt werden:

$$E:\ \vec{x}=\overrightarrow{OB_1}+\alpha\cdot\overrightarrow{B_1C_1}+\beta\cdot\overrightarrow{B_1C_2}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix};\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Zur Angabe der Ebenengleichung von E in Koordinatenform berechnet man einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene, z. B. mit dem Vektorprodukt der Spannvektoren $\overrightarrow{B_1C_1}$ und $\overrightarrow{B_1C_2}$:

$$\vec{n}=\overrightarrow{B_1C_1}\times\overrightarrow{B_1C_2}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 2-2\cdot 0\\2\cdot(-2)-0\cdot 2\\0\cdot 0-(-2)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}$$

Somit hat die Koordinatenform der Ebene E zunächst die Form:

$-4x_1-4x_2-4x_3=b$

Durch Punktprobe mit dem Punkt B_1 (oder C_1 oder C_2) erhält man für b den Wert:

$b=-4\cdot 3-4\cdot 3-4\cdot 2=-32$

Die Ebenengleichung von E in Koordinatenform lautet also:

$E:\ -4x_1-4x_2-4x_3=-32$

Die Ebene F, in der das Dreieck D_1D_2S liegt, ist nach Aufgabenstellung parallel zur Ebene E. Deshalb steht jeder Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E ebenfalls senkrecht auf der Ebene F. Die Koordinatenform der Ebene F hat somit zunächst die Form:

$F:\ -4x_1-4x_2-4x_3=c$

Den Wert von c berechnet man durch Punktprobe mit Punkt D_1 (oder D_2). Man erhält:

$c=-4\cdot 3-4\cdot 1-4\cdot 8=-48$

Die Ebenengleichung der Ebene F in Koordinatenform lautet somit:

$F:\ -4x_1-4x_2-4x_3=-48$

Die Kirchturmspitze S liegt auf der x_3-Achse. Sie hat also die Koordinaten $S(0|0|s_3)$. Außerdem ist S ein Punkt der Ebene F. Die fehlende x_3-Koordinate von S kann deshalb durch Punktprobe mit der Ebenengleichung von F bestimmt werden.