2027

>30 Millionen bestandene Prüfungen

50 Jahre STARK

STARK Prüfung

MEHR ERFAHREN

Abitur

Hamburg

Mathematik gA/eA

- ✓ Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen
- ✓ Interaktives Training
- ✓ Übungsaufgaben im Stil der aktuellen Abiturprüfung

PDF

Inhalt

Abiturprüfung 2025 (ausgewählte Aufgaben)

Abiturprüfung 2026 (Auswahl) .... **www.stark-verlag.de/mystark**

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2026 freigegeben und die zugehörigen Musterlösungen ausgearbeitet und redaktionell geprüft sind, kann eine Auswahl davon auf der Plattform MySTARK heruntergeladen werden (Zugangscode vorne im Buch).

Auch die Original-Prüfungsaufgaben 2020 bis 2023 können auf MySTARK heruntergeladen werden.

Bei **MySTARK** finden Sie:

– **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil, inklusive **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen, teilweise mit Veranschaulichung durch **Videos**
– **Jahrgänge 2020 bis 2023**; außerdem **Jahrgang 2026 (Auswahl)**, sobald dieser zum Download bereit steht

Den Zugangscode zu MySTARK finden Sie vorne im Buch.

Autorin und Autoren:

Dr. Jürgen Leitz: 2020 und 2021
Verlagsredaktion: 2022; 2023; 2024 (gA): I.2, I.4.2, I.5.2 (alle Lin. Alg.), III; 2024 (eA): I.3 (Lin. Alg.), I.5.2, I.5.3 (Lin. Alg.), I.5.4 (Lin. Alg.); 2025 (gA): I.2, I.4.2, I.5.2, I.5.3 (alle Lin. Alg.), II.2, III; 2025 (eA): I.3, I.5.3, I.5.4 (alle Lin. Alg.)
Volker Honkomp: 2024 (gA): I.1, I.2 (Analyt. Geo.), I.3, I.4.1, I.5.1, I.5.2 (Analyt. Geom.), I.5.3, II.1, IV; 2025 (gA): I.1, I.2, I.3, I.4.2, I.5.1, I.5.2 (Analyt. Geo.), IV
Winfried König: 2025 (eA): II.1, III, IV (anteilig)
Dr. Detlef Launert: 2025 (gA): I.4.1, I.4.3
Kristin Menke: 2024 (gA): I.4.2 (Analyt. Geo.), I.4.3; 2025 (gA): I.3 (Analyt. Geo.)
Markus Porzelt: 2025 (eA): I.5.2
Josef Rolfs: 2024 (eA): I.1, I.4, I.5.1, I.5.3 (Analyt. Geo.), I.5.6, IV; 2025 (eA): I.1, I.2, I.4, I.5.1, I.5.3 (Analyt. Geo.), I.5.5, I.5.6
Volker Stemberg: Übungsaufgaben; 2024 (eA): I.2, I.3 (Analyt. Geo.), I.5.4 (Analyt. Geo.), I.5.5, II.1, III; 2025 (eA): II.1, III, IV (anteilig)

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit dem vorliegenden Buch geben wir Ihnen eine **optimale** Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung** in **Hamburg**.

- Im ersten Teil des Buches erhalten Sie zahlreiche **Informationen zum Abitur**, die für eine gezielte Vorbereitung auf die Abiturprüfung hilfreich und wichtig sind. Hierzu gehören die komplette Auflistung der Schwerpunktthemen für das **Abitur**, die **Hinweise zum Prüfungsablauf** sowie alles Wissenswerte zum Aufbau und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Weiter geben wir Ihnen eine Vielzahl **praktischer Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als auch während der Prüfung (Klausuren) ermöglichen, gestellte Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Am Beispiel eines Aufgabensets (auf erhöhtem Anforderungsniveau mit Schwerpunkt Analytische Geometrie) bekommen Sie mit den **Übungsaufgaben** ein Gefühl für Umfang und Gewichtung der einzelnen Aufgabenblöcke.
- Sie finden in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2024 (Auswahl) und 2025 (Auswahl)** abgedruckt. Die Aufgaben **2020–2023** und **2026 (jeweils Auswahl)** stehen Ihnen auf der **Plattform MySTARK** zum Download zur Verfügung. Somit können Sie sich ein Bild davon machen, welche Anforderungen an die Abiturprüfung in den vergangenen Jahren gestellt wurden.
- Zu allen Aufgaben finden Sie vollständige und schülergerechte **Lösungsvorschläge**. Zusätzlich werden in den **Hinweisen und Tipps**, die zwischen Aufgabe und Lösung stehen, die Lösungsansätze dargestellt, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Hier können Sie nachlesen, wenn Sie nicht wissen, wie Sie mit der Lösung einer Aufgabe anfangen sollen. Die Hinweise und Tipps sind hierarchisch nach aufsteigender **Hilfestellung** sortiert, sodass Sie nach dem Lesen des ersten Tipps nochmals nachdenken sollten, ob Sie jetzt die Lösung schaffen. Erst dann lesen Sie den zweiten Hinweis, der den Lösungsansatz genauer beschreibt.
- Damit Sie in diesem Buch passende Aufgaben zum Üben heraussuchen können, z. B. für die Vorbereitung auf eine anstehende Klausur, finden Sie gleich am Anfang ein **Stichwortverzeichnis**.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg in Ihren Abiturprüfungen!

Das Autorenteam und der STARK Verlag

Allgemeine Hinweise zum Zentralabitur

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

Zentrale schriftliche Prüfung

Die Abiturprüfung bildet den Abschluss der zweijährigen Studienstufe, die in Hamburg als Profiloberstufe ausgestaltet ist. An allen allgemeinbildenden und den berufsbildenden Gymnasien sowie an den Stadtteilschulen in Hamburg wird das Abitur mit zentraler Aufgabenstellung durchgeführt. Die Abituraufgaben werden in der Hamburger Behörde für Schule und Bildung entwickelt.
Das Abitur kann in Mathematik auf dem grundlegenden oder dem erhöhten Anforderungsniveau abgelegt werden. Ob das Anforderungsniveau in Mathematik grundlegend oder erhöht ist, wurde vor dem Eintritt in die Profiloberstufe verbindlich festgelegt, die Prüfung muss in dem gewählten Niveau abgelegt werden.
Den ersten von vier Aufgabenblöcken bildet der **hilfsmittelfreie Teil**. Im Rahmen dieses Aufgabenblocks müssen **mehrere kleinere** Aufgaben, die die Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie bzw. Lineare Algebra und Stochastik umfassen, bearbeitet werden. Die Bearbeitung dieses Teils muss – wie der Name schon andeutet – ohne Hilfsmittel wie Taschenrechner und Formelsammlung erfolgen.

Die prüfungsrelevanten Inhalte der Studienstufe

1.1 Von der Änderungsrate zum Bestand

Funktionale Zusammenhänge

- Darstellen und Anwenden funktionaler Zusammenhänge mit den untenstehenden Funktionsklassen, Kennen von Besonderheiten und Nutzen dieser Funktionsklassen in Sachzusammenhängen
  - ganzrationale Funktionen
  - einfache gebrochen-rationale Funktionen
  - einfache Wurzelfunktionen

  Unter einfachen Funktionen werden Funktionen verstanden, deren jeweiliger Graph aus dem Graphen zu $f(x)=\frac{1}{x}$ bzw. $f(x)=\sqrt{x}$ durch Verschieben in x-Richtung und y-Richtung, Strecken in x- oder y-Richtung sowie Spiegeln an den Koordinatenachsen hervorgehen kann.
- Beschreibung und Nutzung der Auswirkung von Parametervariationen in einer Funktionsvorschrift für den Graphen einer Funktion
- Erstellung, Interpretation und Beurteilung von Modellen
- Berechnungen mit Parametern in einer Funktionsvorschrift, insbesondere unter Vorgabe und Einsetzen konkreter Werte, sowie Interpretation der Ergebnisse

- Erkennung von Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung anhand der Exponenten der freien Variablen im Funktionsterm ganzrationaler Funktionen, Nutzung dieser Eigenschaft für Argumentationen und Berechnungen
- Erkennung von Punktsymmetrie zum Ursprung am Funktionsterm einfacher gebrochen-rationaler Funktionen
- Beschreibung des Verhaltens im Unendlichen
- Bestimmung von senkrechten und waagerechten Asymptoten

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- Bearbeitung komplexerer Aufgabenstellungen auf derselben inhaltlichen Basis
- Nachweis von Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung u. a. mithilfe der Zusammenhänge $f(x) = f(-x)$ bzw. $f(x) = -f(-x)$

Gleichungen

- Bestimmung der Koeffizienten ganzrationaler Funktionen durch Aufstellen linearer Gleichungssysteme (Steckbriefaufgaben)
- Gleichungslösen als Hilfsmittel, um Fragestellungen in funktionalen Zusammenhängen zu lösen
  - geeignete Verfahren zur Lösung quadratischer Gleichungen
  - grundlegende algebraische Umformungen, z. B. Ausklammern der Unbekannten
  - tabellarisches Lösen von Gleichungen
  - grafisches Lösen von Gleichungen
  - Lösen biquadratischer Gleichungen mittels Substitution

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- Bearbeitung komplexerer Aufgabenstellungen auf derselben inhaltlichen Basis
- Gleichungslösen in Abhängigkeit von Parametern

Mittlere und lokale Änderungsrate

- Interpretation der mittleren Änderungsrate in Sachzusammenhängen und als Sekantensteigung
- Beschreibung der Annäherung der mittleren Änderungsrate an die lokale Änderungsrate
- Interpretation der lokalen Änderungsrate an einer Stelle in Sachzusammenhängen und als Tangentensteigung
- Berechnung der Tangentensteigung an einer Stelle mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten an einigen Beispielen
- Beschreibung der Ableitungsfunktion als Funktion der lokalen Änderungsraten
- Aufstellung der Tangentengleichung
- Berechnung von Steigungswinkeln mithilfe des Tangens
- Anwendung der Ableitungsregeln
  - Potenzregel
  - Faktorregel
  - Summenregel
- Bestimmung höherer Ableitungen
- Herleitung des Graphen der Ableitungsfunktion aus dem gegebenen Graphen einer Funktion

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

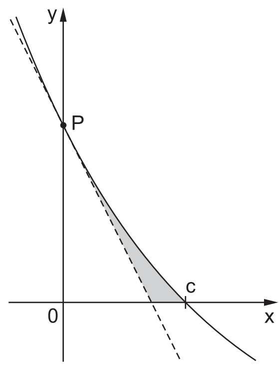
Bearbeitung komplexerer Aufgabenstellungen auf derselben inhaltlichen Basis

Hamburg Kernfach Mathematik – Übungsaufgaben
Erhöhtes Anforderungsniveau – Hilfsmittelfreier Teil

I.1 Analysis

Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = 4 \cdot e^{-0,5x} - 2$.
Abgebildet sind der Graph von f und die Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt mit der y-Achse.



a) **Weisen** Sie **nach**, dass die eingezeichnete Tangente durch die Gleichung $y = -2x + 2$ beschrieben werden kann. 2

b) **Begründen** Sie, dass der Wert des Terms $\int_0^c f(x)\,dx - 1$ den Inhalt der markierten Fläche angibt. 3

I.2 Analysis

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind 2 Liter Wasser in einem Behälter. Die momentane Zuflussrate z kann durch den Funktionsterm $z(t) = 0,2t^2 + 1$ beschrieben werden ($t \geq 0$ in Minuten, z(t) in Liter pro Minute).

a) **Bestimmen** Sie den Zeitpunkt t_0, zu dem die momentane Zuflussrate 6 Liter pro Minute beträgt. 2

b) **Begründen** Sie, dass sich nach einer Minute mehr als 3 Liter Wasser im Behälter befinden. 2

c) Betrachtet wird ein Zeitraum von 2 Minuten.
Geben Sie eine Gleichung **an**, mit der ein 2-Minuten-Zeitraum bestimmt werden kann, in dem die Wassermenge im Behälter um 3 Liter zunimmt. 1

I.3 Analytische Geometrie

Gegeben sind die Punkte $A(1|4|3)$ und $B(1|4|-2)$ sowie die Ebene

E: $x_2 = 4$ und die Gerade k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(r \in \mathbb{R})$.

a) **Begründen** Sie, dass die Ebene E orthogonal zur Geraden k ist und den Punkt A enthält. 2

b) Der Punkt C liegt auf der Geraden k und das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt 15.
Bestimmen Sie alle möglichen Koordinaten von C. 3

I.4 Stochastik

In einer Mensa steht den Gästen ein Wasserspender zur Verfügung, an dem Wasser entnommen werden darf. Dabei kann jeder Gast zwischen stillem Wasser und Sprudelwasser wählen. Alle Gäste nehmen sich zum Essen ein Glas Wasser. Zusätzlich stehen auf jedem Tisch Karaffen mit Apfelsaft bereit.
Für einen zufällig ausgewählten Gast beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür,

- dass er seinem Wasser Apfelsaft zugibt, 70 %,
- dass er weder stilles Wasser wählt noch Apfelsaft zugibt, 5 %,
- dass er entweder stilles Wasser wählt oder Apfelsaft zugibt, 70 %.

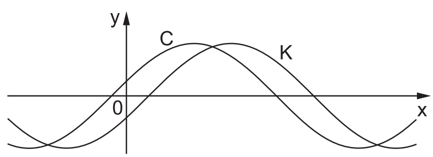
a) **Stellen** Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel **dar**. 3

b) **Berechnen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Gast, der Sprudelwasser gewählt hat, anschließend Apfelsaft zugibt. 2

I.5.1 Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = \sin(x-a)$ und g mit $g(x) = \cos(2-x)$.

Die Abbildung zeigt die Graphen von f_6 und g.



a) **Bestimmen** Sie eine Nullstelle von g. 1

b) **Ordnen** Sie die Graphen C und K den Funktionen f_6 und g **zu** und **begründen** Sie Ihre Zuordnung. 2

c) **Zeigen** Sie, dass der Graph von $f_{2-\frac{\pi}{2}}$ mit dem Graphen der Funktion g übereinstimmt. 2

Lösung

I.1 Analysis

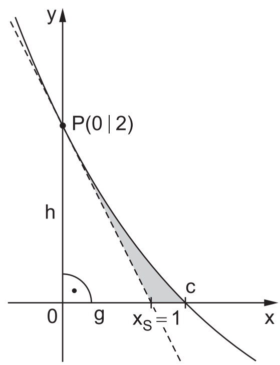
a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 \cdot e^{-0,5x} - 2$.
Für die Ableitung erhält man mithilfe der Kettenregel $f'(x) = -2 \cdot e^{-0,5x}$.

Für die Gleichung einer Tangente kann man z. B. als Ansatz wählen:
$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Mit $u = 0$, $f(0) = 2$ und $f'(0) = -2$ ergibt sich:
$\mathbf{t(x) = -2x + 2}$

Anmerkung:
Selbstverständlich erhalten Sie dasselbe Ergebnis mit dem Ansatz $y = m \cdot x + c$.
Es ist $m = f'(0) = -2$; die Punktprobe mit $P(0|2)$ ergibt $2 = -2 \cdot 0 + c$ und somit $c = 2$.

b) Den Inhalt der markierten Fläche kann man z. B. berechnen, indem man von dem Flächeninhalt, den der Graph von f mit den Achsen einschließt, den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, das durch die Tangente und die Koordinatenachsen gegeben ist, abzieht.



Für die Berechnung des Flächeninhaltes I des Dreiecks mit $I = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ benötigt man die Längen von Grundseite und Höhe (siehe Skizze).
Wegen $f(0) = 2$ gilt $h = 2$; die Länge der Grundseite bestimmt man mithilfe der Schnittstelle x_S der Tangente mit der x-Achse.
Der Ansatz $-2x_S + 2 = 0$ liefert $x_S = 1$.
Damit erhält man:

$$A = \int_0^c f(x)\,dx - \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \int_0^c f(x)\,dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = \int_0^c f(x)\,dx - 1$$

I.2 Analysis

Die momentane Zuflussrate z ist gegeben durch $z(t) = 0,2t^2 + 1$ mit $t \geq 0$.

a) Für den Zeitpunkt t_0 mit der momentanen Zuflussrate 6 Liter pro Minute gilt:

$$\begin{aligned} z(t_0) = 0,2t_0^2 + 1 &= 6 \quad && |-1 \\ 0,2t_0^2 &= 5 && |\cdot 5 \\ t_0^2 &= 25 \\ t_0 &= 5 && \text{(Die zweite Lösung entfällt wegen } t \geq 0.\text{)} \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $\mathbf{t_0 = 5}$ beträgt die momentane Zuflussrate 6 Liter pro Minute.

b) Für $t > 0$ ist $t^2 > 0$ und damit $z(t) = 0{,}2t^2 + 1 > 1$.
Da bereits zu Beginn 2 Liter im Behälter waren, sind es nach einer Minute insgesamt mehr als 3 Liter.

c) Das Integral über die momentane Zuflussrate liefert die Änderung bzw. Zunahme. Da der Zeitraum 2 Minuten ab einem bestimmten Zeitpunkt t_1 umfasst, lautet die gesuchte Gleichung:

$$\int_{t_1}^{t_1+2} \mathbf{z(x)\,dx = 3}$$

I.3 Analytische Geometrie

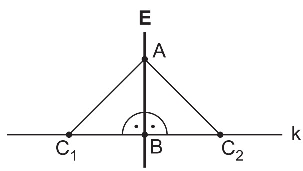
Gegeben sind die Punkte $A(1|4|3)$ und $B(1|4|-2)$ sowie die Ebene $E\colon x_2 = 4$ und die Gerade $k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Die Ebene E ist orthogonal zur Geraden k, wenn ihr Normalenvektor $\vec{n}$ ein Vielfaches des Richtungsvektors von k ist (bzw. die Vektoren kollinear sind).

Da $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, ist **E orthogonal zu k**.

Einsetzen des Punkts A in E führt zur wahren Aussage $4 = 4$, damit ist $\mathbf{A \in E}$.

b) Da offensichtlich $B \in k$ (Stützpunkt) und $B \in E$ ist, muss B der Schnittpunkt von E und k sein.
Da die Ebene E und die Gerade k nach Teilaufgabe a orthogonal zueinander sind, ist damit das Dreieck ABC rechtwinklig, vgl. Skizze.



Den Flächeninhalt I eines rechtwinkligen Dreiecks berechnet man mithilfe von:

$$I = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

Für die Länge der Grundseite g des Dreiecks ABC erhält man:

$$g = |\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = 5$$

Daraus folgt wegen der Vorgabe $I = 15$:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot h = 15$$

$$h = \frac{30}{g} = \frac{30}{5} = 6$$

Damit ist $|\overrightarrow{BC_1}| = |\overrightarrow{BC_2}| = h = 6$.

Da B der Stützpunkt der Geraden k ist und für deren Richtungsvektor $\left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right| = 3$ gilt, führt der Ansatz

$$\overrightarrow{OC_1} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{OC_2} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

auf die Punkte $\mathbf{C_1(1\,|\,10\,|\,-2)}$ und $\mathbf{C_2(1\,|\,-2\,|\,-2)}$.

Hinweis: Selbstverständlich ist auch der allgemeinere Ansatz $C(1\,|\,4+3r\,|\,-2)$ und $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 6$ möglich.

I.4 Stochastik

a) Mit den Bezeichnungen

S: „Gast wählt stilles Wasser."

A: „Gast mischt sein Wasser mit Apfelsaft."

können dem Aufgabentext folgende Werte entnommen werden:

	S	$\overline{S}$	
A			0,7
$\overline{A}$		0,05	
			1

$P(A) = 0{,}7$ — „Wahrscheinlichkeit, dass der Gast seinem Wasser Apfelsaft zugibt, beträgt 70 %"

$P(\overline{S} \cap \overline{A}) = 0{,}05$ — „Wahrscheinlichkeit, dass der Gast weder stilles Wasser wählt noch Apfelsaft zugibt, beträgt 5 %" (gleichbedeutend mit der Wahl von purem Sprudelwasser)

$P(S \cap \overline{A}) + P(\overline{S} \cap A) = 0{,}7$ — „Wahrscheinlichkeit, dass der Gast entweder stilles Wasser wählt oder Apfelsaft zugibt, beträgt 70 %"

Anmerkung zur Formulierung „entweder … oder …":
Die Formulierung „entweder … oder" bezieht anders als die Formulierung „oder" nicht den Fall ein, dass beide Merkmale vorliegen.

Der Reihe nach berechnet man dann:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P(S \cap \overline{A}) = P(\overline{A}) - P(\overline{S} \cap \overline{A}) = 0{,}3 - 0{,}05 = 0{,}25$

$P(\overline{S} \cap A) = 0{,}7 - P(S \cap \overline{A}) = 0{,}7 - 0{,}25 = 0{,}45$

	S	$\overline{S}$	
A		0,45	0,7
$\overline{A}$	0,25	0,05	0,3
			1

Die restlichen Werte der Vierfeldertafel ergeben sich durch Summen- bzw. Differenzbildung. Damit erhält man folgende vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel:

	S	$\overline{S}$	
A	0,25	0,45	0,7
$\overline{A}$	0,25	0,05	0,3
	0,5	0,5	1

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Gast, von dem bekannt ist, dass er Sprudelwasser ($\overline{S}$: „kein stilles Wasser“) gewählt hat, auch Apfelsaft (A) wählt, entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{S}}(A)$.

$$P_{\overline{S}}(A) = \frac{P(\overline{S} \cap A)}{P(\overline{S})} = \frac{0{,}45}{0{,}5} = \frac{9}{10} = \mathbf{90\ \%}$$

(Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung $\overline{S}$)

Anmerkung: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{S}}(A)$ ist nicht mit der Wahrscheinlichkeit $P(\overline{S} \cap A)$ zu verwechseln, wobei $\overline{S} \cap A$ das Ereignis „ein zufällig ausgewählter Gast mischt Sprudelwasser mit Apfelsaft“ bedeutet.

I.5.1 Analysis

a) Eine Nullstelle von g:

$$g(x) = 0$$
$$\cos(2 - x) = 0$$

Von den unendlich vielen Nullstellen der Kosinusfunktion wählt man z. B.:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Damit folgt:

$$2 - x = \frac{\pi}{2}$$
$$\mathbf{x = 2 - \frac{\pi}{2}}$$

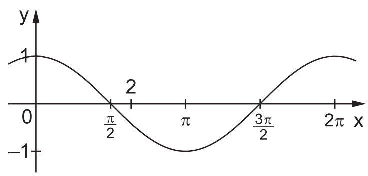
b) s gilt:

$g(0) = \cos(2) < 0$, da $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{2}$

und $\cos(u) < 0$ für alle u mit

$\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$ (siehe Skizze).

Daher gehört **K zu g und C zu f_6**.



c) Wegen der Achsensymmetrie des Graphen von cos(x) und mit dem allgemeinen Zusammenhang zwischen sin(x) und cos(x) gilt:

$$\cos(2 - x) = \cos(x - 2) = \sin\left(x - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \underbrace{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}_{a}\right)$$

Damit stimmen die Graphen von g und $f_{2 - \frac{\pi}{2}}$ überein.

II Analysis 1

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{3}{1\,000} \cdot x^4 - \frac{8}{100} \cdot x^3 + \frac{6}{10} \cdot x^2.$$

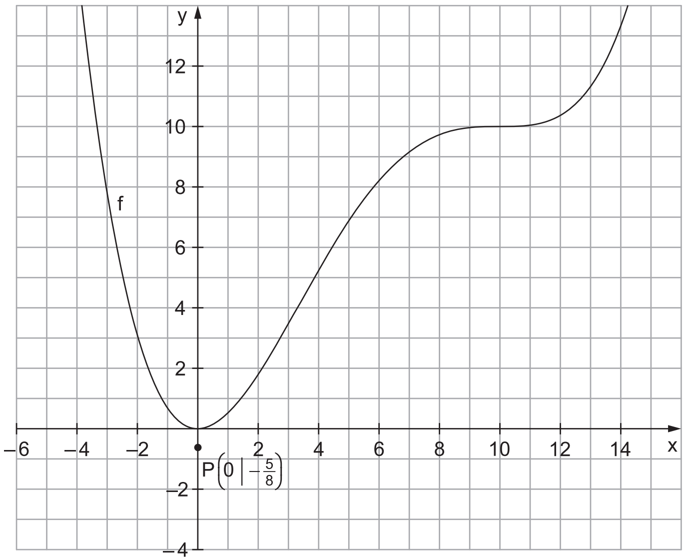


Abbildung 1

Abbildung 1 zeigt den Graphen von f sowie den Punkt $P\left(0 \middle| -\frac{5}{8}\right)$.

a) **Geben** Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen von f **an**.
Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine weiteren Extrempunkte besitzt. 6

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5 \mid f(5))$ wird mit t bezeichnet.

b) **Ermitteln** Sie die Gleichung von t. 4

c) **Skizzieren** Sie in Abbildung 1 zwei von t verschiedene Tangenten an den Graphen von f, die die y-Achse im Punkt P schneiden und deren Steigungen unterschiedliche Vorzeichen haben. 3

d) Der Graph der reellen Funktion g mit $g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ kann aus dem Graphen von f erzeugt werden.

Geben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung von a und b **an**.

Durch die Transformation von f zu g wird aus dem Punkt $(10 \mid 10)$ auf dem Graphen von f der Punkt $(12 \mid 12)$ auf dem Graphen von g.

Bestimmen Sie die Werte von a und b. 4

2. Zwei Radfahrer starten gleichzeitig nebeneinander auf einer geradlinigen Bahn aus einer Ruheposition.
Radfahrer A beschleunigt 10 Sekunden lang und fährt danach mit konstanter Geschwindigkeit weiter.
Radfahrer B beschleunigt 12 Sekunden lang und fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

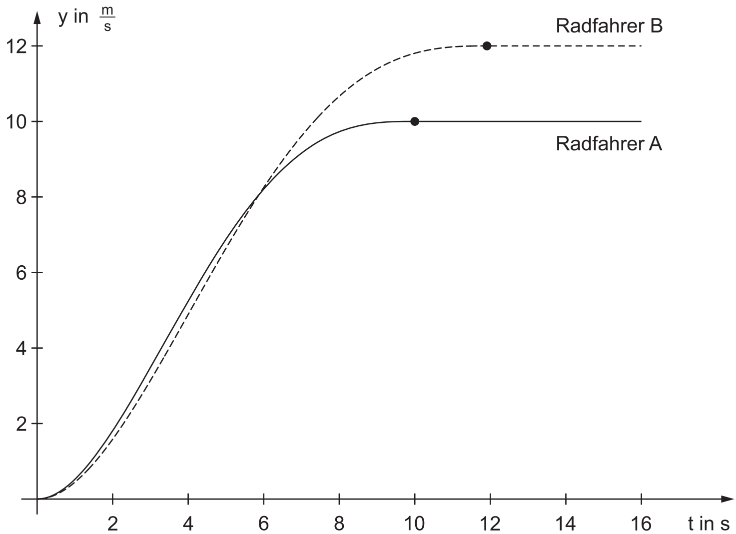


Abbildung 2

Abbildung 2 stellt die Geschwindigkeitsverläufe der beiden Radfahrer in den ersten 15 Sekunden nach dem Start dar.
Dabei wird der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer A in den ersten 10 Sekunden nach dem Start durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{3}{1\,000} \cdot t^4 - \frac{8}{100} \cdot t^3 + \frac{6}{10} \cdot t^2$$

beschrieben. Der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer B wird in den ersten 12 Sekunden nach dem Start durch eine Funktion h beschrieben.
Dabei ist t die seit dem Start vergangene Zeit in Sekunden und f(t) bzw. h(t) die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1 a

Angabe der Koordinaten des Tiefpunkts

- Betrachten Sie den Graphen von f in Abbildung 1 sowie die Funktionsgleichung.

Rechnerischer Nachweis, dass es keine weiteren Extrempunkte gibt

- Verwenden Sie zunächst die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ für Extrempunkte und ermitteln Sie die möglichen Extremstellen.
- Untersuchen Sie die Stelle, die nicht dem Tiefpunkt entspricht, z. B. mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums.

Teilaufgabe 1 b

Ermittlung der Gleichung der Tangente t

- Ermitteln Sie die Steigung von t mit $m_t = f'(5)$.
- Beachten Sie, dass der Punkt $(5 \mid f(5))$ auf der Tangente liegt, und ermitteln Sie daraus direkt den y-Achsenabschnitt der Tangentengleichung.

Teilaufgabe 1 c

Skizzieren der Tangenten

- Die skizzierten Tangenten müssen von t verschieden sein. Sie dürfen also nicht die Tangente an den Graphen im Punkt $(5 \mid f(5))$ zeichnen.
- Es gibt drei mögliche Tangenten. Wählen Sie zwei davon, wobei eine der beiden eine negative und die andere eine positive Steigung haben muss.

Teilaufgabe 1 d

Angabe der Bedeutung der Parameter

- Beschreiben Sie, wie sich der Parameter a auf den Graphen einer Funktion mit der Funktionsgleichung $a \cdot f(x)$ auswirkt.
- Beschreiben Sie, wie sich der Parameter b auf den Graphen einer Funktion mit der Gleichung $f(b \cdot x)$ auswirkt.

Berechnung der Parameter

- Ermitteln Sie den Parameter a aus dem Ansatz $g(12) = a \cdot f(10)$.
- Zur Berechnung des Parameters b kann verwendet werden, dass der Graph sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung um den gleichen Faktor gestreckt werden soll.
- Der Streckfaktor in x-Richtung ist $\frac{1}{b}$, daher gilt $\frac{1}{b} = a$.

Teilaufgabe 2 a

Berechnung der Geschwindigkeit von Radfahrer A nach 3 Sekunden

- Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Radfahrers A nach 3 Sekunden mithilfe des Funktionswerts f(3).

Lösung

1. a) Für die erste Ableitung der Funktion f ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{3}{250} \cdot x^3 - \frac{6}{25} \cdot x^2 + \frac{6}{5} \cdot x$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle x einen Extrempunkt, wenn dort $f'(x) = 0$ gilt und f' an dieser Stelle zusätzlich einen Vorzeichenwechsel besitzt.
Nach dem Faktorisieren des Funktionsterms von f' ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{3}{250} x \cdot (x-10)^2$$

Die Funktion f' hat an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ jeweils eine Nullstelle. Nur an der Stelle $x_2 = 10$ kann der Graph von f einen weiteren Extrempunkt haben. Dort befindet sich jedoch eine doppelte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel.

Daher hat der Graph von f dort keinen Extrempunkt, der Tiefpunkt $(0|0)$ ist folglich der einzige Extrempunkt des Graphen von f.

Anmerkung:
Aus der Beobachtung, dass $f''(10) = 0$ gilt, kann nicht direkt geschlossen werden, dass der Graph von f bei $x_2 = 10$ keinen Extrempunkt hat. Es ist aber möglich, mithilfe der Faktorisierung von

$$f''(x) = \frac{9}{250} \cdot x^2 - \frac{12}{25} \cdot x + \frac{6}{5} = \frac{3}{250}(x-10) \cdot (3x-10)$$

zu begründen, dass der Graph von f'' bei $x_2 = 10$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Damit hat der Graph von f bei $x_2 = 10$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente (Sattelpunkt) und keinen Extrempunkt.

b) Die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5|f(5))$ ist gleich der Steigung des Graphen von f in diesem Punkt:

$$\begin{aligned} m_t &= f'(5) \\ &= \frac{3}{250} \cdot 5 \cdot (5-10)^2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Der y-Achsenabschnitt b der Tangente ergibt sich durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes $(5|f(5))$. Es gilt:

$$f(5) = \frac{3}{1\,000} \cdot 5^4 - \frac{8}{100} \cdot 5^3 + \frac{6}{10} \cdot 5^2 = 6{,}875$$

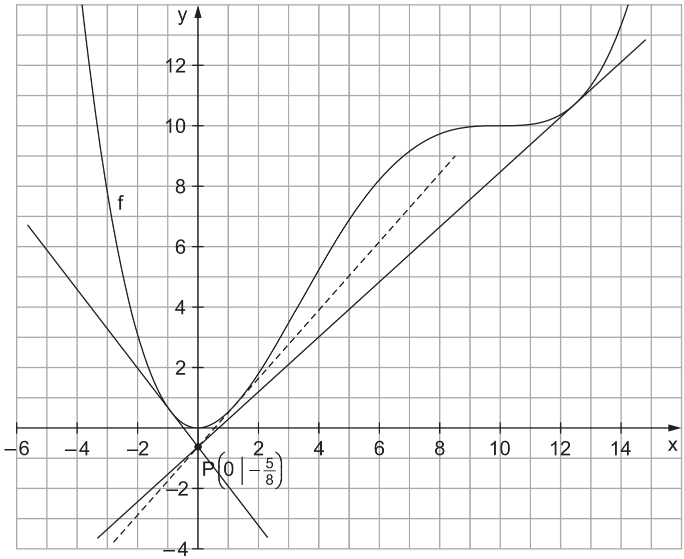
Damit muss gelten:

$$6{,}875 = \frac{3}{2} \cdot 5 + b \;\Leftrightarrow\; b = -0{,}625 = -\frac{5}{8}$$

Die Gleichung von t ist also:

$$t(x) = \frac{3}{2} x - \frac{5}{8}$$

c) Skizze der Tangenten:



Anmerkung:
Hier sind alle drei möglichen Tangenten gezeichnet. Es muss in jedem Fall die Tangente mit negativer Steigung und eine der anderen beiden skizziert werden.

d) Angabe der Bedeutung der Parameter:
Für die Funktionsgleichung der Funktion g gilt $g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$.
Der Graph der Funktion g wird durch Streckung des Graphen von f in y-Richtung mit dem Faktor a und durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ erzeugt.

Berechnung der Parameter:
Da sich der Punkt $(12|12)$ aus dem Punkt $(10|10)$ des Graphen von f ergeben soll, muss der Graph von f sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung um den Faktor $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$ gestreckt werden. Daher gilt:

$$a = \frac{6}{5} \text{ und } \frac{1}{b} = \frac{6}{5} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{5}{6}$$

Alternative:

$$12 = \frac{1}{b} \cdot 10 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{5}{6}$$