2024

FOS · BOS 13

Abitur-Prüfun

mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Bayern

Mathematik T

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Musterprüfungen zum Abitur ab 2020 (online)

Digitales Übungsmaterial zu diesem Buch

Sitzen alle mathematischen Begriffe?
Unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein **kostenloses Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen im Abitur 2024 vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu unter www.stark-verlag.de/mystark (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Weitere STARK-Angebote zur Vorbereitung auf das Fachabitur

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter: www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Autoren

Lösungen zu den Original-Abituraufgaben (Technik):
StD Winfried Stark

Lösungen zu den Original-Fachabituraufgaben (Nichttechnik):
StD Georg Ott und StD Friedrich Schmidt

Musterprüfungen:
Analysis: StD Winfried Stark; Stochastik: StD Friedrich Schmidt, StD Georg Ott

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie haben zwei lehrreiche Jahre an der BOS oder an der FOS ein zusätzliches 13. Schuljahr absolviert und werden eine schriftliche Prüfung im Fach Mathematik ablegen.

Zur Einübung der Prüfungsinhalte erhalten Sie mit diesem Buch die **offiziellen schriftlichen Abituraufgaben** von 2020 bis 2022.

Da sich mit dem Abitur 2020 die Struktur und die Inhalte der Prüfung geändert haben, eignen sich die Original-Prüfungen vor 2020 nur noch teilweise zur Prüfungsvorbereitung. Der **Übungsteil** des Buchs enthält daher eine Auswahl an prüfungsrelevanten Original-Aufgaben zur Analysis vor 2019. Die abgedruckten Original-Aufgaben zur **Stochastik aus dem Fachabitur 2019** (Nichttechnik) könnten aufgrund der Lehrplananpassung genau so auch in der neuen Abiturprüfung (Technik) gestellt werden und bieten Ihnen daher eine zusätzliche Übungsmöglichkeit.

Um Ihnen einen weiteren Eindruck von Form und Inhalt der neuen Abiturprüfung seit 2020 zu geben, erhalten Sie mit dem Buch zwei **Musterprüfungen**, die Sie online auf MyStark abrufen können (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Zu jeder Aufgabe folgen **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie zusätzliche **Lösungshinweise**, die Ihnen das eigenständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Die angeführten Lösungen sind dabei als **möglicher, aber keineswegs einziger Weg** zum Erreichen des Ergebnisses zu sehen.

Das Ziel der Arbeit mit dem Buch besteht darin, dass Sie die Problemstellungen weitgehend selbstständig bearbeiten können und die beschriebenen Lösungswege nur noch zur Kontrolle Ihrer eigenen Ergebnisse nutzen. Wenn Sie dieses Ziel erreicht haben, sind Sie gut auf die bevorstehende Prüfung vorbereitet.

Darüber hinaus können Sie dieses Buch **unterrichtsbegleitend** bei der systematischen Vorbereitung auf Schulaufgaben einsetzen, da Ihr Fachlehrer oder Ihre Fachlehrerin hier auch immer die Abiturprüfung im Blick haben wird.

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen für Ihre Prüfungen viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Aufgabe der Beruflichen Oberschule

In der Beruflichen Oberschule sind die Fachoberschule (FOS) und die Berufsoberschule (BOS) zusammengefasst.

Ziel der Berufsoberschule (BOS) ist es, Schülerinnen und Schüler mit einem mittleren Schulabschluss und einer Berufsausbildung innerhalb von zwei Schuljahren (Jahrgangsstufen 12 und 13) in den Ausbildungsrichtungen Technik; Wirtschaft und Verwaltung; Sozialwesen; Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie; Gesundheit (Schulversuch) bzw. Internationale Wirtschaft (Schulversuch) zur fachgebundenen Hochschulreife (nur Englisch als Fremdsprache) oder auch zur allgemeinen Hochschulreife (mit einer zweiten Fremdsprache) zu führen. Die Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule können nach der 12. Jahrgangsstufe an der Fachabiturprüfung zum Erwerb der Fachhochschulreife teilnehmen und mit diesem Abschluss die Schule verlassen. Dies wurde durch eine Abstimmung der Lehrpläne und Stundentafeln für die Fachoberschule (11. und 12. Jahrgangsstufe) und die Berufsoberschule ermöglicht.

Ziel der Fachoberschule (FOS) ist es, Schülerinnen und Schüler mit einem mittleren Schulabschluss innerhalb von zwei Schuljahren (Jahrgangsstufen 11 und 12) in den Ausbildungsrichtungen Technik; Agrarwirtschaft, Bio- und Umwelttechnologie; Wirtschaft und Verwaltung; Sozialwesen; Gestaltung; Gesundheit (Schulversuch) bzw. Internationale Wirtschaft (Schulversuch) zur Fachhochschulreife zu führen. Im Anschluss daran können Schülerinnen und Schüler, die im Zeugnis der Fachhochschulreife einen bestimmten Notendurchschnitt erreicht haben, die 13. Jahrgangsstufe der Fachoberschule besuchen. Stundentafeln, Lehrpläne, Abiturprüfungen und die möglichen Abschlüsse (fachgebundene bzw. allgemeine Hochschulreife) stimmen mit denen der Berufsoberschule überein.

2.1 Aufbau und Auswahl der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben werden einheitlich vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus gestellt. Die Prüfungsstruktur ist identisch mit der der Fachabiturprüfung am Ende der 12. Jahrgangsstufe. Die Prüfung ist in zwei Teile gegliedert:

- Teil 1: Die Bearbeitung erfolgt ohne Verwendung von Hilfsmitteln.
  Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Teil 2: Die Bearbeitung erfolgt unter Verwendung von Hilfsmitteln (siehe Abschnitt 2.3). Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Zwischen den beiden Prüfungsteilen ist eine Pause von 30 Minuten.

Jeder Teil setzt sich aus den beiden Aufgabengruppen A (Analysis) und S (Stochastik) zusammen.

In Teil 2 gibt es für jede Aufgabengruppe zwei Varianten (AI und AII bzw. SI und SII). Die Auswahl jeweils einer Variante trifft die Schule; die Schülerinnen und Schüler haben keine Wahlmöglichkeit.

In Teil 1 wird zentral nur eine Variante gestellt.[1]

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit mit abzugeben.

Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen dürfen nur auf Papier, das den Stempel der Schule trägt, angefertigt werden.

2.2 Bewertung der Prüfungsaufgaben

Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten (BE) angegeben.
Es sind maximal 100 BE zu erreichen. Diese werden wie folgt verteilt:

	Aufgaben-gruppe	Bewertungs-einheiten
Teil 1	A	22 BE
	S	12 BE
Teil 2	A	43 BE
	S	23 BE

1 Teil 1 des Musterprüfungssatzes zu diesem Buch besteht dennoch aus zwei Varianten pro Aufgabengruppe, um Ihnen zwei vollständige Prüfungen zum Üben zur Verfügung zu stellen.

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungs-einheiten	100 ⋮ 96	95 ⋮ 91	90 ⋮ 86	85 ⋮ 81	80 ⋮ 76	75 ⋮ 71	70 ⋮ 66	65 ⋮ 61	60 ⋮ 56	55 ⋮ 51	50 ⋮ 46	45 ⋮ 41	40 ⋮ 34	33 ⋮ 27	26 ⋮ 20	19 ⋮ 0

2.3 Zugelassene Hilfsmittel

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Technik für Berufliche Oberschulen und eines der beiden Tabellenwerke zur Stochastik: „Stochastik-Tabellen“ v. Barth u. a. (München: Ehrenwirth-Verlag); „Tafelwerk zur Stochastik“ v. Wörle/Mühlbauer (München: Bayerischer Schulbuch-Verlag). Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.

Die Merkhilfe Mathematik/Technik wurde von den Fachmitarbeitern der Dienststellen der Ministerialbeauftragten für die Beruflichen Oberschulen des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus erarbeitet. Sie ist auf der Webseite des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung zu finden:
www.isb.bayern.de

Seit dem Schuljahr 2014/15 wird im Rahmen eines Schulversuchs eine Abiturprüfung angeboten, die auch Teile enthält, die mit einem Computer-Algebra-System (CAS) zu bearbeiten sind. Es besteht für alle Prüfungsteilnehmerinnen und Prüfungsteilnehmer der am Schulversuch teilnehmenden Schulen Wahlfreiheit, ob sie die Abiturprüfung im Rahmen des Schulversuchs mit CAS-Teil ablegen oder ob sie an der Prüfung ohne CAS teilnehmen möchten. Die Schülerinnen und Schüler müssen sich diesbezüglich bis zum 1. März des jeweiligen Schuljahres entscheiden.

3 Arbeit mit diesem Buch

Da sich die Form der Prüfung und die Prüfungsinhalte seit 2020 von denen in den Jahren davor wesentlich unterscheiden, sind die früheren Abiturprüfungen der Ausbildungsrichtung Technik nicht mehr vollständig relevant. Das Buch bietet Ihnen daher neben den **Original-Abiturprüfungen (Technik) von 2020 bis 2022** einen **Übungsteil** mit einer Auswahl an **relevanten Aufgaben alter Original-Prüfungen** zur Analysis. Die abgedruckten Original-Aufgaben zur **Stochastik aus dem Fachabitur 2019 (Nichttechnik)** könnten aufgrund der Lehrplananpassung genau so auch in der Abiturprüfung (Technik) seit 2020 gestellt werden. Sie bieten Ihnen daher für den Themenbereich Stochastik eine weitere Übungsmöglichkeit. Entsprechend der

Verteilung der Bewertungseinheiten (vgl. Abschnitt 2.2) empfehlen sich folgende Bearbeitungszeiten:

- Teil 1, Stochastik (ohne Hilfsmittel): ca. 20 Minuten.
- Teil 2, Stochastik I bzw. II (mit Hilfsmitteln): ca. 40 Minuten.

Zur weiteren Einübung der Prüfungsinhalte und insbesondere zur Simulation der Prüfungssituation dienen die online verfügbaren **Musterprüfungen** auf MyStark, die der Form der Abiturprüfung seit 2020 entsprechen. Der Aufgabensatz mit den Varianten AI und SI bzw. AII und SII stellt dabei jeweils eine vollständige Prüfung dar. Die Musterprüfungen decken ein möglichst breites Spektrum an unterschiedlichen Aufgabenstellungen ab, erheben jedoch nicht den Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller möglichen Aufgabentypen und -varianten.

4 Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen für die schriftliche Abiturprüfung stichpunktartig aufgeführt. Diese Auflistung soll Ihnen einen Überblick über den prüfungsrelevanten Lehrstoff vermitteln, sie ersetzt jedoch nicht den ausführlichen Lehrplan für das Fach Mathematik.

Die Zusammenstellung kann Ihnen bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als Leitfaden für die verbindlichen Inhalte und wichtigsten mathematischen Begriffe dienen.

In der Analysis werden die Lerninhalte der 12. Jahrgangsstufe (in der FOS auch die der 11. Jahrgangsstufe) als bekannt vorausgesetzt, sie sind daher im Folgenden noch einmal aufgeführt. Das Lerngebiet Lineare Algebra und Analytische Geometrie wird nicht geprüft.

Die Aufgabenstellung in der 13. Jahrgangsstufe unterscheidet sich von der der 12. Jahrgangsstufe auch darin, dass die Aufgaben nicht mehr so kleinschrittig untergliedert sind. Bei vielen Teilaufgaben müssen Sie eine komplexere Lösungsstrategie selbst entwickeln.

4.1 Analysis – 12. Jahrgangsstufe

Grundbegriffe bei reellen Funktionen

Grundlagen

- Reelle Funktionen: Abbildungsvorschrift, Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge, Funktionsgraph
- Lineare Funktionen und lineare Ungleichungen
- Quadratische Funktionen und quadratische Ungleichungen

Ganzrationale Funktionen und Funktionsscharen

- Verknüpfung von Funktionen: Summe, Differenz, Produkt
- Nullstellenbestimmung unter Verwendung von Polynomdivision und Substitution
- Faktorisierung des Funktionsterms und Vielfachheit der Nullstellen

- Schnittpunkte von Funktionsgraphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$
- Symmetrie des Funktionsgraphen (Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Exponentialfunktion und Logarithmus
- Eigenschaften der Funktion $f: x \mapsto a \cdot b^{c \cdot (x-d)} + y_0$ mit $b > 0$
- Einfluss der Parameter a, b, c, d und y_0 auf den Graphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$
- Lösen von Exponentialgleichungen unter Verwendung der Logarithmusgesetze
- Exponentielles Wachstum bzw. exponentielle Abnahme

Differenzialrechnung
- Differenzenquotient, Differenzialquotient und Ableitungsfunktion
- Lokale und mittlere Änderungsrate
- Tangente
- Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktionen und deren Ableitungsfunktionen
- Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor, Summenregel, Produktregel, Kettenregel
- Ableitung von ganzrationalen Funktionen (auch mit Parameter)
- Ableitung von einfachen Funktionen, die als Produkt, Summe oder Verkettung von Exponential- und Polynomfunktionen entstehen (ohne Parameter)

Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung
- Monotoniedefinition, Monotoniekriterium, maximale Monotonieintervalle
- Links- und Rechtskrümmung, maximale Krümmungsintervalle
- Extrempunkte, Wendepunkte, Randextrema und absolute Extrema
- Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen (auch mit Parameter) und einfachen Funktionen, die als Produkt, Summe oder Verkettung von Exponentialfunktionen und linearen bzw. quadratischen Funktionen entstehen
- Aufstellen eines Funktionsterms bei vorgegebenen Eigenschaften
- Anwendungsaufgaben, Optimierungsaufgaben

Integralrechnung
- Stammfunktion einer Funktion
- Unbestimmtes Integral
- Berechnung von Stammfunktionen für ganzrationale Funktionen sowie für einfache Funktionen, deren Term Exponentialfunktionen enthält, unter Verwendung von

  $\int e^{ax+b}\,dx$

Bayern ▪ FOS · BOS 13 ▪ Übungsaufgaben

Prüfungsrelevante Aufgaben zur Analysis*

Aufgabe 1: Kurvendiskussion

FOS / BOS 13 Technik, 2019, A II, 2

1.0 Gegeben ist die Funktion $h:\ x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ in der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$ und für $x \to 0^+$.

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von h.

[Mögliches Teilergebnis: $h'(x) = \frac{2}{x^2+1}$]

1.3.0 Gegeben ist die Funktion $H:\ x \mapsto \int\limits_1^x h(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_H = \mathbb{R}^+$.

1.3.1 Ermitteln Sie ohne Verwendung der integralfreien Darstellung von H(x) die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts des Graphen von H.

1.3.2 Bestimmen Sie für die Funktion H eine integralfreie Darstellung.

TIPP **Lösungshinweise**

Teilaufgabe 1.1

Untersuchen Sie zunächst das Grenzwertverhalten des Arguments der Arkustangensfunktion.

Teilaufgabe 1.2

Bilden Sie die erste Ableitung mit der Kettenregel.

Führen Sie eine Vorzeichenuntersuchung bei der Ableitungsfunktion h' durch.

Teilaufgabe 1.3.1

Nutzen Sie den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Teilaufgabe 1.3.2

Verwenden Sie die partielle Integration vom Typ „Faktor 1“.

1.1 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to -1}}{\underbrace{2x}_{\to 0^+}} \to -\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \arctan\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)}_{\to -\infty} = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to \infty}}{\underbrace{2x}_{\to \infty}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(x - \frac{1}{x}\right)}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{\overbrace{x}^{\to \infty} - \overbrace{\tfrac{1}{x}}^{\to 0}}^{\to \infty}}{2} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \arctan\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)}_{\to \infty} = \frac{\pi}{2}$$

Alternative:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to \infty}}{\underbrace{2x}_{\to \infty}} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{2x} - \frac{1}{2x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\underbrace{\frac{x}{2}}_{\to \infty} - \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0}\right) = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \arctan\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)}_{\to \infty} = \frac{\pi}{2}$$

1.2 Für $h(x) = \arctan(f(x))$ gilt mit der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)$

Mit $f(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ folgt:

$$h'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2} \cdot \frac{2x \cdot 2x - (x^2-1) \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 + 2}{\left(1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2\right) \cdot (2x)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2}{(2x)^2 + (x^2-1)^2} = \frac{2 \cdot (x^2+1)}{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{2 \cdot (x^2+1)}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

$$= \frac{2 \cdot (x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{\underbrace{x^2+1}_{>0}} > 0$$

G_h ist streng monoton steigend in $]-\infty; 0[$ und in $]0; \infty[$.

TIPP Für diese Teilaufgabe müsste man den Funktionsterm von h' nicht vollständig vereinfachen. Dass h'(x) > 0 ist, kann man schon vorher erkennen:

$$\frac{\overbrace{2x^2}^{>0}+2}{\underbrace{(2x)^2}_{>0}+\underbrace{(x^2-1)^2}_{>0}}>0$$

In den nachfolgenden Teilaufgaben ist der vereinfachte Funktionsterm von h' jedoch hilfreich.

1.3.1 Nach dem HDI gilt: $H'(x)=h(x)$

$$H'(x)=0$$
$$\arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=0$$
$$\frac{x^2-1}{2x}=0$$
$$x^2-1=0$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1;\quad \underbrace{x_2=-1}_{\notin D_H}$$

$H''(1)=h'(1)=\dfrac{2}{1^2+1}=1>0$ (h' aus Teilaufgabe 1.2)

$H(1)=0$ („obere Grenze“ = „untere Grenze“)

$\Rightarrow$ Relativer Tiefpunkt $TP(1\,|\,0)$

1.3.2 $$H(x)=\int_1^x h(t)\,dt=\int_1^x 1\cdot\arctan\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)dt\overset{(1)}{=}\left[t\cdot\arctan\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)\right]_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt$$

$$=\left[t\cdot\arctan\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)\right]_1^x-\int_1^x\frac{2t}{t^2+1}\,dt\overset{(2)}{=}\left[t\cdot\arctan\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)\right]_1^x-\left[\ln(t^2+1)\right]_1^x$$

$$=x\cdot\arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)-1\cdot\underbrace{\arctan\left(\frac{1^2-1}{2\cdot 1}\right)}_{=0}-(\ln(x^2+1)-\ln(1^2+1))$$

$$=x\cdot\arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)-\ln(x^2+1)+\ln(2)$$

Aufgabenstellung

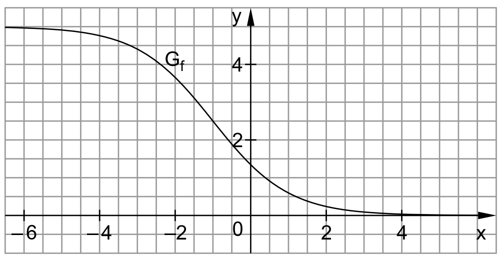
BE

1.0 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.1 Der Graph von g schneidet die x-Achse im Punkt X_0 und besitzt die Asymptote a. Geben Sie die Koordinaten von X_0 und die Gleichung von a an. 4

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion g.
[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$] 4

2.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \dfrac{5}{4e^x+1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ein Ausschnitt des Graphen von f ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Der Term der Ableitung von f lautet $f'(x) = \dfrac{-20e^x}{(4e^x+1)^2}$.



2.1 Begründen Sie, warum f eine Umkehrfunktion besitzt, und geben Sie die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von f an. 2

2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt $Q(2{,}5 \mid -\ln(4))$ auf dem Graphen der Umkehrfunktion von f liegt, und ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion von f im Punkt Q. 4

2.3 Untersuchen Sie, ob f eine Lösung der Differenzialgleichung $y \cdot (1-y) = y' \cdot (e^{-x} - 1)$ ist. 3

3 Zeigen Sie, dass gilt: $\displaystyle\int_1^4 (\ln(x) \cdot \sqrt{x})\,dx = \frac{32}{3}\ln(2) - \frac{28}{9}$. 5

22

TIPP **Lösungshinweise – Teil 1, Analysis**

Teilaufgabe 1.1

Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion g.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$.

Teilaufgabe 1.2

Bilden Sie die 1. Ableitung der Funktion g unter Verwendung der Ketten- und Quotientenregel.

Untersuchen Sie das Vorzeichen der Funktion g' und schließen Sie daraus auf das Monotonieverhalten der Funktion g.

Teilaufgabe 2.1

Untersuchen Sie das Vorzeichen der Funktion f'.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte der Funktion f an den Rändern ihrer Definitionsmenge und schließen Sie daraus auf die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1}.

Teilaufgabe 2.2

Führen Sie eine Punktprobe durch.

Verwenden Sie die Umkehrregel $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, wobei $Q(y_0 \mid x_0) \in G_{f^{-1}}$.

Teilaufgabe 2.3

Setzen Sie die Funktionsgleichungen von f und f' in die Differenzialgleichung ein.

Teilaufgabe 3

Ermitteln Sie mithilfe partieller Integration eine Stammfunktion des Integranden.

Benutzen Sie bei der weiteren Umformung die Logarithmenregeln.

1.1 Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$g(x) = 0$$

$$\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $X_0(-1\,|\,0)$.

TIPP Der arctan wird null, wenn sein Argument $\frac{x+1}{x-1}$ null wird. Dieser Bruch ist null, wenn sein Zähler null ist.

Asymptotengleichung:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \arctan\underbrace{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{\to 1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan\underbrace{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}_{\to 1} = \frac{\pi}{4}$$

Die Gleichung der Asymptote lautet a: $y = \frac{\pi}{4}$.

TIPP Der Grenzwert des Arguments $\frac{x+1}{x-1}$ kann wie folgt ermittelt werden:

1. Möglichkeit:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1+2}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{2}{\underbrace{x-1}_{\to\pm\infty}}}_{\to 0}\right)$$

2. Möglichkeit: Da Zählergrad gleich Nennergrad ist, ergibt sich der Grenzwert aus dem Quotienten der Formfaktoren von Zählerpolynom und Nennerpolynom.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{1} = 1$$

1.2 $g(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Berechnung der 1. Ableitung mit der Ketten- und Quotientenregel:

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\right) \cdot (x-1)^2} \cdot \frac{x-1-x-1}{1}$$

$$g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2 + (x+1)^2} \qquad (*)$$

$$g'(x) = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1}$$

$$g'(x) = \frac{-2}{2x^2 + 2} = \frac{-2}{2 \cdot (x^2+1)}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{x^2+1}$$

Vorzeichenuntersuchung:

$$g'(x) = \frac{\overbrace{-1}^{<0}}{\underbrace{x^2+1}_{>0}} < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Somit ist G_g streng monoton fallend in $]-\infty; 1[$ und in $]1; \infty[$.

Alternative: Mithilfe einer Vorzeichentabelle

VZT		1	x
-1	$-$		$-$
x^2+1	$+$		$+$
$g'(x)$	$-$		$-$
G_g	$\searrow$	n. d.	$\searrow$

> **TIPP** Bei der Bestimmung der 1. Ableitung von g hätte man auch bereits bei (*) aufhören und die Vorzeichenuntersuchung durchführen können:
>
> $$g'(x) = \frac{\overbrace{-2}^{<0}}{\underbrace{(x-1)^2}_{>0} + \underbrace{(x+1)^2}_{>0}} < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

2.1 Begründung der Umkehrbarkeit:

Da $f'(x) = \dfrac{\overbrace{-20e^x}^{<0}}{\underbrace{(4e^x+1)^2}_{>0}} < 0$ gilt, ist G_f streng monoton fallend in $D_f = \mathbb{R}$.

Somit ist f umkehrbar.

Alternative: Mithilfe einer Vorzeichentabelle

VZT	x
$-20e^x$	−
$(4e^x+1)^2$	+
$f'(x)$	−
G_f	↘

Definitionsmenge der Umkehrfunktion:

TIPP Da $D_{f^{-1}} = W_f$ gilt, muss man das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to \pm\infty$ bestimmen.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{\underbrace{\underbrace{4e^x}_{\to 0}+1}_{\to 1}} = 5 \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\underbrace{\underbrace{4e^x}_{\to\infty}+1}_{\to\infty}} = 0$$

Da G_f in $D_f = \mathbb{R}$ streng monoton fällt, folgt für die Wertemenge von f:
$W_f =]0;5[$

Dann gilt für die Definitionsmenge der Umkehrfunktion f^{-1} von f:
$D_{f^{-1}} =]0;5[$

2.2 Der Punkt $Q(2{,}5\,|\,-\ln(4))$ liegt genau dann auf dem Graphen der Umkehrfunktion f^{-1}, wenn der Punkt $Q^*(-\ln(4)\,|\,2{,}5)$ auf dem Graphen der Funktion f liegt.

Punktprobe:

$$f(-\ln(4)) = \frac{5}{4e^{-\ln(4)}+1} = \frac{5}{4e^{\ln(4^{-1})}+1} = \frac{5}{4\cdot 4^{-1}+1} = 2{,}5$$

$\Rightarrow \quad Q^* \in G_f \quad \Rightarrow \quad Q \in G_{f^{-1}}$