

2027

>30 Millionen
bestandene
Prüfungen

50
Jahre
STARK

STARK
Prüfung

**MEHR
ERFAHREN**

Abitur

Niedersachsen

Mathematik eA

- ✓ Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen
- ✓ Übungsaufgaben
- ✓ Lernvideos zur GTR/CAS-Nutzung



Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1	Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung	I
2	Die Inhalte der Einführungs- und Qualifikationsphase	III
3	Bewertung der Prüfungsarbeiten	VI
4	Operatoren in zentralen Prüfungsaufgaben Mathematik	VII
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung ...	X
6	Hinweise und Tipps zum Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern ..	XI
7	Weiterführende Informationen	XVIII

Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A

Analysis	1
Stochastik	3
Analytische Geometrie	4
Lösungsvorschlag	5

Übungsaufgaben zum Prüfungsteil B

Analysis

Übungsaufgabe 1: Ein Babyspielzeug (CAS)	16
Übungsaufgabe 2: Temperaturen in Friesoythe (CAS)	23

Stochastik

Übungsaufgabe 1: Musikmix (GTR/CAS)	31
Übungsaufgabe 2: Datenanalyse (CAS)	37

Analytische Geometrie

Übungsaufgabe 1: Ölbohrinsel (GTR/CAS)	42
Übungsaufgabe 2: Die Pyramide des Pharao (GTR/CAS)	48

Original-Abituraufgaben

Es liegen alle Aufgaben für CAS und für GTR vollständig vor. Wenn eine Aufgabe für beide Rechnerarten gleich ist, wurde die Lösung für die erstgenannte ausgearbeitet. Bei Unterschieden in der Aufgabenstellung finden Sie die Variante für die eine Rechnertechnologie im Buch und die andere bei MySTARK.

Abiturprüfung 2023

Pflichtteil	2023-1
Aufgabe 1A – Rechnertyp: CAS/GTR – Analysis	2023-6
Aufgabe 1B – Rechnertyp: CAS/GTR – Analysis	2023-13
Aufgabe 2A – Rechnertyp: CAS/GTR – Stochastik	2023-20
Aufgabe 2C – Rechnertyp: CAS/GTR – Stochastik	2023-26
Aufgabe 3A – Rechnertyp: CAS/GTR – Analytische Geometrie	2023-33
Aufgabe 3C – Rechnertyp: CAS/GTR – Analytische Geometrie	2023-39

Abiturprüfung 2024

Prüfungsteil A	2024-1
Prüfungsteil B – 1A (CAS) – Analysis	2024-11
Prüfungsteil B – 1B (CAS) – Analysis	2024-20
Prüfungsteil B – 2A (CAS/GTR) – Stochastik	2024-27
Prüfungsteil B – 2B (CAS/GTR) – Stochastik	2024-33
Prüfungsteil B – 3A (CAS/GTR) – Analytische Geometrie	2024-39
Prüfungsteil B – 3B (CAS/GTR) – Analytische Geometrie	2024-45

Abiturprüfung 2025

Prüfungsteil A	2025-1
Prüfungsteil B – 1A (CAS) – Analysis	2025-10
Prüfungsteil B – 1B (CAS/GTR) – Analysis	2025-17
Prüfungsteil B – 2A (CAS/GTR) – Stochastik	2025-23
Prüfungsteil B – 2B (CAS/GTR) – Stochastik	2025-28
Prüfungsteil B – 3A (CAS/GTR) – Analytische Geometrie	2025-34
Prüfungsteil B – 3B (CAS/GTR) – Analytische Geometrie	2025-40

Abiturprüfung 2026 www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2026 freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, können sie als PDF auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vorne im Buch).



Bei **MySTARK** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs, inklusive **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen, teilweise mit Veranschaulichung durch **Videos**
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2026**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2023 bis 2026** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Autor

Volker Honkomp (Lösungen der Abituraufgaben 2026)

Josef Rolfs (Hinweise zum Zentralabitur, Übungsaufgaben, Lösungen der Abituraufgaben 2023 bis 2025)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2027 im Erhöhten Anforderungsniveau in Niedersachsen**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für das Abitur, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **für das Erhöhte Anforderungsniveau viele Übungsaufgaben** zu den **Themen des Abiturs 2027**. Die Aufgaben sind dabei auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abiturprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2023 bis 2026**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MySTARK**:
 - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
 - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
 - **Jahrgang 2026**, sobald dieser zum Download bereit steht
 - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2023 bis 2026**, die nicht im Buch abgedruckt sind



Die Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei Ihrer Prüfung!

Josef Rolfs

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen: dem **Prüfungsteil A**, der ohne elektronische Hilfsmittel und ohne Formelsammlung zu bearbeiten ist, und dem **Prüfungsteil B**, der mithilfe der unten angeführten Hilfsmittel bearbeitet werden kann.

Manche Aufgaben aus Prüfungsteil A und Prüfungsteil B werden länderübergreifend gestellt.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im **Prüfungsteil A** müssen insgesamt **sechs Aufgaben** aus den drei Sachgebieten Analysis, Stochastik und Analytische Geometrie bearbeitet werden. Die Aufgaben werden in die Aufgabengruppe 1 und Aufgabengruppe 2 unterteilt.

Die Aufgabengruppe 1 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II. Den Schülerinnen und Schülern werden zwei Aufgaben aus der Analysis, eine aus der Stochastik und eine aus der Analytischen Geometrie vorgelegt, die alle vier bearbeitet werden müssen.

Die Aufgabengruppe 2 enthält Aufgaben aus den Anforderungsbereichen I und II, wobei mindestens eine Teilaufgabe auch den Anforderungsbereich III erreicht. Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu jedem der drei Sachgebiete jeweils zwei Aufgaben, aus denen sie insgesamt zwei auswählen, die sie bearbeiten.

Die Aufgaben des Prüfungsteils A sind mit jeweils 5 Bewertungseinheiten gleichgewichtet. Insgesamt können hier also 30 Bewertungseinheiten erreicht werden.

Im **Prüfungsteil B** werden den Schülerinnen und Schülern je zwei Aufgaben aus der Analysis, aus der Stochastik und aus der Analytischen Geometrie vorgelegt. Sie müssen aus jedem der drei Bereiche jeweils eine Aufgabe auswählen und bearbeiten.

In Analysis können 30 Bewertungseinheiten erreicht werden, in der Stochastik und der Analytischen Geometrie jeweils 20. Die Aufgaben des Prüfungsteils B ergeben daher insgesamt 70 Bewertungseinheiten.

1.3 Dauer der Prüfung

Die Arbeitszeit beträgt **330 Minuten**. Zu Beginn der Prüfung werden sowohl die Aufgaben des Prüfungsteils A als auch des Prüfungsteils B ausgeteilt. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst, wann sie den Prüfungsteil A abgeben. Dies muss spätestens nach 110 Minuten erfolgen. Anschließend erhalten sie die zugelassenen Hilfsmittel.

1.4 Verwendung von Hilfsmitteln im Prüfungsteil B

Von den lokalen Fachkonferenzen wird zu Beginn der Einführungsphase festgelegt, welche der beiden Technologiekategorien in den jeweiligen Prüfungsgruppen verwendet werden. Diese Entscheidung legt eine Aufgabenklasse für die Prüfungsgruppe fest und kann nicht mehr verändert werden. Zur Auswahl stehen:

- **GTR:** grafikfähiger Taschenrechner ohne CAS
- **CAS:** computeralgebrafähiger Taschencomputer, Computeralgebrasystem auf einem Tablet, PC oder Notebook

Alle Prüflinge einer Prüfungsgruppe verwenden dasselbe Rechnermodell mit demselben Betriebssystem.

In der Abiturprüfung sollen die Schülerinnen und Schüler die **Rechnertechnologie** einsetzen und den sinnvollen Gebrauch dieser Technologie nachweisen. Dabei gilt:

- Alle Taschenrechner sind mittels eines Hard- bzw. Software-Resets vor der Prüfung in einen vergleichbaren Zustand zu versetzen. Eigene Programme und Dateien sind auf dem Rechner nicht zulässig.
- Bei den Computeralgebrasystemen sind keine Ergänzungsprogrammpakete erlaubt; auf PCs sind neben einem CAS die Standard-Officeprogramme, aber keine weiteren mathematischen Programme oder weitere Dateien zulässig.

Weiter sind zur Abiturprüfung die auf den Seiten des IQB veröffentlichte „Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung“ und Handbücher der Rechner zugelassen.

2 Die Inhalte der Einführungs- und Qualifikationsphase

Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung sind die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (BS, 2012) und das Kerncurriculum Mathematik (KC, 2018). Außerdem werden durch die „Hinweise zur schriftlichen Abiturprüfung 2027“ weitere Angaben gemacht.

Im Folgenden werden die verbindlichen Inhalte für die Einführungs- und Qualifikationsphase aufgeführt, da diese für das Abitur relevant sind. Wir beschränken uns hier auf die inhaltsbezogenen Kompetenzen, denn diese sind fachbezogen und legen fest, über welches Wissen Sie im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

2.1 Analysis

Einführungsphase **Elementare Funktionenlehre**

- Funktionsbegriff
- Potenzfunktionen (auch Wurzelfunktionen)
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Exponentialfunktionen
- $y = a \cdot f(b \cdot (x - c)) + d$ mit Auswirkungen auf den Graphen
- Parametervariationen
- ganzrationale Funktionen
- Nullstellen (Linearfaktorzerlegung)
- Grenzwerte, Symmetrien, asymptotisches Verhalten
- Umkehrfunktionen: Definitions- und Wertemenge, Zusammenhang zwischen Graph einer Funktion und der zugehörigen Umkehrfunktion

Ableitungen

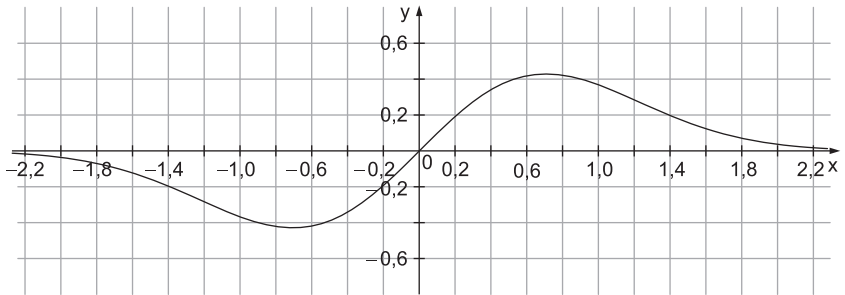
- mittlere Änderungsrate-Sekantensteigung-Sekante
- lokale Änderungsrate-Tangentensteigung-Tangente
- Ableitung als Grenzwert der Sekantensteigungen
- Ableitungsfunktion
- Tangenten- und Normalengleichung
- Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktion
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte
- Ableitungsfunktionen zu $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z} \neq 0$), $f(x) = \sqrt{x}$,
 $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$
- Summen, Faktor- und Potenzregel
- notwendige und hinreichende Kriterien für Extrem- und Wendepunkte
- Ableitung ganzrationaler Funktionen
- Lösen von Sachproblemen mit Ableitungen
- Lösen linearer Gleichungssysteme

Niedersachsen Mathematik

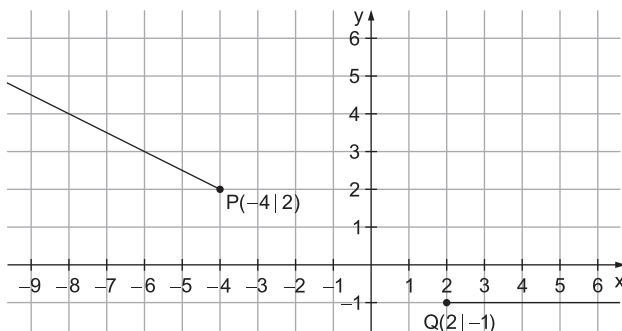
Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A

Analysis

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt den Verlauf des Graphen von f .



- a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
 - b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes der Kurve.
 - c) Der Graph von f , die x -Achse und die Gerade mit $x = a$ ($a > 0$) begrenzen ein Flächenstück.
Bestimmen Sie diejenige Zahl a , für die diese Fläche die Maßzahl $\frac{1}{4}$ aufweist.
2. Die beiden Halbgeraden des Schaubildes sollen durch den Graphen einer Polynomfunktion g möglichst geringen Grades verbunden werden. Die Übergänge sollen dabei glatt und krümmungsruckfrei sein. Erläutern Sie die von Ihnen gemachten Forderungen und den daraus folgenden Ansatz. $g(x)$ soll nicht bestimmt werden.



- c) Gegeben ist die Funktion h_a mit $h_a(x) = \sqrt{a \cdot x + 4}$ und $a > 0$.
Bestimmen Sie einen Wert für a so, dass die Gerade g die Normale im Punkt $P(0|2)$ des Graphen von h_a ist.

7. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

- a) Zeigen Sie, dass f über $D = \mathbb{R}^{\geq 1}$ umkehrbar ist.
- b) Bestimmen Sie diejenigen Punkte, die sowohl auf dem Graphen von f als auch auf dem Graphen von f^{-1} liegen.
- c) Die Graphen der Funktionen f und f^{-1} begrenzen ein Flächenstück. Skizzieren Sie es und berechnen Sie seine Maßzahl.

Stochastik

8. In einer Urne befinden sich 1 blaue, 4 rote und 5 grüne Kugeln.

- a) Aus der Urne wird ohne Zurücklegen 3-mal gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Es werden genau 2 rote Kugeln gezogen.
B: Es werden eine blaue, eine rote und eine grüne Kugel gezogen.
C: Es wird 3-mal dieselbe Farbe gezogen.
- b) Es wird nun 8-mal ohne Zurücklegen gezogen.
Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit p einer beliebigen Zugfolge an, die auf das Ergebnis „eine blaue, 3 rote und 4 grüne Kugeln werden gezogen“ führt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
D: Es werden eine blaue, 3 rote und 4 grüne Kugeln gezogen.

9. Es wird mit einem Würfel geworfen, der durch Bleieinschlüsse manipuliert wurde. Die Wahrscheinlichkeit p für die Augenzahl 6 wurde dadurch erhöht, die übrigen fünf Augenzahlen sind aber gleich wahrscheinlich.

- a) Der Würfel wird nun zweimal geworfen.
Ermitteln Sie für den Fall, dass $p = \frac{1}{4}$ ist, die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Man erhält die Augensumme 12.
B: Man erhält die Augensumme 2.
Stellen Sie einen Term auf, mit dem das folgende Ereignis berechnet werden kann:
C: Man erhält mindestens die Augensumme 10.
- b) Beim dreifachen Würfeln beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine 6 gewürfelt wird, genau 93,6%.
Ermitteln Sie für diesen Fall p .

Lösungsvorschlag zum Prüfungsteil A

1. a) Der Graph von f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung, denn es gilt:

$$f(-x) = -x \cdot e^{-(-x)^2} = -x \cdot e^{-x^2} = -f(x)$$

- b) Notwendige Bedingung für relative Extrema:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot x \cdot e^{-x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2} = 0 \quad \text{da } e^{-x^2} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Anhand des Graphen erkennt man, dass nur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ eine relative Maximumstelle ist. Durch Einsetzen in $f(x)$ erhält man:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e}$$

Die Koordinaten des Hochpunktes sind $H\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mid \frac{1}{\sqrt{2} \cdot e}\right)$.

- c) Es soll gelten:

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-a^2} = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow e^{-a^2} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -a^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow a^2 = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{\ln(2)} \quad \text{da } a > 0 \end{aligned}$$

2. Da die Übergangskurve in $P(-4 \mid 2)$ und $Q(2 \mid -1)$ an die vorgegebenen Halbgeraden anschließen soll, muss für die Funktion g der Übergangskurve gelten: $g(-4) = 2$ und $g(2) = -1$ (Diese Bedingungen sorgen für die Stetigkeit.)

Da die Übergangskurve in P und Q glatt anschließen soll, muss sie in P bzw. Q dieselbe Steigung besitzen wie die entsprechende Halbgerade. Es muss also für die Funktion g zusätzlich gelten:

$g'(-4) = -0,5$ und $g'(2) = 0$ (Diese Bedingungen sorgen für die Differenzierbarkeit.)

Da die Übergangskurve in P und Q krümmungsruckfrei anschließen soll, muss sie in P bzw. Q dieselbe Krümmung besitzen wie die entsprechende Halbgerade.

Da beide Halbgeraden die Krümmung 0 besitzen, muss also zusätzlich gelten:

$$g''(-4) = 0 \text{ und } g''(2) = 0 \quad (\text{Diese Bedingungen sorgen für die zweimalige Differenzierbarkeit.})$$

Wegen dieser 6 notwendigen Bedingungen benötigt man einen Ansatz mit 6 Formvariablen, also ein Polynom 5. Grades:

$$g(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$$

3. a) Damit $f(x)$ definiert ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} & -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 6x + 8 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 6x + 9 \leq -8 + 9 \\ \Leftrightarrow & (x-3)^2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow & |x-3| \leq 1 \\ \Leftrightarrow & x-3 \geq -1 \wedge x-3 \leq 1 \\ \Leftrightarrow & x \geq 2 \wedge x \leq 4 \\ \Leftrightarrow & 2 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

$$\mathbb{D}_f = [2; 4]$$

- b) Untersuchung auf Schnittstellen:

$$\begin{aligned} & f(x) = a \\ \Leftrightarrow & \sqrt{-x^2 + 6x - 8} = a \quad \text{Für } a < 0 \text{ gibt es keine Schnittstelle.} \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 6x - 8 = a^2 \\ \text{a} \geq 0 & \\ \Leftrightarrow & x^2 - 6x + 9 = -a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & (x-3)^2 = -a^2 + 1 \end{aligned}$$

Damit es zwei Schnittstellen gibt, muss gelten:

$$-a^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow a^2 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq a < 1 \quad (\text{a} \geq 0)$$

Für alle $a \in [0; 1[$ besitzen die Kurve und die Gerade genau zwei Schnittpunkte.

4. a) $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x$

Damit ist $x = \frac{1}{2}$ die einzige Stelle, an der Ableitung und Funktionswert übereinstimmen.

- b) Eine Gerade, die durch $S(0|1)$ und $P(x_0|f(x_0))$ verläuft, besitzt den y-Achsenabschnitt 1 und hat die Steigung $\frac{f(x_0)-1}{x_0}$. Ihre Gleichung hat also die Form

$$y = \frac{f(x_0)-1}{x_0} \cdot x + 1.$$

Prüfungsteil B – Aufgabe 1 A (CAS)

Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen f_k mit

$f_k(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^2 \cdot (x - 2k)^2$ und $k \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

Punkte

- a) Begründen Sie, dass f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an. 3
- b) Der Hochpunkt von G_k hat zu den beiden Tiefpunkten von G_k denselben Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand. 4
- c) Betrachtet wird die Fläche, die G_k , die x -Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 1$ einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen. Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert eines Integrals zu berechnen:
Für jeden Wert von k gibt der Term $\int_{-1}^1 f_k(x) dx$ den Inhalt der betrachteten Fläche an. 4
- d) Für jeden Wert von k schließen G_k und der Graph der in \mathbb{R} definierten Funktion h_k mit $h_k(x) = \frac{k}{2} \cdot (x - 2k)^2$ eine Fläche ein, die sich aus zwei Flächenstücken zusammensetzt. Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:
Für $k > 3$ ist der Inhalt der Fläche kleiner als k^5 . 5

Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet. Für ein bestimmtes Regenereignis wird die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken durch die in \mathbb{R} definierte Funktion r mit $r(x) = e^x \cdot f_{2,5}(x)$ für $0 \leq x \leq 5$ modellhaft beschrieben.

Dabei ist x die Zeit in Stunden, die seit Beginn des Zuflusses in das Auffangbecken vergangen ist, und $r(x)$ die momentane Zuflussrate in $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ (Kubikmeter pro Stunde). Die Funktion $f_{2,5}$ ist die Funktion der Schar f_k mit $k = 2,5$.

- e) Berechnen Sie die größte und die kleinste momentane Zuflussrate im betrachteten Zeitraum. 4
- f) Im Intervall $[0; 5]$ besitzt r genau zwei Wendestellen x_0 und x_1 . Außerdem gilt $r'(x_0) \approx 100,5$ und $r'(x_1) \approx -240,2$ sowie $r'(0) = 0$ und $r'(5) = 0$. Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes $r'(x_0)$, die sich aus diesen Informationen ergibt, im Sachzusammenhang. 3

Teilaufgabe a

Begründen von genau zwei Nullstellen

Betrachten Sie den Term von $f_k(x)$.

Ein Produkt ist genau dann null, wenn einer der Faktoren null ist.

Beachten Sie, dass k positiv sein soll.

Angeben der beiden Nullstellen

Notieren Sie die beiden Nullstellen.

Teilaufgabe b

Sie benötigen zunächst die Extremstellen von $f_k(x)$.

Nutzen Sie die **solve**-Funktion des Rechners zur Berechnung der Stellen.

Laut Aufgabenstellung gibt es zwei Minimalstellen. Eine Maximalstelle muss zwischen zwei Minimalstellen liegen.

Daraus lässt sich zuordnen, welche Extremstelle eine Maximalstelle und welche eine Minimalstelle ist.

Der Abstand zweier Punkte wird mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet.

Verwenden Sie dafür Ihren Rechner.

Teilaufgabe c

Überlegen Sie, wann ein Integral mit der Flächenmaßzahl übereinstimmt.

Analysieren Sie den Term $f_k(x)$.

Beurteilen Sie nun die gegebene Aussage.

Teilaufgabe d

Ermitteln Sie mithilfe der **solve**-Funktion des Rechners die Schnittstellen der beiden Terme.

Bestimmen Sie mithilfe des Rechners die Maßzahl des gesamten Flächenstücks.

Untersuchen Sie die Gültigkeit der Aussage in Abhängigkeit von k .

Formulieren Sie eine Antwort.

Teilaufgabe e

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion r im Intervall $[0; 5]$.

Mögliche Extremstellen sind die Lösungen der Gleichung $r'(x)=0$.

Der Vergleich der Werte an diesen Stellen liefert die größte und kleinste Zuflussrate.

Lösungsvorschlag zum Prüfungsteil B – Aufgabe 1 A (CAS)

- a) Begründen von genau zwei Nullstellen:

$f_k(x)$ besteht aus drei Faktoren, von denen wegen $k > 0$ nur zwei den Wert 0 annehmen können.

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{genau eine Lösung}$$

$$(x - 2k)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{genau eine Lösung}$$

Also besitzt f_k für jeden Wert von k genau zwei Nullstellen.

Angeben der beiden Nullstellen:

Die beiden Nullstellen sind 0 und $2k$.

- b) Zunächst werden die Extremstellen ermittelt:

$$f'_k(x) = \frac{2 \cdot x(x - 2k) \cdot (x - k)}{\text{CAS} \quad k}$$

$$f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = k \vee x = 2k$$

Die gesuchte Maximalstelle liegt an der Stelle k . Die Minimalstellen liegen an den Stellen 0 und $2k$.

$\frac{1}{2 \cdot k} \cdot x^2 \cdot (x - 2 \cdot k)^2 \rightarrow f_k(x)$	<i>Fertig</i>
$\Delta \frac{d}{dx}(f_k(x))$	$\frac{2 \cdot x \cdot (x - 2 \cdot k) \cdot (x - k)}{k}$
$\frac{2 \cdot x \cdot (x - 2 \cdot k) \cdot (x - k)}{k} \rightarrow f'_k(x)$	<i>Fertig</i>
$\text{solve}(f'_k(x)=0, x)$	$x=2 \cdot k \text{ or } x=k \text{ or } x=0$

TIPP Es ist aus der Aufgabenstellung bekannt, dass es zwei Minimalstellen gibt. Da die Maximalstelle zwischen den Minimalstellen liegen muss, muss an der Stelle k die Maximalstelle sein.

Es ist also der Abstand d des Punktes $H(k | f_k(k))$ von $T_1(0 | 0)$ oder $T_2(2k | 0)$ zu bestimmen.

TIPP Da der Abstand jeweils gleich ist, genügt die Berechnung des Abstandes von $H(k | f_k(k))$ zu $T_1(0 | 0)$.

Mit dem Satz des Pythagoras gilt:

$$d = \sqrt{(k - 0)^2 + (f_k(k) - 0)^2}$$

$$= \frac{k \cdot \sqrt{k^4 + 4}}{\text{CAS} \quad 2}$$

$\sqrt{(k-0)^2 + (f_k(k)-0)^2} \quad k>0$	$k \cdot \frac{\sqrt{k^4 + 4}}{2}$
--	------------------------------------

- c) Der Funktionsterm $f_k(x)$ ist an keiner Stelle negativ. Der erste Faktor $\frac{1}{2k}$ ist positiv, weil k positiv ist. Die beiden anderen Terme x^2 und $(x - 2k)^2$ sind quadratisch und somit überall nicht negativ.

Also liegen alle Flächenstücke oberhalb der x -Achse und deren Integrale sind positiv.

Somit ist die Aussage richtig.

d) Bestimmen der Schnittstellen:

$$f_k(x) = h_k(x)$$

$$\Leftrightarrow x = -k \vee x = k \vee x = 2k$$

CAS

Berechnen der Flächenmaßzahl:

$$\left| \int_{-k}^k (f_k(x) - h_k(x)) dx \right| + \left| \int_k^{2k} (f_k(x) - h_k(x)) dx \right| \stackrel{\text{CAS}}{=} \frac{29}{10} k^4$$

Es folgt:

$$\frac{29}{10} k^4 < k^5 \Leftrightarrow k > \frac{29}{10}$$

Also ist die Aussage für $k > 3$ korrekt.

$\frac{k}{2} \cdot (x-2 \cdot k)^2 \rightarrow h_k(x)$	<i>Fertig</i>
$\text{solve}(f_k(x)=h_k(x),x)$	$x=2 \cdot k$ or $x=-k$ or $x=k$
$\left \int_{-k}^k (f_k(x)-h_k(x)) dx \right + \left \int_k^{2 \cdot k} (f_k(x)-h_k(x)) dx \right $	$\frac{29 \cdot k^4}{10}$

e) Mithilfe des Rechners ergeben sich im Bereich $[0, 5]$ für die Gleichung $r'(x) = 0$ die folgenden drei Lösungen:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{41} + 1}{2} \approx 3,7 \text{ und } x_3 = 5$$

Für die Funktionswerte gilt:

$$r(0) = 0$$

$$r\left(\frac{\sqrt{41} + 1}{2}\right) \approx 187$$

$$r(5) = 0$$

Damit beträgt die kleinste momentane Zuflussrate $0 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ und die größte momentane Zuflussrate etwa $187 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

$e^x \cdot f_k(x) k=2.5 \rightarrow r(x)$	<i>Fertig</i>
$\frac{d}{dx}(r(x))$	$0.2 \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x^2-x-10) \cdot e^x$
$0.2 \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x^2-x-10) \cdot e^x \rightarrow r'(x)$	<i>Fertig</i>
$\text{solve}(r'(x)=0,x) 0 \leq x \leq 5$	$x=0$ or $x=\frac{\sqrt{41}+1}{2}$ or $x=5$
$r(0)$	0
$r\left(\frac{\sqrt{41}+1}{2}\right)$	187.159
$r(5)$	0.

TIPP Alternativ können Sie zur Berechnung der Werte auch die **fMax**- und **fMin**-Funktion des Rechners nutzen.

f) Während der ersten 5 Stunden ist der Anstieg der momentanen Zuflussrate mit etwa $100,5 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ am größten zu dem Zeitpunkt, der durch x_0 beschrieben wird.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK