

2024

Abitur

Original-Prüfung
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Thüringen

Mathematik

+ Übungsaufgaben
+ Online-Glossar



STARK

Inhalt

Vorwort
Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1	Ablauf der Prüfung	I
2	Inhalte und Schwerpunktthemen	II
3	Leistungsanforderungen und Bewertung	V
4	Operatoren	VII
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung	VIII
6	Technische Grundlagen für den Umgang mit CAS-Rechnern	IX
7	Hinweise und Warnungen für das Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern	XXVIII

Übungsaufgaben

Prüfungsteil A – ohne Hilfsmittel: Aufgabensatz 1	Ü-1
Prüfungsteil A – ohne Hilfsmittel: Aufgabensatz 2	Ü-9
Prüfungsteil A – ohne Hilfsmittel: Aufgabensatz 3	Ü-18
Prüfungsteil B1 – Analysis: Aufgabe 1	Ü-30
Prüfungsteil B1 – Analysis: Aufgabe 2	Ü-40
Prüfungsteil B1 – Analysis: Aufgabe 3	Ü-51
Prüfungsteil B2 – Analytische Geometrie: Aufgabe 1	Ü-61
Prüfungsteil B2 – Analytische Geometrie: Aufgabe 2	Ü-68
Prüfungsteil B2 – Analytische Geometrie: Aufgabe 3	Ü-76
Prüfungsteil B3 – Stochastik: Aufgabe 1	Ü-82
Prüfungsteil B3 – Stochastik: Aufgabe 2	Ü-87
Prüfungsteil B3 – Stochastik: Aufgabe 3	Ü-93

Abiturprüfung 2021

Pflichtaufgaben Teil A	2021-1
Pflichtaufgaben Teil B: Analysis	2021-14
Wahlaufgaben Teil C1: Geometrie/Stochastik	2021-27
Wahlaufgaben Teil C2: Stochastik/Geometrie	2021-39

Abiturprüfung 2022

Pflichtaufgaben Teil A	2022-1
Pflichtaufgaben Teil B: Analysis	2022-16
Wahlaufgaben Teil C1: Geometrie/Stochastik	2022-27
Wahlaufgaben Teil C2: Stochastik/Geometrie	2022-39

Abiturprüfung 2023

Aufgaben www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).



Bei **MyStark** finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
- **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
- **Jahrgänge 2019 und 2020**

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Autoren:

Dr. Hubert Langlotz, Wutha-Farnroda (Übungsaufgaben für Teil A: Serie 1, Aufgaben 4 bis 10; Serie 2, Aufgaben 4, 7 bis 10; Serie 3, Aufgaben 4, 9, 10; Übungsaufgaben für B3; 2021: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B [Teilaufgabe 1] und C2; 2022: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B [Teilaufgabe 2] und C2; 2023: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B [Teilaufgabe 2] und C2)



Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau (Übungsaufgaben für Teil A: Serie 1, Aufgaben 1 bis 3; Serie 2, Aufgaben 1, 2, 3, 5, 6; Serie 3, Aufgaben 1, 2, 3, 5 bis 8; Übungsaufgaben für B1 und B2; 2021: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 6 bis 10], B [Teilaufgabe 2] und C1; 2022: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 6 bis 10], B [Teilaufgabe 1] und C1; 2023: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 6 bis 10], B [Teilaufgabe 1] und C1)

Vorwort

Liebe Abiturientinnen und Abiturienten,

dieses Buch hilft Ihnen, sich frühzeitig und umfassend auf die **Abiturprüfung 2024 im Kernfach Mathematik** der Oberstufe vorzubereiten. Dazu enthält es neben den **Prüfungsaufgaben der Jahre 2021 und 2022** speziell auf die neue Struktur der Prüfung mit Computeralgebrasystem (CAS) abgestimmte **Übungsaufgaben** sowohl für den hilfsmittelfreien Teil wie auch für alle anderen Aufgaben. Diese Übungsaufgaben berücksichtigen die Vorgaben des neuen Lehrplans. Wenn Sie anhand dieser Aufgaben die Prüfungssituation „durchspielen“, sollten Sie sich sowohl an der vorgegebenen Bearbeitungszeit orientieren als auch die Situation des „Auswählen-Müssens“ von bestimmten Aufgaben berücksichtigen. Die **Aufgaben des Jahres 2023** stehen Ihnen außerdem als PDF zum Download zur Verfügung, sobald sie zur Veröffentlichung freigegeben sind. Auf der Plattform MyStark finden Sie zudem die **Prüfungsaufgaben der Jahre 2019 und 2020**.

Die Bildschirmausdrucke im Lösungsteil wurden mit einem TI-NspireCX CAS erstellt. Sie sind aber in den meisten Fällen jeweils in annähernd gleicher Weise mit einem anderen CAS reproduzierbar. In vielen Fällen wurde die Möglichkeit genutzt, **alternative Lösungsvorschläge** darzustellen, die zum Teil die verschiedenen Möglichkeiten des digitalen Werkzeugs aufzeigen oder aber ganz ohne Hilfsmittel auskommen.

Weiter finden Sie zusätzliche  **Hinweise und Tipps**, die zwischen den Aufgaben und Lösungen stehen und für jede Teilaufgabe ausgearbeitet sind. Diese liefern Denkanstöße zur Lösung und sind nach zunehmendem Grad der Hilfestellung geordnet. Sollten Sie bei einer Aufgabe also keinen eigenen Lösungsansatz finden, so lesen Sie zunächst den **ersten Tipp** zu der entsprechenden Teilaufgabe und verdecken die weiteren Tipps mit einem Blatt. Denken Sie über den Tipp nach und versuchen Sie nun selbst einen Ansatz zu schaffen. Sollten Sie gar nicht weiterkommen, dann lesen Sie den **nächsten Tipp** usw. Schlagen Sie in der Lösung erst nach, wenn Sie mit allen zu der Aufgabe gehörenden Tipps nicht weiterkommen. Im Lösungsteil werden zudem ausführliche  **Hinweise** gegeben, die Ihnen die vorgerechnete **Lösung erläutern und erklären**, sodass Sie die Lösung selbstständig nachvollziehen und verstehen können. Bei der Lösungsdarstellung werden teilweise auch alternative Lösungswege aufgezeigt, damit Sie Ihre angefertigte Lösung korrigieren können und um zu zeigen, dass es oft eine Vielfalt von mathematischen Lösungsansätzen gibt.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2024 vom Ministerium für Bildung, Jugend und Sport bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:

<http://www.stark-verlag.de/mystark>

Viel Erfolg!

Ihr Autorenteam

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Ablauf der Prüfung

Im Freistaat Thüringen gibt es im Kernfach Mathematik für Kurse mit erhöhtem Anforderungsniveau ein zentrales schriftliches Abitur. Die Aufgaben werden durch eine Abituraufgabenkommission erstellt, in der erfahrene Lehrkräfte mitarbeiten. Die im Zusammenhang mit dem Abituraufgabenpool der Länder veröffentlichte Aufgabensammlung für Mathematik dient als Orientierung für die Weiterentwicklung der Aufgabenformate und Anforderungen in der Abiturprüfung in Thüringen. Sie finden sie im Internet unter: <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik>

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die Abiturprüfung hatte in den vorigen Jahren bis einschließlich zum **Jahr 2023** folgende Struktur:

Teil A: hilfsmittelfreier Teil aus allen Lernbereichen (40 BE)

Teil B: Analysis (40 BE)

Teil C1: Geometrie (25 BE), Stochastik (15 BE)

Teil C2: Stochastik (25 BE), Geometrie (15 BE)

Für den Prüfungsteil A war ein Arbeitsblatt, das die Aufgaben sowie zu vervollständigende Koordinatensysteme und Platz für die Lösungen enthielt, vorgesehen. Nur die Teile B und C1 bzw. C2 konnten mit CAS bearbeitet werden.

Der Prüfungsteil A bestand aus acht Aufgaben, die von allen Prüflingen bearbeitet werden mussten; in den Jahren 2021 und 2022 bestand er aus zehn Aufgaben, von denen acht zu bearbeiten waren. Im Prüfungsteil B waren immer alle Teilaufgaben zu bearbeiten. Im Prüfungsteil C konnte zwischen C1 und C2 gewählt werden; in den Jahren 2021 und 2022 gab es zusätzlich die Möglichkeit, nur die Aufgaben zur Vektorrechnung/Analytischen Geometrie (C1 Aufgabe 1 und C2 Aufgabe 2) oder zur Stochastik (C1 Aufgabe 2 und C2 Aufgabe 1) zu lösen.

Ab dem **Jahr 2024** ist folgende Struktur für das Mathematikabitur vorgesehen:

Teil A: hilfsmittelfreier Teil aus allen Lernbereichen (30 BE)

Teil B1: Analysis (40 BE)

Teil B2: Analytische Geometrie (25 BE)

Teil B3: Stochastik (25 BE)

Der Prüfungsteil A besteht aus einem Pflichtteil mit vier Aufgaben der Aufgabengruppe 1 (zweimal Analysis und je einmal Analytische Geometrie und Stochastik) sowie einem Wahlteil mit sechs Aufgaben der Aufgabengruppe 2 (jeweils zweimal Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik). In jeder Aufgabe sind 5 BE erreichbar. Die Aufgaben der Aufgabengruppe 1 sind den Anforderungsbereichen I und II (siehe Seite V) zuzuordnen, die Aufgaben der Aufgabengruppe 2 erreichen zumindest in einer Teilaufgabe den Anforderungsbereich III.

Der Pflichtteil ist vollständig zu bearbeiten, aus dem Wahlteil sind zwei Aufgaben nach Wahl des Prüflings zu bearbeiten. Beide Aufgaben können aus demselben Sachgebiet gewählt werden. Im Prüfungsteil B sind alle drei Aufgaben B1, B2 und B3 zu lösen.

Dauer der Prüfung

Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 300 Minuten. Jeder Prüfling entscheidet selbst über den Zeitpunkt, zu dem er die Bearbeitung zum Prüfungsteil A abgibt und die Hilfsmittel erhält. Dieser Zeitpunkt muss innerhalb der ersten 100 Minuten nach Prüfungsbeginn liegen.

Zugelassene Hilfsmittel

In Teil A dürfen außer Zeichengeräten keine weiteren Hilfsmittel verwendet werden. In Teil B kann das Dokument für mathematische Formeln sowie ein Computeralgebrasystem (CAS), das im Unterricht eingesetzt wurde, genutzt werden. Dieses Formeldokument steht in der Mediothek des Thüringer Schulportals (TSP) zum Download zur Verfügung: <https://www.schulportal-thueringen.de/web/guest/media/detail?tspi=16426>

2 Inhalte und Schwerpunktthemen

Die verbindlichen Lehrplanvorgaben, nach denen in den vier Kurshalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen die inhaltlichen Anforderungen. Die Binomialverteilung einschließlich der Zwei-Sigma-Regel und deren Anwendungen spielen nach dem veränderten Lehrplan von 2018 eine größere Rolle. Unter <https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392> finden Sie eine ausführliche Darstellung des weiterentwickelten Lehrplans für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik. Eine (nicht ganz vollständige) Übersicht über wichtige, abiturrelevante Kompetenzen dieses Lehrplans ist nachstehend aufgeführt.

Analysis – Sachkompetenz

Der Schüler kann

- die mittlere Änderungsrate auch in Sachzusammenhängen ermitteln und interpretieren,
- die Ableitung einer Funktion als lokale Änderungsrate und als Differenzialquotient beschreiben, erläutern und geometrisch als Tangentenanstieg interpretieren,
- die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen aus der Anschauung heraus deuten,
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitungsfunktion erkennen, begründen und darstellen,
- Ableitungen für Funktionen ermitteln, ohne Hilfsmittel für
 - Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten,
 - ganzrationale Funktionen (Summe von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten),
 - Exponentialfunktionen (Basis e),
 - Sinus-, Kosinusfunktionen und die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$,
 - Verknüpfungen und einfache Verkettungen dieser Funktionen,
- Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten, ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen (Basis e) sowie deren Verkettungen und Verknüpfungen auf Eigenschaften (Definitions- und Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Symmetrie bezüglich der y -Achse und des Koordinatenursprungs, Monotonie, Extrem- und Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen) untersuchen,

Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2021
Pflichtaufgabe Teil B: Analysis

1. Gegeben ist die Schar der in \mathbb{R} definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right) \cdot e^{a-x} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- a) Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f_a mit den Koordinatenachsen an.

Ermitteln Sie den Wert für a so, dass der Graph von f_a die y -Achse unter einem Winkel von 45° schneidet.

(4 BE)

- b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und Wendepunkte der Graphen von f_a .

Geben Sie zwei Eigenschaften für die Lage der Extrempunkte im Koordinatensystem an.

(8 BE)

- c) Für jeden Wert von a bilden die Punkte $S\left(\frac{1}{2} \mid f_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, $E\left(\frac{3}{2} \mid f_a\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ und $W\left(\frac{5}{2} \mid f_a\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ ein Dreieck.

Bestimmen Sie den Wert von a , für den dieses Dreieck gleichschenkelig mit der Basis \overline{EW} ist.

(3 BE)

- d) Der Anstieg einer Tangente im Punkt $W\left(\frac{5}{2} \mid f_a\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ an einen Graphen von f_a soll eine natürliche Zahl sein.

Ermitteln Sie eine zugehörige Tangentengleichung.

(3 BE)

- e) Die Graphen der Schar g_a ergeben sich, wenn die Graphen der Schar f_a so in x -Richtung verschoben werden, dass die Extrempunkte auf der y -Achse liegen.

Geben Sie die Verschiebung und eine Gleichung von g_a an.

Begründen Sie, dass kein Wert für a existiert, so dass der Extrempunkt des Graphen der zugehörigen Funktion g_a im Koordinatenursprung liegt.

(3 BE)

Hinweise und Tipps

Aufgabe 1

- Definieren Sie die Funktion f_a auf ihrem CAS-Rechner in geeigneter Form, z. B. als $f(a, x)$.

Aufgabe 1 a

- Bilden Sie die ersten drei Ableitungsfunktionen von f_a . Notieren Sie deren Gleichungen. Beachten Sie dabei den Hinweis zu dynamischen Definitionen im Kapitel „Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung“ in diesem Band.
- Speichern Sie die Gleichungen der Ableitungsfunktionen unter geeigneten Bezeichnungen auf Ihrem CAS-Rechner ab, damit Sie sie nicht immer wieder eintippen müssen.

Aufgabe 1 b

- Untersuchen Sie für die Bestimmung der lokalen Extrempunkte und der Wendepunkte jeweils eine notwendige und eine hinreichende Bedingung.
- Ermitteln Sie die zugehörigen Funktionswerte und notieren Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und der Wendepunkte.
- Betrachten Sie die Koordinaten der ermittelten Extrempunkte und schlussfolgern Sie hieraus auf gemeinsame Eigenschaften.

Aufgabe 1 c

- Veranschaulichen Sie, z. B. für $a=3$, den Sachverhalt.
- Bestimmen Sie für das gesuchte Dreieck SEW für alle Dreiecksseiten eine vektorielle Darstellung und berechnen Sie die Längen der Seiten SW und SE. Ermitteln Sie, wann $\overline{SW} = \overline{SE}$ gilt.

Aufgabe 1 d

- Für den Anstieg m einer Funktion f an einer Stelle x_0 gilt $m = f'(x_0)$. Überprüfen Sie, wann sich hierfür eine natürliche Zahl ergibt. Berücksichtigen Sie z. B., dass e zwar eine irrationale Zahl ist, für die aber $e^0 = 1$ gilt.
- Neben dem Anstieg der Tangente benötigen Sie für die Tangentengleichung noch den Berührungspunkt $P(x_0 | f(x_0))$.

Aufgabe 1 e

- Es gilt: $f(x + b)$ ergibt für $b > 0$ eine Verschiebung des Graphen von f auf der x -Achse um b in negative x -Richtung.
- Berücksichtigen Sie zur Beantwortung der zweiten Anweisung den Verlauf der natürlichen Exponentialfunktion $y = e^x$.

Aufgabe 2 a

- Sie haben die Koordinaten des Scheitelpunkts des Graphen von p gegeben. Diese Koordinaten müssen die Gleichung von p erfüllen. Zweckmäßig ist es, dabei an die Scheitelpunktsform der Parabel zu denken.
- Die Koordinaten des Schnittpunktes Z von f_2 und p müssen ebenfalls die Gleichung von p erfüllen.
- Stellen Sie zunächst die Scheitelpunktsform von p auf.
- Vergleichen Sie dann durch Ausmultiplizieren mit der für p gegebenen Gleichung.

Lösungen

1. a) Für die Schnittpunkte gilt:

Schnittpunkte mit der x -Achse erhalten Sie durch Lösen der Gleichung $f_a(x)=0$.
Der Schnittpunkt mit der y -Achse ergibt sich für $x=0$ aus $f_a(0)$.

Zeichnen Sie mit dem CAS für verschiedene a mehrere Funktionsgraphen, um sich ein Bild über den Verlauf der Kurven der Schar zu machen.

Ein Schnittwinkel von 45° (des Graphen) mit der y -Achse bedeutet auch einen Schnittwinkel von 45° (der Tangente an den Graphen) mit der x -Achse.

Beachten Sie, dass der Schnittwinkel an einer Stelle x_0 mit der x -Achse dem Anstieg an dieser Stelle entspricht und mithilfe der 1. Ableitung an dieser Stelle bestimmt werden kann. Berücksichtigen Sie die Orientierung des gesuchten Winkels.

Vorarbeiten

Die Funktion f_a und die 1. bis 3. Ableitung werden definiert und gespeichert:

$$f'_a(x) = \frac{(2x-3) \cdot e^{a-x}}{2}$$

$$f''_a(x) = \frac{-(2x-5) \cdot e^{a-x}}{2}$$

$$f'''_a(x) = \frac{(2x-7) \cdot e^{a-x}}{2}$$

Beachten Sie den Hinweis zu dynamischen Definitionen in Abschnitt 6 des Kapitels „Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung“ dieses Buches: Erst den Term auswerten, dann abspeichern.

The screenshot shows a CAS window with the following content:

- Line 1: $f(a,x) := \left(\frac{1}{2} \cdot -x\right) \cdot e^{a-x}$ (Fertig)
- Line 2: $\frac{d}{dx}(f(a,x)) = \frac{(2 \cdot x - 3) \cdot e^{a-x}}{2}$
- Line 3: $fa1(a,x) := \frac{(2 \cdot x - 3) \cdot e^{a-x}}{2}$ (Fertig)
- Line 4: $\frac{d}{dx}(fa1(a,x)) = \frac{-(2 \cdot x - 5) \cdot e^{a-x}}{2}$
- Line 5: $fa2(a,x) := \frac{-(2 \cdot x - 5) \cdot e^{a-x}}{2}$ (Fertig)
- Line 6: $\frac{d}{dx}(fa2(a,x)) = \frac{(2 \cdot x - 7) \cdot e^{a-x}}{2}$
- Line 7: $fa3(a,x) := \frac{(2 \cdot x - 7) \cdot e^{a-x}}{2}$ (Fertig)

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Das Lösen der Gleichung $f_a(x)=0$ ergibt $x = \frac{1}{2}$. Damit ist der Schnittpunkt mit der x -Achse $S_x\left(\frac{1}{2} \mid 0\right)$.

Da $f_a(0) = \frac{e^a}{2}$ gilt, ist der Schnittpunkt mit der y -Achse $S_y\left(0 \mid \frac{e^a}{2}\right)$.

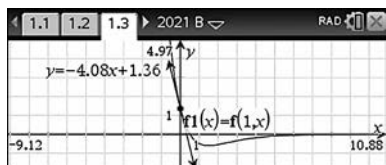
The screenshot shows a CAS window with the following content:

- Line 1: $\text{solve}(f(a,x)=0,x)$ results in $x = \frac{1}{2}$
- Line 2: $f(a,0)$ results in $\frac{e^a}{2}$

Schnittwinkel

Betrachtet man den Verlauf z. B. von $f_1(x)$, so erkennt man, dass der Anstieg im Schnittpunkt mit der y -Achse negativ ist.

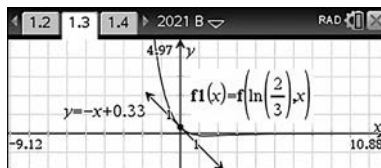
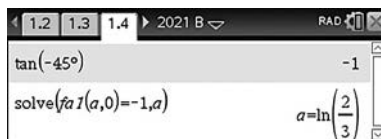
Das bedeutet, dass für den Anstieg im Schnittpunkt mit der y -Achse $f'_a(0) = -1$ gelten muss, da $\tan(-45^\circ) = -1$ gilt.



Das Lösen der Gleichung $f'_a(0) = -1$ liefert:

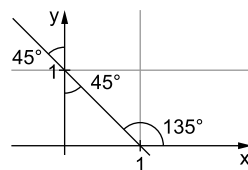
$$\underline{\underline{a = \ln\left(\frac{2}{3}\right)}}$$

Eine Kontrolle im Grafikfenster ist möglich.



Anmerkung:

Ein Schnittwinkel (des Graphen) von 45° mit der y -Achse führt auf einen Schnittwinkel (der Tangente) von 135° mit der x -Achse (siehe Abbildung rechts). Daraus resultiert der Anstieg $\tan(135^\circ) = -1$.



b) Lokale Extrempunkte

Für die notwendige Bedingung werden die Nullstellen von

$$f'_a(x) = \frac{(2x-3) \cdot e^{a-x}}{2}$$

bestimmt. $x = \frac{3}{2}$ kommt als einzige mögliche lokale Extremstelle infrage.

Für eine hinreichende Bedingung wird das Vorzeichen der 2. Ableitung an dieser Stelle bestimmt:

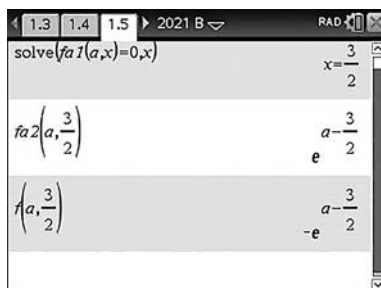
$$f''_a\left(\frac{3}{2}\right) = e^{a-\frac{3}{2}} > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$

Nun wird noch der zugehörige Funktionswert berechnet:

$$f_a\left(\frac{3}{2}\right) = -e^{a-\frac{3}{2}}$$

Es gibt also einen lokalen Tiefpunkt:

$$\underline{\underline{T\left(\frac{3}{2} \mid -e^{a-\frac{3}{2}}\right)}}$$



Wendepunkte

Für die notwendige Bedingung werden die Nullstellen von

$$f_a''(x) = \frac{-(2x-5) \cdot e^{a-x}}{2}$$

bestimmt. $x = \frac{5}{2}$ kommt als einzige mögliche Wendestelle infrage.

Für eine hinreichende Bedingung wird die 3. Ableitung an dieser Stelle bestimmt:

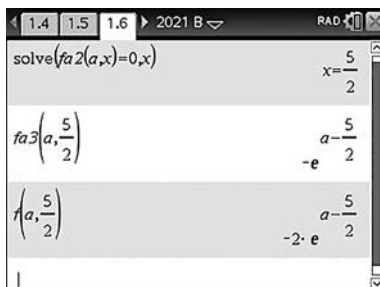
$$f_a''' \left(\frac{5}{2} \right) = -e^{a-\frac{5}{2}} < 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

Nun wird noch der zugehörige Funktionswert berechnet:

$$f_a \left(\frac{5}{2} \right) = -2e^{a-\frac{5}{2}}$$

Es gibt also einen Wendepunkt:

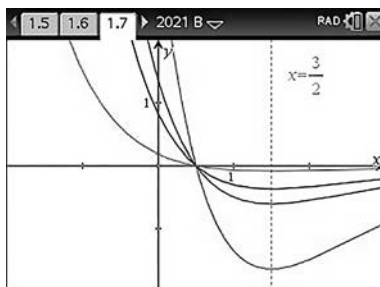
$$\underline{\underline{W \left(\frac{5}{2} \mid -2e^{a-\frac{5}{2}} \right)}}$$



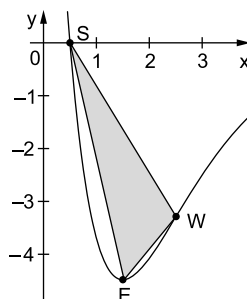
Eigenschaften

1. Da die x -Koordinate $x = \frac{3}{2}$ für den Extrempunkt aller Kurven unabhängig vom Parameter a ist, liegen alle Extrempunkte auf der Geraden $x = \frac{3}{2}$.
2. Da zusätzlich die y -Koordinaten aller Extrempunkte negativ sind, liegen alle Extrempunkte im IV. Quadranten.

Das könnte man noch durch einige Schar-kurven veranschaulichen.



- c) Für $a=3$ kann der Sachverhalt, wie nebenstehend zu sehen ist, veranschaulicht werden.





© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK