

2027

>30 Millionen  
bestandene  
Prüfungen

50  
Jahre  
STARK

**STARK**  
Prüfung

**MEHR  
ERFAHREN**

**Abitur**

Niedersachsen

**Mathematik gA**

- ✓ Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen
- ✓ Übungsaufgaben
- ✓ Lernvideos zur GTR/CAS-Nutzung



# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

## Stichwortverzeichnis

### Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

---

1	Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung .....	I
2	Die Inhalte in der Einführungs- und Qualifikationsphase .....	III
3	Bewertung der Prüfungsarbeiten .....	VI
4	Operatoren in zentralen Prüfungsaufgaben Mathematik .....	VI
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung ...	X
6	Hinweise und Tipps zum Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern ..	XI
7	Weiterführende Informationen .....	XVII

### Übungsaufgaben zum Pflichtteil

---

Analysis .....	1
Stochastik .....	2
Analytische Geometrie .....	4
Lösungsvorschlag .....	5

### Übungsaufgaben zum Wahlteil

---

#### Analysis

Übungsaufgabe 1: Rutschbahn (GTR) .....	16
Übungsaufgabe 2: Bakterien (GTR) .....	21
Übungsaufgabe 3: Das approximierte Dreieck (CAS) .....	27

## Stochastik

Übungsaufgabe 1: Sportlerkontrollen (CAS) .....	32
Übungsaufgabe 2: Gripeschutz (GTR) .....	36
Übungsaufgabe 3: Ziehen aus zwei Urnen (GTR/CAS) .....	40

## Analytische Geometrie

Übungsaufgabe 1: Ölbohrinsel (GTR) .....	44
Übungsaufgabe 2: Eine Raute im Raum (CAS) .....	47
Übungsaufgabe 3: Geraden im Raum (GTR/CAS) .....	51

---

## Original-Abituraufgaben

---

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MySTARK.

## Abiturprüfung 2023

Pflichtteil .....	2023-1
Aufgabe 1A – Rechnerartyp: CAS/GTR – Analysis .....	2023-6
Aufgabe 1B – Rechnerartyp: CAS/GTR – Analysis .....	2023-14
Aufgabe 2A – Rechnerartyp: GTR/CAS – Stochastik .....	2023-22
Aufgabe 2B – Rechnerartyp: CAS/GTR – Stochastik .....	2023-28
Aufgabe 3A – Rechnerartyp: GTR/CAS – Geometrie/Algebra .....	2023-33
Aufgabe 3B – Rechnerartyp: CAS/GTR – Geometrie/Algebra .....	2023-39

## Abiturprüfung 2024

Prüfungsteil A .....	2024-1
Prüfungsteil B – 1A (CAS) – Analysis .....	2024-10
Prüfungsteil B – 1B (CAS) – Analysis .....	2024-19
Prüfungsteil B – 2A (CAS/GTR) – Stochastik .....	2024-26
Prüfungsteil B – 2B (CAS/GTR) – Stochastik .....	2024-32
Prüfungsteil B – 3A (CAS/GTR) – Geometrie/Algebra .....	2024-37
Prüfungsteil B – 3B (CAS) – Geometrie/Algebra .....	2024-43

## Abiturprüfung 2025

Prüfungsteil A .....	2025-1
Prüfungsteil B – 1A (CAS) – Analysis .....	2025-11
Prüfungsteil B – 1B (CAS) – Analysis .....	2025-19
Prüfungsteil B – 2A (CAS/GTR) – Stochastik .....	2025-25
Prüfungsteil B – 2B (CAS/GTR) – Stochastik .....	2025-30
Prüfungsteil B – 3A (CAS/GTR) – Geometrie/Algebra .....	2025-34
Prüfungsteil B – 3B (CAS/GTR) – Geometrie/Algebra .....	2025-38

## Abiturprüfung 2026 ..... [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark)

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2026 freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vorne im Buch).



Bei **MySTARK** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs, inklusive **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen, teilweise mit Veranschaulichung durch **Videos**
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2026**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2023 bis 2025** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

## Autoren

Volker Honkomp (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2023 bis 2026)

Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben)

Hartmut Müller-Sommer (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben)

# Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2027 im Grundlegenden Anforderungsniveau in Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Grundlegende Anforderungsniveau viele Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2027**. Diese sind auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2023 bis 2026**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MySTARK**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2026**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2023 bis 2025**, die nicht im Buch abgedruckt sind



Die Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Hartmut Müller-Sommer    Volker Honkomp    Josef Rolfs



# Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

## 1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

### 1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen: dem **Prüfungsteil A**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und dem **Prüfungsteil B**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.

Manche Aufgaben aus Prüfungsteil A und Prüfungsteil B werden länderübergreifend gestellt.

### 1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A** müssen insgesamt **fünf Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie bearbeitet werden. Die Aufgaben werden in die Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2 unterteilt. Die Aufgabengruppe 1 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II. Die Aufgabengruppe 2 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II, wobei mindestens eine Teilaufgabe auch den Anforderungsbereich III erreicht.

Den Schülerinnen und Schülern werden je eine Aufgabe aus der Analysis, eine aus der Stochastik und eine aus der Analytischen Geometrie vorgelegt, die alle drei bearbeitet werden müssen. Diese kommen alle aus der Aufgabengruppe 1.

Zusätzlich erhalten die Schülerinnen und Schüler zu jedem der drei Sachgebiete jeweils eine weitere Aufgabe der Aufgabengruppe 1 und eine der Aufgabengruppe 2. Aus jeder der beiden Aufgabengruppen muss von den drei Aufgaben eine beliebige bearbeitet werden.

Ein Prüfling könnte aus der Aufgabengruppe 1 beispielsweise die Analysisaufgabe und aus der Aufgabengruppe 2 die Aufgabe zur Analytischen Geometrie bearbeiten. Insgesamt hat er dann fünf Aufgaben im Prüfungsteil A bearbeitet.

Die Aufgaben des Prüfungsteils A sind mit jeweils 5 Bewertungseinheiten gleichgewichtet. Hier können insgesamt **25 Bewertungseinheiten** erreicht werden.

Im **Prüfungsteil B** werden den Schülerinnen und Schülern je zwei Aufgaben aus der Analysis, aus der Stochastik und aus der Analytischen Geometrie vorgelegt. Sie müssen aus jedem der drei Bereiche jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten. In der Analysisaufgabe können 25 Bewertungseinheiten erreicht werden, in der Stochastik und der Analytischen Geometrie jeweils 15. Die Aufgaben des Wahlteils ergeben insgesamt **55 Bewertungseinheiten**.

### 1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit beträgt **285 Minuten**. Zu Beginn der Prüfung werden die Aufgaben des Prüfungsteils A und alle Aufgaben des Prüfungsteils B ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst, wann sie den Prüfungsteil A abgeben. Dies muss spätestens nach 100 Minuten erfolgen. Anschließend erhalten sie die zugelassenen Hilfsmittel.

### 1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Wahlteil

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgelegt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:

- **GTR:** grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS
- **CAS:** computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.

In der Abiturprüfung sollen die Schülerinnen und Schüler die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:

- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.

Weiter sind zur Abiturprüfung die auf den Seiten des IQB veröffentlichte „Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung“ und Handbücher der Rechner zugelassen.

## 2 Die Inhalte in der Einführungs- und Qualifikationsphase

---

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden wie jedes Jahr durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2027“ weitere Angaben gemacht.

Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

### 2.1 Analysis

#### Einführungsphase

##### Elementare Funktionenlehre

- Funktionsbegriff
- Potenzfunktionen
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Exponentialfunktionen
- $g(x) = a \cdot f \cdot (b \cdot (x - c)) + d$  mit Auswirkungen auf den Graphen
- Parametervariationen
- ganzrationale Funktionen
- Nullstellen (Linearfaktorzerlegung)
- Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten

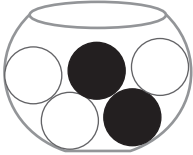
##### Ableitungen

- mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante
- lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente
- Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen
- Ableitungsfunktion
- Tangenten- und Normalengleichung
- Zusammenhang zwischen Funktionsgraph und Ableitungsgraph
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte
- Ableitungsfunktionen zu  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f(x) = \sin(x)$ ,  $f(x) = \cos(x)$
- Summen-, Faktor- und Potenzregel
- notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte
- Ableitung ganzrationaler Funktionen
- Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen
- Lösen linearer Gleichungssysteme

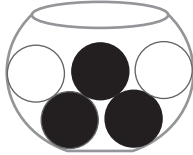


## Übungsaufgabe 3 (GTR/CAS)

### Ziehen aus zwei Urnen



Urne A



Urne B

In zwei Urnen A und B befinden sich jeweils 5 Kugeln. In der Urne A befinden sich 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. In der Urne B befinden sich 3 schwarze und 2 weiße Kugeln.

- a) Ein Spieler zieht dreimal nacheinander aus der Urne A eine Kugel und legt diese nach dem Zug in die Urne A zurück.  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einmal eine schwarze Kugel gezogen wird.
- b) Der Spieler zieht nun aus der Urne A und aus der Urne B jeweils eine Kugel.  
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er 2 gleichfarbige Kugeln zieht.

Die gezogenen Kugeln werden zurück in die jeweiligen Urnen gelegt, sodass wieder die ursprünglichen Urnen betrachtet werden.

- c) Aus beiden Urnen wird zufällig jeweils eine Kugel entnommen und in die jeweils andere Urne gelegt.  
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass sich die Anteile der schwarzen und weißen Kugeln in den jeweiligen Urnen nach diesem Vorgang verändert haben.
- d) Alle Kugeln werden nun in eine gemeinsame Urne umgefüllt. Es befinden sich also 5 weiße und 5 schwarze Kugeln in der Urne. Es werden nun 3 Kugeln gleichzeitig herausgezogen.  
Begründen Sie, dass der Term  $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$  die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln genau 2 schwarze Kugeln befinden.  
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis  
(1) mithilfe des Rechners.  
(2) ohne Einsatz des Rechners.

**Teilaufgabe a***Bestimmung der ersten Wahrscheinlichkeit*

Beachten Sie, dass die gezogene Kugel nach jedem Zug in die Urne A zurückgelegt wird.

Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln“ ist daher binomialverteilt mit der Stichprobengröße  $n=3$  und der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = \frac{2}{5}$ .

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen „Erfolg“. Sie können hierfür die **binomcdf**-Funktion des Rechners nutzen oder mithilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses die Komplementärregel anwenden.

**Teilaufgabe b***Bestimmung der zweiten Wahrscheinlichkeit*

Mit einem geeigneten Baumdiagramm lässt sich das Zufallsexperiment veranschaulichen.

Beachten Sie, dass zum Ereignis „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen gleichfarbige Kugeln“ zwei Pfade im Baumdiagramm gehören: Der Spieler kann 2 schwarze oder 2 weiße Kugeln ziehen.

Wenden Sie die Pfadregeln an und bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

**Teilaufgabe c***Bestimmung der dritten Wahrscheinlichkeit*

Welche möglichen Ausgänge des beschriebenen Zufallsexperimentes führen zu veränderten Anteilen der schwarzen und weißen Kugeln in den Urnen?

Was lässt sich über die Anteile der schwarzen und weißen Kugeln in den Urnen aussagen, wenn der Spieler, wie in Teilaufgabe b, 2 gleichfarbige Kugeln zieht?

Argumentieren Sie mithilfe des Baumdiagramms aus Teilaufgabe b und bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

**Teilaufgabe d***Begründung für die angegebene Wahrscheinlichkeit*

Beachten Sie, dass der Faktor  $\binom{5}{2}$  im Zähler des Terms die Anzahl der Möglichkeiten angibt, von den 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen.

Deuten Sie das Produkt  $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$  im Zähler und den Nenner  $\binom{10}{3}$ .

Geben Sie eine abschließende Begründung für die beschriebene Wahrscheinlichkeit.

### Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Berechnen Sie den Wert der angegebenen Wahrscheinlichkeit und nutzen Sie dabei den Rechnerbefehl  $\mathbf{nCr(n, k)}$  für den Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$ .

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit auch ohne Einsatz des Rechners, indem Sie auf die Definition  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  des Binomialkoeffizienten zurückgreifen.

## Lösungsvorschlag – Übungsaufgabe 3

- a) Die Zufallsgröße X: „Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln“ ist binomialverteilt mit der Stichprobengröße  $n=3$  und der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = \frac{2}{5}$ .

Es gilt:

$$P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^3 \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}$$

$\text{binomCdf}\left(3, \frac{2}{5}, 1, 3\right)$	0.784
--	-------

$$= \text{binomcdf}\left(3, \frac{2}{5}, 1, 3\right)$$

$$= 0,784$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 78,4 % wird mindestens einmal eine schwarze Kugel gezogen.

*Alternative:*

Das Ergebnis erhält man auch mithilfe der Komplementärregel:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 78,4 \%$$

- b) Das Zufallsexperiment wird durch das nebenstehende Baumdiagramm veranschaulicht.

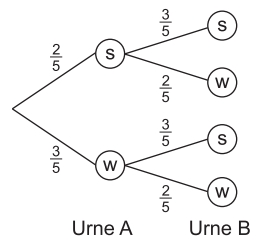
Zum Ereignis  $E_1$ : „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen gleichfarbige Kugeln“ gehören zwei Pfade des Baumdiagramms: ss und ww

$$P(ss) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(ww) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

Daher gilt:

$$P(E_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{25}$$



- c) Damit sich nach dem Tauschen der Kugeln der Anteil schwarzer und weißer Kugeln in den jeweiligen Urnen verändert, muss aus der Urne A eine schwarze und aus der Urne B eine weiße Kugel oder umgekehrt aus der Urne A eine weiße und aus der Urne B eine schwarze Kugel gezogen werden.

Es handelt sich also um das Ereignis  $E_2$ : „Der Spieler zieht aus den beiden Urnen ungleichfarbige Kugeln“. Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gilt:

$$P(E_2) = P(sw) + P(ws) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{13}{25}$$

*Alternative:*

$E_2$  ist das Gegenereignis zu  $E_1$ . Daher führt die Komplementärregel zum gleichen Ergebnis:

$$P(E_2) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

- d) Begründung für die angegebene Wahrscheinlichkeit:

Beim Ziehen aus der Urne gibt es  $\binom{5}{2}$  Möglichkeiten, von den 5 schwarzen Kugeln 2 Kugeln auszuwählen. Es gibt dann  $\binom{5}{1}$  Möglichkeiten, von den 5 weißen Kugeln 1 Kugel auszuwählen.

Mit  $E_3$  sei das Ereignis bezeichnet, dass sich unter den 3 gezogenen Kugeln genau 2 schwarze Kugeln und 1 weiße befinden. Nach der Produktregel gibt es dann  $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}$  „günstige“ Fälle für das Ereignis  $E_3$ .

Insgesamt gibt es  $\binom{10}{3}$  Möglichkeiten, aus einer Urne mit 10 Kugeln 3 Kugeln auszuwählen.

Daher stellt der Term  $\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}$  die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $E_3$  dar.

Berechnung der angegebenen Wahrscheinlichkeit:

- (1) Mit dem Rechnerbefehl  $\mathbf{nCr(n, k)}$  für den Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  erhält man:

$$P(E_3) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

$\frac{\mathbf{nCr(5,2) \cdot nCr(5,1)}}{\mathbf{nCr(10,3)}}$	$\frac{5}{12}$
---	----------------

- (2) Mit  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  erhält man für den Zähler:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 50$$

Für den Nenner gilt:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$$

Insgesamt folgt:

$$P(E_3) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$



## Prüfungsteil B – Aufgabe 1 A (CAS)

Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet, das ein Fassungsvermögen von  $800 \text{ m}^3$  hat. Für ein bestimmtes Regenereignis wird das Volumen des Regenwassers im Auffangbecken für  $0 \leq x \leq 5$  modellhaft durch die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $v$  mit  $v(x) = -\frac{5}{2}x^4 + \frac{50}{3}x^3 + 190$  beschrieben.

Dabei ist  $x$  die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden (h) und  $v(x)$  das Wasservolumen in Kubikmetern ( $\text{m}^3$ ).

Punkte

- a) Begründen Sie, dass zu Beobachtungsbeginn das Wasservolumen im Auffangbecken  $190 \text{ m}^3$  beträgt, und berechnen Sie das Volumen des Wassers, das in den ersten  $1,5$  h nach Beobachtungsbeginn in das Auffangbecken fließt.

3

Betrachtet wird außerdem die in  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $r$  mit

$$r(x) = 10x^2 \cdot (5 - x).$$

- b) Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate des Volumens des Wassers im Auffangbecken in  $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$  für den betrachteten Zeitraum durch  $r$  beschrieben werden kann.
- c) Weisen Sie anhand des gegebenen Terms von  $r$  nach, dass für den durch  $0 < x < 5$  beschriebenen Zeitraum das Volumen des Wassers im Auffangbecken zu keinem Zeitpunkt abnimmt.
- d) Es wird geplant, zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn eine Pumpe einzuschalten, die Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate von  $100 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$  abpumpt. Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch  $r$  beschrieben. Die folgende Gleichung hat im Sachzusammenhang eine Lösung  $t$ .

3

3

$$190 + \int_0^2 r(x) \, dx + \int_2^t (r(x) - 100) \, dx = 400$$

Geben Sie die Bedeutung von  $t$  im Sachzusammenhang an und erläutern Sie den Aufbau der Gleichung in Bezug auf diese Bedeutung.

5

**Teilaufgabe a**

*Begründung für das Wasservolumen zu Beobachtungsbeginn*

Beachten Sie, dass die Funktion  $v$  das Wasservolumen zum Zeitpunkt  $x$  in Stunden beschreibt.

Berechnen Sie den Funktionswert  $v(0)$ , um die Wassermenge zu Beginn der Beobachtung zu bestimmen.

Setzen Sie  $x=0$  in die Funktionsgleichung ein.

*Berechnung des hinzugekommenen Wasservolumens in den ersten 1,5 h*

Um die geflossene Wassermenge innerhalb der ersten 1,5 Stunden zu bestimmen, berechnen Sie den Funktionswert bei  $x=1,5$ .

Ermitteln Sie die Differenz  $v(1,5) - v(0)$ , um den Zuwachs des Wasservolumens im betrachteten Zeitraum zu bestimmen.

**Teilaufgabe b**

Die Funktion  $v'$  gibt die momentane Änderungsrate der Wassermenge an.

Ermitteln Sie die erste Ableitungsfunktion  $v'$  der Funktion  $v$ .

Verwenden Sie beim Ableiten die Ableitungsregeln für Potenzfunktionen.

Fassen Sie anschließend den abgeleiteten Funktionsterm sinnvoll zusammen, z. B. durch Ausklammern.

Vergleichen Sie den Funktionsterm der Funktion  $v'$  mit dem der Funktion  $r$ .

**Teilaufgabe c**

Untersuchen Sie das Vorzeichen des Funktionsterms  $r(x)$  im Intervall  $0 < x < 5$ .

Beachten Sie, dass der Ausdruck aus mehreren Faktoren besteht.

Prüfen Sie, ob diese innerhalb des Intervalls positiv oder negativ sind.

Leiten Sie aus dem Vorzeichen von  $r(x)$  ab, ob das Wasservolumen in dem besagten Intervall zu- oder abnimmt.

**Teilaufgabe d**

*Bedeutung von  $t$  im Sachzusammenhang*

Was gilt für das Wasservolumen zum Zeitpunkt  $t$ ?

## Lösungsvorschlag zum Prüfungsteil B – Aufgabe 1 A (CAS)

- a) Begründung für das Wasservolumen zu Beobachtungsbeginn:

Die Funktion  $v$  mit dem Funktionsterm  $v(x) = -\frac{5}{2}x^4 + \frac{50}{3}x^3 + 190$  gibt die Wassermenge in Kubikmetern an, die sich zum Zeitpunkt  $x$  in Stunden seit Beobachtungsbeginn in dem Becken befindet.

Der Funktionswert  $v(0)$  gibt die Wassermenge zu Beobachtungsbeginn in Kubikmetern an:

$$v(0) = -\frac{5}{2} \cdot 0 + \frac{50}{3} \cdot 0 + 190 = 190$$

Daher sind am Anfang  $190 \text{ m}^3$  Wasser im Becken.

Berechnung des hinzugekommenen Wasservolumens in den ersten 1,5 h:

Die Wassermenge in Kubikmeter für  $x = 1,5$  ergibt sich durch:

$$v(1,5) = -\frac{5}{2} \cdot 1,5^4 + \frac{50}{3} \cdot 1,5^3 + 190 = \frac{7475}{32}$$

Die geflossene Wassermenge in Kubikmetern ergibt sich durch:

$$v(1,5) - v(0) = \frac{1395}{32} \approx 43,6$$

$v(x) := -\frac{5}{2} \cdot x^4 + \frac{50}{3} \cdot x^3 + 190$	<i>Fertig</i>
$v(1,5)$	$\frac{7475}{32}$
$v(1,5) - v(0)$	$\frac{1395}{32}$
$v(1,5) - v(0)$	43.5938

Es fließen also in etwa  $44 \text{ m}^3$  Wasser in den ersten 1,5 Stunden.

- b) Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in  $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$  wird durch die erste Ableitung der Funktion  $v$  beschrieben:

$$v'(x) = -\frac{5}{2} \cdot 4 \cdot x^3 + \frac{50}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = -10x^3 + 50x^2 = 50x^2 - 10x^3 = 10x^2 \cdot (5 - x) = r(x)$$

Der Funktionsterm  $r(x)$  der Funktion  $r$  stimmt mit dem der Funktion  $v'$  überein. Die Funktion  $r$  beschreibt also für den betrachteten Zeitraum die momentane Änderungsrate.

**TIPP** Beim Ableiten der Funktion  $v$  wurden zunächst die Ableitungsregeln für Potenzfunktionen verwendet, um die einzelnen Summanden des Polynoms abzuleiten. Anschließend wurden die verbleibenden Summanden vertauscht, um anschließend den Faktor  $10x^2$  auszuklammern, damit man die Darstellung des Funktionsterms der Funktion  $r$  erhält.

c) Anhand des Funktionsterms  $r(x) = 10x^2 \cdot (5 - x)$  erkennt man, dass die Funktion genau zwei Nullstellen hat, nämlich bei 0 und 5. Hier ist die Änderungsrate null. Für  $0 < x < 5$  ist der Funktionsterm nicht null. Der Faktor  $10x^2$  ist für  $x > 0$  stets positiv. Der Faktor  $(5 - x)$  ist für  $x < 5$  ebenfalls positiv. Daher ist der Funktionsterm  $r(x) > 0$  für  $0 < x < 5$ . Da die Funktion  $r$  die momentane Änderungsrate von  $v$  angibt, wächst  $v$  für  $0 < x < 5$  streng monoton. Das Wasservolumen nimmt im beschriebenen Zeitraum nicht ab, sondern zu.

d) Bedeutung von  $t$  im Sachzusammenhang:  
Zum Zeitpunkt  $t$  beträgt das Volumen im Wasserbecken  $400 \text{ m}^3$ .

Erläuterung des Aufbaus der Gleichung:  
Bei Beobachtungsbeginn beträgt das Wasservolumen  $190 \text{ m}^3$ .

Das Integral  $\int_0^2 r(x) \, dx$  beschreibt die hinzugeflossene Wassermenge in Kubikmeter bis zum Zeitpunkt des Einschaltens der Pumpe (2 Stunden nach Beobachtungsbeginn).

Die Summe aus dem Anfangsvolumen und dem Integral beschreibt das Wasservolumen im Becken zum Zeitpunkt des Einschaltens der Pumpe in  $\text{m}^3$ .

Bei einer konstanten Abpumprate der Pumpe von  $100 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$  beschreibt die Differenzfunktion  $r(x) - 100$  die momentane Änderungsrate des Wasservolumens bei laufender Pumpe.

Das Integral  $\int_2^t (r(x) - 100) \, dx$  beschreibt deswegen die Änderung des Wasservolumens nach Einschalten der Pumpe in  $\text{m}^3$  bis zum Zeitpunkt  $t$ .

e) Die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^2 \cdot (x - 5)^2$  hat an der Stelle

$x_W = \frac{15 - 5 \cdot \sqrt{3}}{6}$  eine Wendestelle, falls für die zweite Ableitung  $f''$  und die dritte

Ableitung  $f'''$  der Funktion  $f$  gilt:

$f''(x_W) = 0$  und gleichzeitig  $f'''(x_W) \neq 0$

Einsetzen der Stelle  $x_W = \frac{15 - 5 \cdot \sqrt{3}}{6}$  in diese beiden Funktionsgleichungen ergibt mithilfe des CAS:

$f''(x_W) = 0$  und  $f'''(x_W) = -20\sqrt{3}$

Damit besitzt die Funktion  $f$  an der Stelle

$x_W = \frac{15 - 5 \cdot \sqrt{3}}{6}$  eine Wendestelle.

$f(x) := x^2 \cdot (x-5)^2$	Fertig
$f'(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$	Fertig
$f''(x) := \frac{d}{dx}(f'(x))$	Fertig
$f'''(x) := \frac{d}{dx}(f''(x))$	Fertig
$f''(x) _{x=\frac{15-5 \cdot \sqrt{3}}{6}}$	0
$f'''(x) _{x=\frac{15-5 \cdot \sqrt{3}}{6}}$	$-20 \cdot \sqrt{3}$



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

**STARK**