2027

>30 Millionen
bestandene
Prüfungen

50 Jahre STARK

STARK Prüfun

MEHR ERFAHREN

G9 Abit

NRW

Mathematik LK

- Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen
- Übungsaufgaben für CAS/MMS und den neuen WTR
- Interaktives Training

PDF

Inhaltsverzeichnis

Original-Abituraufgaben

Abiturprüfung 2023

Abiturprüfung 2024

* Teilaufgabe b ist nicht mehr prüfungsrelevant.

Abiturprüfung 2025

* Teilaufgabe c ist nicht mehr prüfungsrelevant.

Abiturprüfung 2026 .... **www.stark-verlag.de/mystark**

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2026 freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vorne im Buch).

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Leistungskurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **G9-Abitur 2027** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung 2027**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der relevanten inhaltlichen Schwerpunkte, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie zahlreiche praktische Hinweise, die Ihnen dabei helfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der schriftlichen Abiturprüfung, die für den Einsatz des **WTR** geeignet sind.
- Zusätzlich enthält das Buch die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2023 bis 2025** für den **CAS/MMS** und auf MySTARK den Jahrgang **2026**.
- Zu allen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MySTARK:**
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres CAS
  - **Lernvideos** zu Aufgaben aus Prüfungsteil A
  - **Jahrgang 2026**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2021 und 2022** mit Lösungen
  - **Original-Prüfungsaufgaben** des Jahres **2023** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2027 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MySTARK.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr STARK Verlag

Hinweise und Tipps zum Abitur 2027

1 Ablauf der Prüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik besteht aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, der komplexere Aufgaben **mit Hilfsmitteln** enthält.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Leistungskurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

– Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Er besteht aus einem Pflicht- und einem Wahlpflichtteil.
  Der **Pflichtteil** enthält vier Aufgaben: zwei Aufgaben aus der Analysis und je eine Aufgabe aus der Vektoriellen Geometrie und der Stochastik. Alle **vier Aufgaben müssen bearbeitet** werden.
  Der **Wahlpflichtteil** enthält sechs Aufgaben: zwei aus der Analysis, zwei aus der Vektoriellen Geometrie und zwei aus der Stochastik. Die Schülerinnen und Schüler wählen ohne Einschränkungen aus diesen sechs Aufgaben **zwei beliebige Aufgaben** aus, die sie lösen.
  Insgesamt werden also im Prüfungsteil A **sechs Aufgaben** bearbeitet.
  Beim Lösen der Aufgaben dürfen **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.
  Zugelassenes **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil A:
  - Deutsches Wörterbuch

– Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze: einen WTR-Aufgabensatz und einen CAS/MMS-Aufgabensatz
  Jeder Aufgabensatz beinhaltet zwei Analysisaufgaben, eine Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und eine Stochastikaufgabe.
  Die **Fachlehrkraft** wählt eine der beiden Analysisaufgaben aus. Die Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und die Aufgabe zur Stochastik sind verbindlich festgelegt. Insgesamt gibt es also eine **Analysisaufgabe**, eine Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und eine Aufgabe zur **Stochastik**.

  Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:
  - WTR (einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner) **oder** CAS/MMS (Computer-Algebra-System/modulares Mathematiksystem)
  - Mathematische Formelsammlung
  - Deutsches Wörterbuch

1.3 Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen den Schülerinnen und Schülern im Leistungskurs insgesamt **300 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit einschließlich Auswahlzeit für den Prüfungsteil A, der zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 110 Minuten. Sobald die Prüflinge mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können sie ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel.
Sollte der Prüfungsteil A schneller bearbeitet werden können, darf auch schon früher mit dem Prüfungsteil B begonnen werden. Dann steht für diesen entsprechend mehr Zeit zur Verfügung.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Leistungskurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2027** sind folgende:

2.1 Funktionen und Analysis

Funktionen

- ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Sinusfunktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ sowie entsprechende Kosinusfunktionen

Eigenschaften von Funktionen

- Verlauf des Graphen
- Definitions- und Wertebereich
- Nullstellen
- Symmetrie
- Verhalten für $x \to \pm\infty$

(für ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, natürliche Logarithmusfunktion, Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und Transformationen dieser Funktionen)

Fortführung der Differentialrechnung

- Produkt- und Kettenregel
- Funktionsscharen
- Extremwertprobleme
- Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)
- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen sowie von Sinus- und Kosinusfunktionen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
- Hilfsmittelfrei: Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten, Produkt- und Kettenregel

Integralrechnung

- Produktsumme
- orientierte Fläche
- Bestandsfunktion
- Integralfunktion
- Stammfunktion
- bestimmtes Integral
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Übungsaufgabe 2 (WTR)

Eingeschlossen von der Bundesstraße B 480 und einem Feldweg, die in einem geeigneten Koordinatensystem entlang der Koordinatenachsen verlaufen, und dem Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{8}(x-2)^2 \cdot (x+2)^2,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ x \geq 0$$

befindet sich ein See. Der Sachverhalt ist in Abbildung 1 skizziert.
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 1 km in Wirklichkeit.

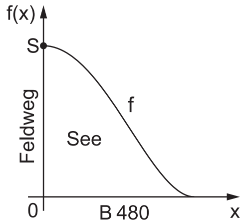


Abbildung 1

a) (1) Untersuchen Sie, wie lang der See in Richtung der B480 und wie breit der See in Richtung des Feldweges jeweils ist.

(2) Ermitteln Sie rechnerisch, in welchem Winkel das Ufer des Sees den Feldweg trifft.

b) Es wird vermutet, dass im Punkt S des Sees eine Verschmutzung stattgefunden hat. Es werden Wasserproben entnommen und die Anzahl der Kleinlebewesen in den Proben wird ermittelt. Die Ergebnisse der Proben sind in der Tabelle dargestellt:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250

Tabelle

(1) Begründen Sie, warum im angegebenen Zeitraum von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden kann.

(2) Die Anzahl der Kleinlebewesen in den Proben soll durch eine Funktion der Form $a(t) = b \cdot e^{kt},\ \ 0 \leq t \leq 21$ modelliert werden, wobei die Parameter b und k geeignet zu wählen sind und t als Maßzahl zur Einheit 1 Tag sowie a(t) als die Anzahl der Kleinlebewesen zum Zeitpunkt t aufgefasst wird.
Bestimmen Sie die Parameter b und k unter Berücksichtigung, dass zu Beginn der Beobachtung 2 000 Kleinlebewesen und nach 21 Tagen nur noch 250 Kleinlebewesen vorhanden sind.

(3) Berechnen Sie, während welchen Tages nach Beobachtungsbeginn gemäß der Modellierung nur noch 30 % des ursprünglich ermittelten Anfangsbestandes an Kleinlebewesen vorhanden sind.

TIPP **Lösungshinweise – Übungsaufgabe 2**

Teilaufgabe a

(1) Gesucht werden die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
Setzen Sie den Funktionsterm gleich null bzw. setzen Sie null in den Funktionsterm ein.
Beachten Sie, dass eine Einheit 1 km entspricht.

(2) Multiplizieren Sie die Funktionsgleichung aus, bevor Sie die Ableitung bilden.
Setzen Sie null in die erste Ableitung ein.
Was bedeutet es, wenn die Steigung null ist?

Teilaufgabe b

(1) Gehen Sie von der exponentiellen Funktion $h(t) = B_0 \cdot q^t$ aus. B_0 ist der Anfangsbestand zu Beginn der Beobachtung.
Prüfen Sie, ob man die Werte in der Tabelle mit einem annähernd gleichen Wachstumsfaktor q modellieren kann.

(2) Stellen Sie mithilfe der vorgegebenen Wertepaare ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

(3) Berechnen Sie 30 % des Anfangsbestandes. Setzen Sie das Ergebnis mit dem Funktionsterm gleich und lösen Sie die Gleichung.

Teilaufgabe c

(1) Die Funktion G_a ist eine Stammfunktion von g_a, wenn $G'_a(x) = g_a(x)$ gilt.
Verwenden Sie die Produkt- und Kettenregel beim Ableiten.

(2) Der verschmutzte Bereich entspricht dem Flächeninhalt, den die Funktionenschar g_a mit der x-Achse einschließt.
Stellen Sie diesen Flächeninhalt mithilfe eines bestimmten Integrals dar.
Die zweite Grenze des Integrals ist die Nullstelle von g_a.
Leiten Sie dann mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung eine integralfreie Darstellung her.

(3) Eine Funktion ist dann streng monoton steigend, wenn ihre 1. Ableitung größer als null ist.

(4) Nutzen Sie aus, dass die Funktion A(a) nach Teilaufgabe c (3) streng monoton steigend ist und ihr Maximum am rechten Rand des Definitionsbereichs annimmt.
Berechnen Sie die gesamte Seefläche mit einem geeigneten Verfahren.
Überlegen Sie, welcher Wert der Grundwert ist, und berechnen Sie den prozentualen Anteil.

Lösungsvorschlag – Übungsaufgabe 2

a) (1) Um die Länge des Sees in Richtung der B480 zu berechnen, werden die Nullstellen benötigt. Diese lassen sich direkt aus der Funktionsgleichung ablesen. Wegen $x \geq 0$ gilt:
$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

Um die Breite des Sees in Richtung des Feldweges zu berechnen, wird der Schnittpunkt mit der y-Achse benötigt. Dazu wird f(0) berechnet:

$$f(0) = \frac{1}{8}(0-2)^2 \cdot (0+2)^2 = \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot 4 = 2$$

Die Breite und die Länge des Sees betragen jeweils 2 km.

(2) Zunächst wird die Funktionsgleichung ausmultipliziert:

$$f(x) = \frac{1}{8}(x-2)^2 \cdot (x+2)^2 = \frac{1}{8}\big((x-2) \cdot (x+2)\big)^2$$
$$= \frac{1}{8}(x^2-4)^2 = \frac{1}{8}(x^4 - 8x^2 + 16) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$$

Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit der Summen- und Potenzregel bestimmt:

$$f'(x) = \frac{1}{8} \cdot 4x^3 - 2x = \frac{1}{2}x^3 - 2x$$

Da man sich für die Steigung am Schnittpunkt mit dem Feldweg interessiert, muss null in die erste Ableitung eingesetzt werden:

$$f'(0) = \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 = 0$$

Der Graph der Funktion f hat am Schnittpunkt eine waagrechte Tangente. Die y-Achse, die in diesem Fall dem Feldweg entspricht, wird daher im rechten Winkel vom Ufer getroffen.

b) (1) Von einer exponentiellen Abnahme kann dann ausgegangen werden, wenn der Abnahmefaktor je Zeiteinheit annähernd gleich ist.
Ist B_0 der Anfangsbestand und q der Abnahmefaktor, so erhält man zu den angegebenen Zeiten bei einer exponentiellen Abnahme folgende allgemeine Werte:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250
Werte bei exponentieller Abnahme	B_0	$B_0 \cdot q^1$	$B_0 \cdot q^4$	$B_0 \cdot q^{10}$	$B_0 \cdot q^{21}$

Aus der ersten Spalte der Tabelle kann der Anfangsbestand $B_0 = 2\,000$ abgelesen werden. Aus den weiteren Spalten erhält man dann:

$$1\,810 = 2\,000 \cdot q^1 \;\Rightarrow\; q = \frac{1\,810}{2\,000} = 0{,}905$$

$$1\,350 = 2\,000 \cdot q^4 \;\Rightarrow\; q = \sqrt[4]{\frac{1\,350}{2\,000}} \approx 0{,}906$$

$$740 = 2\,000 \cdot q^{10} \;\Rightarrow\; q = \sqrt[10]{\frac{740}{2\,000}} \approx 0{,}905$$

$$250 = 2\,000 \cdot q^{21} \;\Rightarrow\; q = \sqrt[21]{\frac{250}{2\,000}} \approx 0{,}906$$

Der Wachstumsfaktor q ist annähernd gleich. Daher kann von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden.

(2) Unter Berücksichtigung der beiden im Aufgabentext angegebenen Probenergebnisse ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & a(0) = b \cdot e^{k \cdot 0} & \Leftrightarrow & 2\,000 = b \cdot e^0 & \Leftrightarrow\; 2\,000 = b \\ \text{II} & a(21) = b \cdot e^{k \cdot 21} & \Leftrightarrow & 250 = b \cdot e^{k \cdot 21} & \end{array}$$

Einsetzen von $b = 2\,000$ aus Gleichung I in Gleichung II führt auf:

$$\begin{array}{rrll} & 250 = 2\,000 \cdot e^{k \cdot 21} & & |:2\,000 \\ \Leftrightarrow & 0{,}125 = e^{k \cdot 21} & & |\ln \\ \Leftrightarrow & \ln(0{,}125) = k \cdot 21 & & |:21 \\ \Leftrightarrow & k \approx -0{,}099 & & \end{array}$$

Die Modellierung führt also auf eine Funktion mit der Gleichung:

$a(t) = 2\,000 \cdot e^{-0{,}099t},\; 0 \le t \le 21$

(3) 30 % des Anfangsbestandes sind:
$0{,}3 \cdot 2\,000 = 600$

Gesucht ist also der Wert t, für den gilt:

$$\begin{array}{rrll} & 600 = 2\,000 \cdot e^{-0{,}099t} & & |:2\,000 \\ \Leftrightarrow & 0{,}3 = e^{-0{,}099t} & & |\ln \\ \Leftrightarrow & \ln(0{,}3) = -0{,}099 \cdot t & & |:(-0{,}099) \\ \Leftrightarrow & t \approx 12{,}161 & & \end{array}$$

Wegen $t \approx 12{,}161 > 12$ sind während des 13. Tages nur noch 30 % der zu Beobachtungsbeginn ermittelten Kleinlebewesen in den Proben enthalten.

Prüfungsteil A (Aufgaben ohne Hilfsmittel)

Punkte

Die folgenden vier Pflichtaufgaben müssen alle bearbeitet werden.

Pflichtaufgabe 1

Für $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k und g_k gegeben durch:
$f_k(x) = x \cdot (x - k)$ und $g_k(x) = k \cdot x$.

(1) Zeigen Sie für alle $k > 0$, dass die Graphen von f_k und g_k genau zwei Schnittstellen bei $x = 0$ und $x = 2k$ haben. 2

(2) Abbildung 1 zeigt die Graphen von f_1 und g_1.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die im I. Quadranten von den Graphen von f_1 und g_1 und der x-Achse eingeschlossen wird. 3

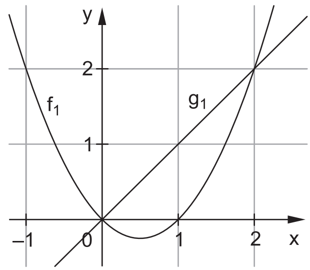


Abbildung 1

Pflichtaufgabe 2

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a durch $f_a(x) = x \cdot e^{-a \cdot x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Jeder Graph der Schar verläuft durch den Koordinatenursprung.

(1) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar im Koordinatenursprung die gleiche Steigung haben. 3

(2) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sind. 2

Pflichtaufgabe 3

Abbildung 2 zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 LE in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen.
Die Ebene K enthält die Punkte $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$ und den Mittelpunkt der Kante $\overline{FG}$.

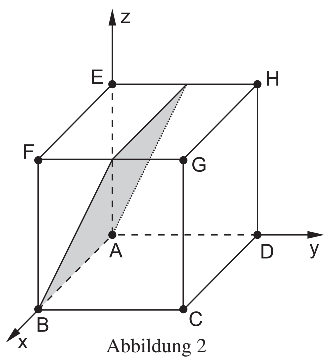


Abbildung 2

TIPP **Lösungshinweise – Prüfungsteil A** (Aufgaben ohne Hilfsmittel)

Pflichtaufgabe 1

(1) Setzen Sie die Funktionen f_k und g_k gleich und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung.

(2) Ermitteln Sie die Fläche, die die Graphen von f_1 und g_1 miteinander einschließen.
Verwenden Sie dafür ein Integral und die Differenzfunktion $g_1(x) - f_1(x)$ und passende Integrationsgrenzen.
Die Fläche unterhalb der x-Achse soll nicht mitberechnet werden.
Berechnen Sie deren Flächeninhalt und ziehen Sie ihn vom oben berechneten Wert ab.
Alternativ: Zerlegen Sie die Fläche in ein Dreieck und eine Fläche, die von den beiden Graphen von f_1 und g_1 begrenzt wird. Addieren Sie die beiden Flächeninhalte.

Pflichtaufgabe 2

(1) Bestimmen Sie mithilfe der Ketten- und Produktregel die Ableitung von f_a.
Ermitteln Sie damit die Steigung im Punkt $x = 0$.

(2) Ein Graph ist punktsymmetrisch, wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Pflichtaufgabe 3

(1) Überlegen Sie, wie viele der kleineren Teilkörper in den Würfel passen.
Berechnen Sie das Volumen des Würfels und teilen Sie das Volumen durch diese Anzahl.

(2) Ermitteln Sie die Schnittgerade, indem Sie einen geeigneten Stütz- und einen Richtungsvektor wählen.
Die Gerade muss nicht rechnerisch bestimmt werden.

Pflichtaufgabe 4

(1) Schätzen Sie die Werte P für $16 \leq X \leq 20$ anhand der Abbildung 3 ab.
Prüfen Sie, ob diese zusammen größer als 0,5 sind.

(2) Lesen Sie die Erwartungswerte beider Verteilungen ab und vergleichen Sie sie.
Verwenden Sie die Formel $\mu = n \cdot p$ für binomialverteilte Zufallsgrößen.

Wahlpflichtaufgabe 1

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.
Überprüfen Sie, ob die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ an der Stelle 2 erfüllt ist.
Beziehen Sie in Ihre Begründung $f''(2) \neq 0$ mit ein.

Pflichtaufgabe 1

(1) Gleichsetzen von f_k und g_k ergibt:

$$\begin{aligned} g_k(x) = f_k(x) \quad &\Leftrightarrow \quad k \cdot x = x \cdot (x - k) \\ &\Leftrightarrow \quad k \cdot x = x^2 - k \cdot x \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 2k \cdot x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \cdot (x - 2k) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 2k \end{aligned}$$

Wegen $k > 0$ gibt es genau zwei Schnittstellen.

(2) Die Graphen von f_1 und g_1 schneiden sich bei $x = 0$ und $x = 2$.
Für den Flächeninhalt zwischen den Graphen f_1 und g_1 gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (g_1(x) - f_1(x))\,dx &= \int_0^2 (x - x \cdot (x - 1))\,dx \\ &= \int_0^2 (x - (x^2 - x))\,dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 2 \cdot x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 4 - 0 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Von dieser Fläche muss die Fläche unterhalb der x-Achse abgezogen werden. Dazu müssen vorher die Nullstellen von f_1 berechnet werden. Mit dem Satz des Nullprodukts gilt:

$f_1(x) = x \cdot (x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \lor x = 1$

Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, gilt:

$$-\int_0^1 (x \cdot (x - 1))\,dx = -\int_0^1 (x^2 - x)\,dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

Für die gesuchte Fläche ergibt sich:

$\frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$ [FE]

Alternativ:
Die gesuchte Fläche kann in zwei Flächen zerlegt werden.
Eine der beiden Flächen ist die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen von g_1 im Intervall [0; 1]. Hierbei handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{2}$.
Die andere Fläche ist die Fläche zwischen den Graphen von f_1 und g_1 im Intervall [1; 2]. Diese Fläche wird mithilfe eines Integrals berechnet.
Zusammen ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\int_1^2 (g_1(x)-f_1(x))\,dx &= \frac{1}{2}+\int_1^2 (x-x\cdot(x-1))\,dx\\ &= \frac{1}{2}+\int_1^2 (x-(x^2-x))\,dx\\ &= \frac{1}{2}+\int_1^2 (-x^2+2\cdot x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_1^2\\ &= \frac{1}{2}+\left(-\frac{8}{3}+4-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}+3-\frac{7}{3}\\ &= \frac{7}{6}\,[\text{FE}]\end{aligned}$$

Pflichtaufgabe 2

(1) Mithilfe der Ketten- und Produktregel ergibt sich:
$f_a'(x)=1\cdot e^{-a\cdot x^2}+x\cdot(-2a\cdot x\cdot e^{-a\cdot x^2})$
Setzt man $x=0$ ein, so erhält man:
$f_a'(0)=e^{-a\cdot 0}+0=e^0=1$ für alle Werte von a
Alle Graphen der Schar haben unabhängig von a die Steigung 1.

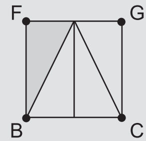
(2) $f_a(-x)=-x\cdot e^{-a\cdot(-x)^2}=-x\cdot e^{-a\cdot x^2}=-f_a(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$

Pflichtaufgabe 3

(1) Das Volumen des Würfels beträgt:

$V_{\text{Würfel}} = 4^3$

TIPP Der kleinere Teilkörper ist ein Prisma, dessen Grundfläche ein Dreieck ist. Die Fläche des Dreiecks entspricht einem Viertel der Fläche des Quadrats BCGF. Daher ist das Volumen des kleineren Teilkörpers ein Viertel des Volumens des Würfels.



Da vier der kleineren Teilkörper in den Würfel passen, gilt für das Volumen des kleineren Teilkörpers:

$$V_{TK} = \frac{1}{4} \cdot 4^3 = 16\,[\text{VE}]$$

Alternativ:
Der kleinere Teilkörper ist ein geradliniges Prisma der Höhe 4 LE mit einem rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche. Die Längen der Katheten des rechtwinkligen Dreiecks betragen 4 LE und $\frac{4}{2}$ LE = 2 LE. Damit gilt:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4\,[\text{FE}]$$

$$V_{\text{Prisma}} = 4 \cdot 4 = 16\,[\text{VE}]$$

(2) Als Stützvektor eignet sich ein Vektor, der auf einen gemeinsamen Punkt der beiden Ebenen zeigt, z. B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Als Richtungsvektor wählt man einen Vektor, der sowohl in E_K als auch in E_L liegt, z. B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich für die Schnittgerade folgende Gleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$