

2024

Abitur

Original-Prüfung
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Gymnasium Bayern

Mathematik

- + CAS-Abituraufgaben als PDF
- + Übungsaufgaben
- + Online-Glossar



STARK

Inhalt

Vorwort
Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zum Abitur

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Ablauf der Prüfung | I |
| 2 | Leistungsanforderungen und Bewertung | IV |
| 3 | Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung | V |
| 4 | Hinweise zum CAS | VI |

Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel

| | |
|---|----|
| Übungsaufgabe 1 (Analysis, Stochastik, Geometrie) | 1 |
| Übungsaufgabe 2 (Analysis, Stochastik, Geometrie) | 12 |
| Übungsaufgabe 3 (Analysis, Stochastik, Geometrie) | 21 |
| Übungsaufgabe 4 (Analysis, Stochastik, Geometrie) | 31 |

Abiturprüfung 2020

| | |
|--|---------|
| Prüfungsteil A Analysis – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2020-1 |
| Prüfungsteil A Stochastik – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2020-19 |
| Prüfungsteil A Geometrie – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2020-23 |
| Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 1 | 2020-28 |
| Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 2 | 2020-38 |
| Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 1 | 2020-49 |
| Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 2 | 2020-58 |
| Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 1 | 2020-65 |
| Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 2 | 2020-75 |

Abiturprüfung 2021

| | |
|--|---------|
| Prüfungsteil A Analysis – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2021-1 |
| Prüfungsteil A Stochastik – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2021-11 |
| Prüfungsteil A Geometrie – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2021-14 |
| Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 1 | 2021-19 |
| Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 2 | 2021-31 |
| Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 1 | 2021-41 |
| Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 2 | 2021-49 |
| Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 1 | 2021-55 |
| Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 2 | 2021-63 |

Abiturprüfung 2022

| | |
|--|---------|
| Prüfungsteil A Analysis – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2022-1 |
| Prüfungsteil A Stochastik – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2022-14 |
| Prüfungsteil A Geometrie – Aufgabengruppe 1 und 2 | 2022-19 |
| Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 1 | 2022-24 |
| Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 2 | 2022-35 |
| Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 1 | 2022-44 |
| Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 2 | 2022-52 |
| Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 1 | 2022-61 |
| Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 2 | 2022-70 |

Abiturprüfung 2023

Aufgaben www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).



Bei **MyStark** finden Sie:

- ein **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
- den **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
- den **Jahrgang 2019 ohne CAS**
- die **Jahrgänge 2019 bis 2022 mit CAS**
- **Lernvideos** zu Aufgaben aus beiden Prüfungsteilen

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses **Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.



Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Autoren:

Sybille Reimann (Lösungen zu Abituraufgaben ohne CAS, Übungsaufgaben)
Dr. Ewald Bichler (Lösungen zu Abituraufgaben mit CAS)

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

für Sie ist Mathematik verbindlich als schriftliches Abiturfach vorgegeben. Ein Fach, auf das man sich durch konsequentes Üben optimal vorbereiten kann, wobei Sie dieser Band hervorragend unterstützt.

Seit dem **Schuljahr 2013/2014** gliedert sich die Abiturprüfung Mathematik in die beiden **Prüfungsteile A und B** (siehe Hinweise auf Seite I).

Das vorliegende Buch enthält:


- 4 Aufgaben im Stil der **Abiturprüfung ohne Hilfsmittel (Prüfungsteil A)**
- alle Aufgaben der **Abiturjahrgänge 2020 bis 2022 ohne CAS**

Auf MyStark stehen zur Verfügung:

- alle Aufgaben des **Abiturjahrgangs 2023**, sobald diese zur Veröffentlichung freigegeben sind
- alle Aufgaben des **Abiturjahrgangs 2019 ohne CAS**
- die kompletten **CAS-Abiturjahrgänge 2019 bis 2022**
- **Lernvideos** zu Aufgaben aus beiden Prüfungsteilen der Jahrgänge 2021 und 2022

Anhand dieser Fülle von Aufgaben können Sie mit eigenverantwortlichem Üben die nötige Sicherheit erlangen und somit die „Schrecksekunden“ am Prüfungstag minimieren.

Zu allen Aufgaben gibt es umfassende und **ausführliche Lösungen**.

Sie finden bei allen Aufgaben zunächst die Aufgabenstellung, die Sie versuchen sollten, allein und in der vorgegebenen Zeit zu lösen (siehe hierzu auch den Abschnitt „Hinweise und Tipps zum Zentralabitur“). Sollten Sie sich bei einer Teilaufgabe nicht sicher sein, was sich hinter der Aufgabenstellung verbirgt, oder aber den Einstieg in die Bearbeitung nicht finden, so können Sie die  **Tipps und Hinweise** unmittelbar hinter der Angabe im Buch aufschlagen. Hier werden Sie an Dinge erinnert, die in dieser Teilaufgabe wichtig sind, und Sie werden auf rechnerische Schritte aufmerksam gemacht, die Sie zur Lösung benötigen. Sie sollten immer nur den obersten Tipp lesen, es dann wieder allein versuchen und nur im Bedarfsfall auf die weiteren Tipps – möglichst immer nur einen als Anregung zum Weiterdenken – zurückgreifen. Auf diese Weise gelingt es Ihnen, die Aufgabe weitgehend selbstständig zu bearbeiten und erst anschließend Ihre Lösung mit der vorgegebenen Lösung zu vergleichen.

In den Lösungstipps und in den Lösungen selbst finden Sie oft einen Hinweis auf die Merkhilfe, wenn sich auf dieser eine passende Formel befindet. Die Merkhilfe ist ein wesentlicher Bestandteil der zugelassenen Hilfsmittel und unterstützt Sie bei der Abiturvorbereitung. Sie sollten frühzeitig den Umgang mit ihr lernen.

Aufgrund der Covid-19-Pandemie waren in den Abiturprüfungen der Jahre 2021 bis 2023 einige Fachinhalte nicht prüfungsrelevant (siehe Seite III). Aufgaben mit diesen Fachinhalten stehen daher nur in geringem Umfang und nur in den Abiturjahrgängen 2019 und 2020 zur Verfügung.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2024 vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:

www.stark-verlag.de/mystark

So vorbereitet kann Ihr Abitur in Mathematik nur ein Erfolg werden!

A handwritten signature in black ink, reading "Sybille Reimann". The signature is written in a cursive style with a long, sweeping underline.

Sybille Reimann

Dr. Ewald Bichler

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

Die Aufgaben werden im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus von einer Fachkommission zusammengestellt, die dabei Aufgaben verwendet, die von Fachlehrkräften erstellt wurden. Die verbindlichen curricularen Vorgaben (siehe auch www.isb.bayern.de), nach denen in den Jahrgangsstufen 11 und 12 der Qualifikationsphase unterrichtet wird, bestimmen Inhalte und Anforderungen der Abituraufgaben.

Prüfungsvarianten

Seit dem Schuljahr 2011/2012 wird in Bayern neben der „normalen“ Abiturprüfung für alle Schulen auch eine CAS-Abiturprüfung angeboten. Jedes Gymnasium kann entscheiden, ob es ab der Jahrgangsstufe 10 Klassen oder Kurse einrichtet, die mit CAS arbeiten. Selbst wenn Sie in einer CAS-Klasse sind, können Sie ein paar Monate vor der Abiturprüfung selbst entscheiden, ob Sie die „normale“ Abiturprüfung oder die CAS-Abiturprüfung schreiben möchten.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die Abiturprüfung Mathematik gliedert sich in die beiden Prüfungsteile A und B, die ihrerseits wieder in die Fachgebiete **Analysis, Stochastik und Geometrie** unterteilt sind.

Bis einschließlich der Abiturprüfung 2019 verteilten sich die Bewertungseinheiten wie folgt:

| Prüfungsteil A | | Prüfungsteil B | |
|----------------|-------|----------------|-------|
| Analysis | 20 BE | Analysis | 40 BE |
| Stochastik | 10 BE | Stochastik | 20 BE |
| Geometrie | 10 BE | Geometrie | 20 BE |

Seit dem Abitur 2020 bleibt die Summe je Fachgebiet zwar gleich, die Verteilung der Bewertungseinheiten verschiebt sich jedoch in Stochastik und Geometrie nach Prüfungsteil B:

| Prüfungsteil A | | Prüfungsteil B | |
|----------------|-------|----------------|-------|
| Analysis | 20 BE | Analysis | 40 BE |
| Stochastik | 5 BE | Stochastik | 25 BE |
| Geometrie | 5 BE | Geometrie | 25 BE |

Bis einschließlich der Prüfung im Jahr 2019 hatte jede Schülerin und jeder Schüler für die „normale“ Abiturprüfung (also ohne CAS) die individuelle Wahlmöglichkeit, den Prüfungsteil A mit oder ohne Hilfsmittel zu bearbeiten und sich somit vorab für eine der beiden folgenden Varianten zu entscheiden:

Variante 1: Schülerinnen und Schüler, die den Prüfungsteil A **ohne Hilfsmittel** bearbeiten wollten, erhielten als Prüfungszeit – wie länderübergreifend vorgesehen – **270 Minuten** (davon 90 Minuten für den Prüfungsteil A) und damit 30 Minuten mehr Zeit. Nach den ersten 90 Minuten wurde eine **Pause** von zusätzlichen **15 Minuten** eingelegt, in der der Prüfungsteil A eingesammelt und der Prüfungsteil B sowie die im Prüfungsteil B zugelassenen Hilfsmittel ausgeteilt wurden.

Variante 2: Schülerinnen und Schüler, die im Prüfungsteil A **nicht auf die zugelassenen Hilfsmittel verzichten wollten**, erhielten zu Beginn der Prüfungszeit sowohl Prüfungsteil A als auch Prüfungsteil B zusammen mit allen zugelassenen Hilfsmitteln. In der auch bislang üblichen Arbeitszeit von **240 Minuten** waren dann alle vorgelegten Aufgaben in frei gewählter Reihenfolge zu bearbeiten. Beide Prüfungsteile mussten erst am Ende der Prüfungszeit abgegeben werden.

Prüfung mit CAS: Schülerinnen und Schüler hatten statt der beiden oben beschriebenen Varianten auch die Möglichkeit, **freiwillig** an der Prüfung Mathematik mit **CAS** teilzunehmen. Da bei der Verwendung von CAS in besonderer Weise darauf zu achten ist, dass grundlegende mathematische Fertigkeiten beherrscht werden, war in diesem Fall der **Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel** zu bearbeiten. Die Gesamtarbeitszeit betrug **270 Minuten**, davon 90 Minuten für den Prüfungsteil A. Wie in Variante 1 wurde nach den ersten 90 Minuten eine **Pause** von zusätzlichen **15 Minuten** eingelegt, in der der Prüfungsteil A eingesammelt und der Prüfungsteil B sowie die im Prüfungsteil B zugelassenen Hilfsmittel ausgeteilt wurden.

Seit dem Abitur 2020 besteht **keine Wahlfreiheit** zwischen den Varianten 1 und 2 mehr. **Alle Schülerinnen und Schüler** (auch die mit CAS) legen Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel ab und dürfen die zugelassenen Hilfsmittel **nur** für die Bearbeitung von Prüfungsteil B benutzen. Zu Beginn der **Prüfungszeit von insgesamt 270 Minuten** werden allen Schülerinnen und Schülern die Angaben beider Prüfungsteile vorgelegt. Für die Bearbeitung von **Prüfungsteil A** sind **70 Minuten** vorgegeben, d. h., nach 70 Minuten wird der (hoffentlich vollständig) gelöste Prüfungsteil A eingesammelt. Die restlichen **200 Minuten** stehen für **Prüfungsteil B** zur Verfügung. Wer allerdings mit der Bearbeitung von Teil A schon vor Ablauf der 70 Minuten fertig ist, darf bereits mit der Lösung der Aufgaben aus Teil B beginnen, jedoch noch keine Hilfsmittel verwenden. Diese sind erst nach Ablauf der ersten 70 Minuten gestattet.

Die Angaben, die Sie vorgelegt bekommen, beinhalten für jeden der drei Bereiche **Analysis, Stochastik** und **Geometrie** (gilt in gleicher Weise für die CAS-Abiturprüfung) jeweils zwei Aufgabengruppen. Aus diesen wählt vor Beginn Ihrer Prüfungszeit jede Lehrkraft für ihre Klasse einheitlich jeweils eine aus. Dabei beachtet Ihre Lehrkraft, dass innerhalb eines Bereichs für beide Prüfungsteile dieselbe Aufgabengruppe gewählt werden muss. Sie haben also **aus jedem der drei Bereiche jeweils genau eine Aufgabengruppe** zu bearbeiten (z. B. in beiden Prüfungsteilen in Analysis Aufgabengruppe 1, in Stochastik Aufgabengruppe 2 und in Geometrie Aufgabengruppe 1).

Beachten Sie bereits bei der Vorbereitung auf Ihre Prüfung, dass für das Lösen der Aufgaben im **Prüfungsteil A** weder ein Taschenrechner noch die Merkhilfe noch das Stochastische Tafelwerk zugelassen sind. Das bedeutet jedoch nicht, dass Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgaben weder rechnen müssen noch ohne jede Formel auskommen können! Um Ihnen für diesen Prüfungsteil A zusätzliche Übungsmöglichkeiten zu bieten, finden Sie hierzu in diesem Buch vier Übungsaufgaben mit der seit dem Abitur 2020 gültigen Verteilung der Bewertungseinheiten. In den Lösungen sind bei den Rechnungen Zwischenschritte angegeben, die Sie beim „Kopfrechnen“ eventuell benötigen. In den Tipps und Hinweisen finden Sie benötigte Formeln eigens ausgewiesen.

Es wird vom Kultusministerium ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich der Prüfungsteil A der CAS-Abiturprüfung vom Prüfungsteil A der „normalen“ Abiturprüfung unterscheiden kann, wenn dies Prüfungsteil B erforderlich macht. Dies wird beispielsweise im Abitur 2019 kenntlich, wo einige Analysisaufgaben von der „normalen“ Prüfung abweichen.

Um der aufgrund der Covid-19-Pandemie besonderen Lernsituation in den Schuljahren 2019/20, 2020/21 und 2021/22 Rechnung zu tragen, waren in den schriftlichen Abiturprüfungen der Jahre 2021 bis 2023 die folgenden Fachinhalte nicht prüfungsrelevant:

- Integralfunktion
- Sinus- und Kosinusfunktion
(Zur Berechnung von Winkeln waren \sin und \cos aber prüfungsrelevant.)
- Newton-Verfahren
- Signifikanztest
- Bestimmung einer Gleichung der Schnittgerade von Ebenen
- Bestimmung des Abstands windschiefer Geraden

Zugelassene Hilfsmittel

Für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik sind zugelassen

im **Prüfungsteil A:**

- für Mathematik übliche Schreib- und Zeichengeräte

im **Prüfungsteil B:**

- für Mathematik übliche Schreib- und Zeichengeräte
- Merkhilfe
- ein zugelassenes Stochastisches Tafelwerk

Abitur Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 2020
Prüfungsteil A – Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1. Gegeben ist die Funktion $h: x \mapsto x \cdot \ln(x^2)$ mit maximalem Definitionsbereich D_h .
 - a) Geben Sie D_h an und zeigen Sie, dass für den Term der Ableitungsfunktion h' von h gilt: $h'(x) = \ln(x^2) + 2$. 2
 - b) Bestimmen Sie die Koordinaten des im II. Quadranten liegenden Hochpunkts des Graphen von h . 3
2. Die Abbildung 1 zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer in \mathbb{R} definierten ganzrationalen Funktion f . Nur in den Punkten $(-4 | f'(-4))$ und $(5 | f'(5))$ hat der Graph $G_{f'}$ waagrechte Tangenten.

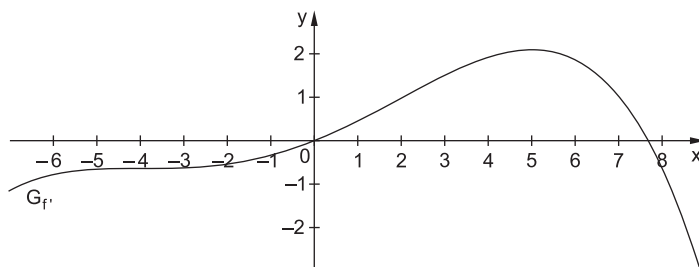


Abb. 1

- a) Begründen Sie, dass f genau eine Wendestelle besitzt. 2
 - b) Es gibt Tangenten an den Graphen von f , die parallel zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten sind. Ermitteln Sie anhand des Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' in der Abbildung 1 Näherungswerte für die x -Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von f jeweils eine solche Tangente hat. 2
3. Gegeben sind die in \mathbb{R} definierten Funktionen $f: x \mapsto x^2 + 4$ und $g_m: x \mapsto m \cdot x$ mit $m \in \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f und der Graph von g_m mit G_m bezeichnet.
 - a) Skizzieren Sie G_f in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punkts der Graphen G_f und G_4 . 3
 - b) Es gibt Werte von m , für die die Graphen G_f und G_m jeweils keinen gemeinsamen Punkt haben. Geben Sie diese Werte von m an. 2

4. Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 0,7 \cdot e^{0,5x} - 0,7$ und $x \in \mathbb{R}$.
 Die Funktion g ist umkehrbar. Die Abbildung 2 zeigt den Graphen G_g von g sowie einen Teil des Graphen G_h der Umkehrfunktion h von g .

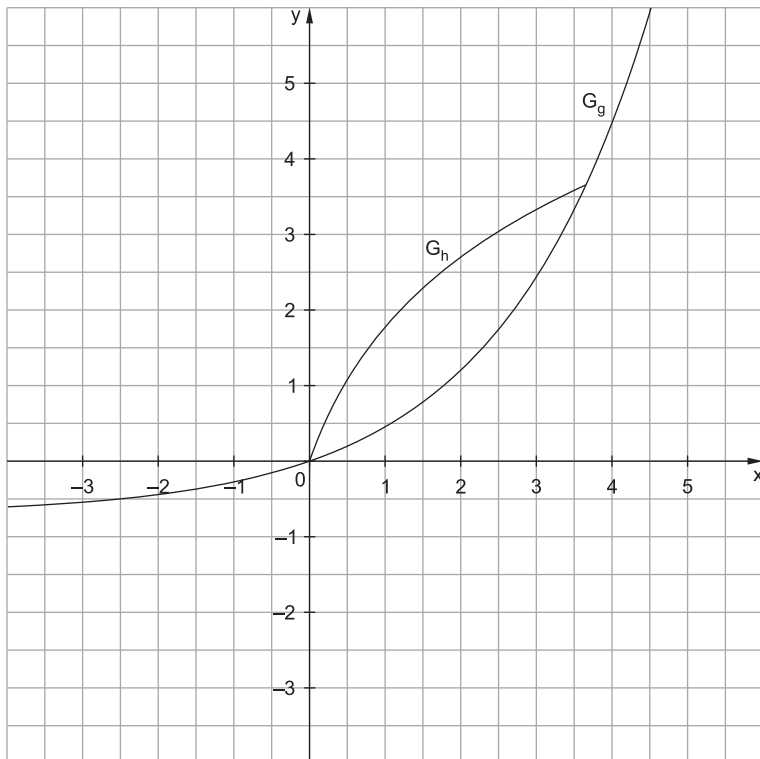


Abb. 2

- a) Zeichnen Sie in die Abbildung 2 den darin fehlenden Teil von G_h ein. 2
- b) Betrachtet wird das von den Graphen G_g und G_h eingeschlossene Flächenstück. Schraffieren Sie den Teil dieses Flächenstücks, dessen Inhalt mit dem Term $2 \cdot \int_0^{2,5} (x - g(x)) dx$ berechnet werden kann. 2
- c) Geben Sie den Term einer Stammfunktion der in \mathbb{R} definierten Funktion $k: x \mapsto x - g(x)$ an. $\frac{2}{20}$

Tipps und Hinweise

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 1 a

- *Definitionsbereich*

♣ Die ln-Funktion ist nur für positive Argumente definiert.

♣ Es muss gelten: $x^2 > 0$

- *Ableitung*

♣ Der Funktionsterm von h ist ein Produkt.

♣ Beachten Sie außer der Produkt- auch die Kettenregel (nachdifferenzieren).

Aufgabe 1 b

♣ Die Funktion h hat einen Hochpunkt, wenn $h'(x)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von plus nach minus hat.

♣ Setzen Sie die 1. Ableitung gleich null.

♣ Beim Lösen der Gleichung hilft die Umkehrfunktion e^x .

♣ Es gilt: $\ln x = a \Rightarrow x = e^a$

♣ Beachten Sie, dass der Hochpunkt im II. Quadranten liegen soll. Es muss also $x < 0$ gelten.

♣ Es gibt nur ein $x < 0$, an dem die Funktion h eine waagrechte Tangente besitzt.

♣ Die Koordinate $x = -\frac{1}{e}$ muss zum Hochpunkt gehören. (Der Vorzeichenwechsel von $h'(x)$ muss aufgrund der Angabe nicht nachgewiesen werden.)

♣ Berechnen Sie auch die y-Koordinate des Hochpunkts.

Aufgabe 2 a

♣ An einer Wendestelle hat $f''(x)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.

♣ Da $f'(x)$ für $x = -4$ und $x = 5$ waagrechte Tangenten hat, besitzt die Ableitung von $f'(x)$, also $f''(x)$, dort Nullstellen. Es gilt also: $f''(-4) = 0$ und $f''(5) = 0$

♣ Für $x = 5$ hat $f'(x)$ einen Hochpunkt. Somit steigt $f'(x)$ links von $x = 5$ und fällt rechts von $x = 5$.

♣ Was bedeutet das Monotonieverhalten von $f'(x)$ in der Umgebung von $x = 5$ für $f''(x)$?

♣ $f''(x)$ ist links von $x = 5$ positiv und rechts von $x = 5$ negativ.

♣ Somit besitzt $f''(x)$ für $x = 5$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.

- ✦ Für $x = -4$ hat $f'(x)$ einen Terrassenpunkt. $f'(x)$ steigt sowohl links als auch rechts von $x = -4$.
- ✦ Was bedeutet das Monotonieverhalten von $f'(x)$ in der Umgebung von $x = -4$ für $f''(x)$?
- ✦ $f''(x)$ ist sowohl links als auch rechts von $x = -4$ positiv.
- ✦ Somit besitzt $f''(x)$ für $x = -4$ eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel.
- ✦ $f''(x)$ besitzt also nur für $x = 5$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel.

Aufgabe 2 b

- ✦ Geben Sie eine Gleichung der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten an.
- ✦ Die Gleichung lautet $y = x$.
- ✦ Tangenten an den Graphen sind dann parallel zu dieser Winkelhalbierenden, wenn sie dieselbe Steigung wie die Winkelhalbierende besitzen.
- ✦ Wie groß ist die Steigung der Winkelhalbierenden?
- ✦ Abbildung 1 zeigt die Ableitung f' .
- ✦ $f'(x)$ zeigt die Steigung der Tangenten an den Graphen von $f(x)$.
- ✦ Wo hat $f'(x)$ den Wert 1?
- ✦ Zeichnen Sie die Parallele zur x -Achse mit der Gleichung $y = 1$ ein.
- ✦ Bestimmen Sie die Schnittstellen von $y = 1$ mit dem Graphen von f' .

Aufgabe 3 a

- *graphische Darstellung*
- ✦ f ist eine quadratische Funktion, der Graph also eine Parabel.
- ✦ Der Graph von f ist die um 4 in positive y -Richtung (nach oben) verschobene Normalparabel.
- ✦ G_4 ist der Graph der Geraden $y = 4x$. Zeichnen Sie die Gerade ein.
 - *Schnittpunkt zweier Graphen*
- ✦ Das Gleichsetzen von $x^2 + 4$ mit $4x$ liefert eine quadratische Gleichung.
- ✦ Lösen Sie diese Gleichung mithilfe binomischer Formeln oder mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.
- ✦ Die Gleichung hat nur eine Lösung.
- ✦ Gerade und Parabel haben also nur eine gemeinsame Stelle. Sie berühren sich.
- ✦ Bestimmen Sie auch die y -Koordinate des Berührungspunkts.

Lösungen

Aufgabengruppe 1

1. a) Es muss $x^2 > 0$ gelten und somit: $x \neq 0$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h'(x) = 1 \cdot \ln(x^2) + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \ln(x^2) + 2$$

b) $h'(x) = 0$

$$\ln(x^2) + 2 = 0$$

$$\ln(x^2) = -2$$

$$x^2 = e^{-2}$$

$$x = \pm e^{-1} = \pm \frac{1}{e}$$

Da es im II. Quadranten nur die Stelle $x = -\frac{1}{e}$ gibt, bei der der Graph von h eine waagrechte Tangente besitzt, muss dies die x -Koordinate des Hochpunkts sein.

$$\begin{aligned} h\left(-\frac{1}{e}\right) &= -\frac{1}{e} \cdot \ln\left(\left(-\frac{1}{e}\right)^2\right) = -\frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{1}{e} \cdot [\ln(1) - \ln(e^2)] = -\frac{1}{e} \cdot [0 - 2] \\ &= \frac{2}{e} \end{aligned}$$

$$\text{Hochpunkt} \left(-\frac{1}{e} \mid \frac{2}{e} \right)$$

2. a) Die Wendestellen von $f(x)$ befinden sich dort, wo $f''(x) = 0$ gilt und $f''(x)$ das Vorzeichen wechselt.

Wegen $f''(x) = [f'(x)]'$ hat $f''(x)$ dort Nullstellen, wo $f'(x)$ waagrechte Tangenten hat. Das ist laut Angabe für $x = -4$ und für $x = 5$ erfüllt. Der Graph zeigt, dass nur für $x = 5$ ein Wechsel des Vorzeichens von $f''(x)$ erfolgt, da $f'(x)$ für $x = 5$ seine Monotonie von steigend ($f''(x) > 0$) auf fallend ($f''(x) < 0$) wechselt. In $x = -4$ besitzt $f'(x)$ zwar eine waagrechte Tangente, aber das Monotonieverhalten bleibt gleich (steigend).

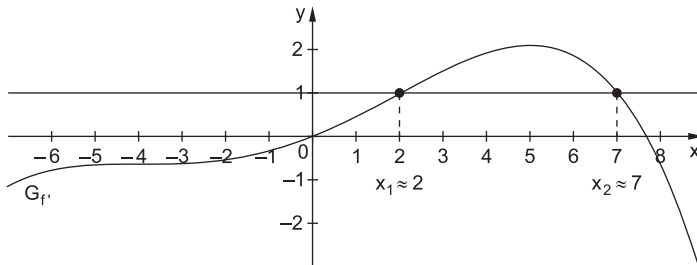
Somit besitzt $f(x)$ genau eine Wendestelle, nämlich für $x = 5$.

- b) Die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten hat die Gleichung $y = x$, besitzt also die Steigung 1.

Tangenten an den Graphen von f , die parallel zu dieser Winkelhalbierenden sein sollen, müssen also ebenfalls die Steigung 1 haben:

$$f'(x) = 1$$

Die Schnittpunkte des Graphen von $f'(x)$ mit der Geraden $y=1$ geben die x -Koordinaten der Punkte an, in denen die Tangente an f die Steigung 1 hat.

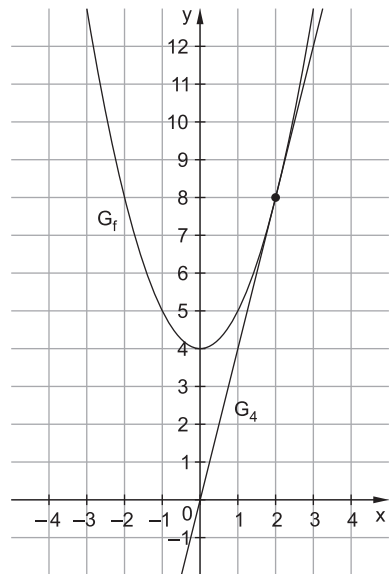


3. a) G_f ist die um 4 in positive y -Richtung verschobene Normalparabel.

$$\begin{aligned}x^2 + 4 &= 4x \\x^2 - 4x + 4 &= 0 \\(x - 2)^2 &= 0\end{aligned}$$

Da $x=2$ doppelte Lösung der Gleichung ist, berühren sich G_f und G_4 für $x=2$.

Der Berührungspunkt hat die Koordinaten $(2|8)$.



- b) **Rechnerisch**

$$\begin{aligned}x^2 + 4 &= mx \\x^2 - mx + 4 &= 0 \\x_{1/2} &= \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 16}}{2}\end{aligned}$$

Die Gleichung hat keine Lösung, wenn unter der Wurzel ein negativer Wert steht:

$$m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow m^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < m < 4$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK