2024 Mittelschule M10

Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Bayern

Mathematik 10. Klas

+ *Basiswissen und Übungen*
+ *Offizielle Musterprüfung*

STARK

Inhalt

Vorwort
Hinweise und Tipps

Training Grundwissen

1	Bruchgleichungen	1
2	Lineare Funktionen	2
3	Lineare Gleichungssysteme	12
4	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	15
5	Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse	19
6	Binomische Formeln	24
7	Quadratische Gleichungen	25
8	Quadratische Funktionen	28
9	Wahrscheinlichkeit	35
10	Kugel	41
11	Zentrische Streckung	43
12	Strahlensätze	47
13	Satzgruppe des Pythagoras	49
14	Winkelsätze	53
Lösungen mit vielen Hinweisen und Tipps		56

Musterprüfung

Teil A	139
Lösungen	143
Teil B – Aufgabengruppe I	145
Lösungen	148
Teil B – Aufgabengruppe II	157
Lösungen	160

Original-Prüfungsaufgaben der 10. Klasse

Abschlussprüfung 2021	**2021-1**
Aufgabengruppe I	2021-1
Lösungen	2021-5
Aufgabengruppe II	2021-15
Lösungen	2021-19
Abschlussprüfung 2022	**2022-1**
Aufgabengruppe I	2022-1
Lösungen	2022-4
Aufgabengruppe II	2022-13
Lösungen	2022-16

Abschlussprüfung 2023 .... www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, kannst du sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich effektiv auf den **Mittleren Schulabschluss** nach der 10. Klasse an bayrischen **Mittelschulen** im Fach **Mathematik** vorbereiten.

- Im Kapitel **Training Grundwissen** wird der **Prüfungsstoff** klar strukturiert **zusammengefasst**. Die wichtigsten Begriffe, Formeln und Lösungswege werden übersichtlich hervorgehoben und anhand von anschaulichen **Beispielen** verdeutlicht. Die vielen abwechslungsreichen **Übungsaufgaben** bieten dir die Möglichkeit, den Stoff selbst zu vertiefen. Unter „**Fit für die Prüfung?**“ findest du zu einzelnen Teilbereichen jeweils mehrere Aufgaben, anhand derer du deine Fähigkeiten ganz gezielt auf Prüfungsniveau trainieren kannst.
  Zu einigen Themen, mit denen erfahrungsgemäß viele Lernende Schwierigkeiten haben, gibt es **Lernvideos** und **GeoGebra-Anwendungen**. An den entsprechenden Stellen im Buch befinden sich **QR-Codes**, die du mit einem Smartphone oder Tablet scannen kannst.
- Alle Aufgaben im Trainingsteil sind mit der Überschrift **A** oder **B** gekennzeichnet. Die Aufgaben unter **A** solltest du – wie im entsprechenden Prüfungsteil – **ohne Taschenrechner und Formelsammlung** lösen. Erst bei den Aufgaben unter **B** darfst du diese Hilfsmittel einsetzen. Es gibt aber auch Aufgaben unter B, die du ohne Hilfsmittel lösen kannst.
  
- Mit dem Vorwissen aus dem Trainingsteil kannst du dich nun an die **Musterprüfung** wagen. Sie soll dir einen Eindruck vermitteln, welche Bedingungen dich in der Abschlussprüfung erwarten. Dann kannst du zur **Original-Prüfungsaufgabe 2023** übergehen. Aber auch mit den **Original-Prüfungsaufgaben 2021** und **2022** kannst du noch sehr gut für die neue Prüfung üben. Die alte Prüfung entspricht im Wesentlichen dem Teil B der neuen Prüfung.
- Zu allen Trainings- und Prüfungsaufgaben gibt es ausführlich **kommentierte Lösungen** mit zahlreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese erklären den Lösungsansatz und die Hauptschwierigkeit der jeweiligen Aufgabe genau, sodass du die Ergebnisse selbstständig verstehen und nachvollziehen kannst.
- Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch **wichtige Änderungen** für die Abschlussprüfung vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, erhältst du **aktuelle Informationen** dazu auf der Plattform **MyStark**.

Viel Erfolg bei deinen Vorbereitungen und in der Prüfung!

Hinweise und Tipps

Lies dir folgende Hinweise und Tipps genau durch, damit du über die Besonderheiten der **schriftlichen** Abschlussprüfung zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses im **Fach Mathematik** gut Bescheid weißt. Die Aufgaben werden zentral vom Kultusministerium gestellt, d. h., alle Schülerinnen und Schüler in Bayern schreiben dieselbe Prüfung. Die Bewertung erfolgt durch die Vergabe von **Punkten**.

Wie ist die Prüfung aufgebaut?

Die Prüfung besteht ab 2023 aus zwei Prüfungsteilen:

Teil A:
Im Teil A musst du **alle Aufgaben** lösen. Als Hilfsmittel sind **nur Zeichengeräte** erlaubt (kein Taschenrechner und keine Formelsammlung!). Die Bearbeitungszeit beträgt **30 Minuten**.
In Teil A können **8 Punkte** erreicht werden.

Teil B:
Im Teil B musst du **eine Aufgabengruppe** bearbeiten, die von der Prüfungskommission an deiner Schule aus zwei zentral gestellten Aufgabengruppen ausgewählt wird. Ein Austausch einzelner Aufgaben zwischen den Aufgabengruppen ist **nicht zulässig**!
Als Hilfsmittel sind **Zeichengeräte**, ein genehmigter elektronischer **Taschenrechner** und eine für den Gebrauch an der Mittelschule zugelassene **Formelsammlung** erlaubt. Die Bearbeitungszeit beträgt **150 Minuten**. In Teil B können **40 Punkte** erreicht werden.

Wie wird die Prüfung benotet?

Für das Fach Mathematik wird folgende Zuordnung von erreichter **Punktzahl** und **Note** landeseinheitlich festgesetzt:

Note	Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
Punkte	48 – 41	40,5 – 33	32,5 – 25	24,5 – 16	15,5 – 8	7,5 – 0

Was hat sich in der Notation geändert?

Beachte, dass sich folgende **Bezeichnungen** in den Prüfungen bis 2022 von den von dir gewohnten unterscheiden:

	Strecke	Länge	Definitionsmenge	Lösungsmenge
alte Notation	[AB]	$\overline{AB}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{L}$
neue Notation	$\overline{AB}$	$\lvert\overline{AB}\rvert$	D	L

Was musst du beim Bearbeiten der Aufgaben beachten?

Für die Bearbeitung der Prüfungsaufgaben ist es hilfreich, sich eine **Lösungsstrategie** anzueignen:

- **Lies** die Aufgabenstellung **genau** durch und **markiere** alle wichtigen Angaben (z. B. gegebene Größen, Lösungshinweise) farbig.
- Eine **Skizze**, in der du die gegebenen und gesuchten Größen einträgst, kann den Einstieg in eine komplexe Aufgabe erleichtern.
- Überlege, auf welches **Themengebiet** der Mathematik sich die Aufgabe bezieht. Welche Regeln, Sätze oder Formeln sind dir aus diesem Bereich bekannt? Nutze auch die Formelsammlung.
- Wenn du mit der Lösung einer schwierigen Aufgabe nicht weiterkommst, so halte dich nicht zu lange damit auf. Versuche, mit der nächsten Aufgabe weiterzumachen. Wenn die anderen Aufgaben bearbeitet sind, kommst du nochmals auf die angefangene Aufgabe zurück. **Bleib ruhig** und überlege, dann wirst du Zusammenhänge erkennen und auch schwierige Aufgaben lösen können.

- Wichtig ist die genaue **Darstellung des Lösungsweges**, denn Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist und auch die **Teilergebnisse** festgehalten sind. Achte zudem auf richtige **Maßeinheiten** und **saubere Zeichnungen**. Vergiss auch nicht, einen **Antwortsatz** zu formulieren.
- Orientiere dich bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben an der angegebenen **Punktzahl**: Je mehr Punkte eine Aufgabe ergibt, desto mehr Zeit solltest du dir für die Bearbeitung nehmen.
- Plane zum Schluss aber auch einen nicht zu knappen Zeitraum für die **Überprüfung** deiner Rechnungen ein. Versuche das **Ergebnis abzuschätzen**: Stimmt die errechnete Größe in etwa? Ist die Einheit richtig?
- Achte zudem auf eine **saubere äußere Form** und vergiss nicht, alle Blätter mit deiner **Platzziffer** und evtl. mit deinem Namen zu versehen.

Wie kannst du dich auf die Prüfung vorbereiten?

Besonders gut kannst du dich auf die Abschlussprüfung vorbereiten, indem du wie folgt vorgehst:

- Bereite dich **langfristig** auf die Abschlussprüfung vor. Arbeite parallel zum Thema, das gerade im Unterricht behandelt wird, gezielt mit den Trainingsaufgaben aus diesem Buch.
- Wenn du das „Training Grundwissen" erfolgreich bearbeitet hast, gehst du zur **Musterprüfung** und zur **Original-Prüfungsaufgabe 2023** über. Übe unter echten **Prüfungsbedingungen** und löse die Aufgaben nur mit den zugelassenen **Hilfsmitteln**. Präge dir wichtige Seiten in der Formelsammlung ein und nutze den Taschenrechner sinnvoll. Grundlegende Formeln solltest du auswendig kennen, um in der Prüfung keine wertvolle Zeit zu verlieren.
- Auch mit den **Original-Prüfungsaufgaben 2021** und **2022** kannst du sehr gut für die neue Prüfung üben, denn der Prüfungsstoff bleibt nahezu gleich. Die alte Prüfung entspricht dem Teil B der neuen Prüfung. Wie bei Teil B der neuen Prüfung musste bei der alten Prüfung eine der beiden Aufgabengruppen in 150 Minuten und nur mit den zugelassenen Hilfsmitteln gelöst werden.
- Versuche, die Aufgaben in der dafür **vorgegebenen Zeit** zu schaffen. Wenn du die Aufgaben zunächst nicht in dieser Zeit lösen kannst, solltest du die Prüfungsaufgaben in regelmäßigen Abständen wiederholen, bis du beim Rechnen sicherer und schneller wirst.
- Versuche stets, alle Aufgaben **selbstständig** zu lösen. Nur wenn du dich selbst anstrengst, bleibt der Stoff auch im Gedächtnis und du lernst dazu. Solltest du jedoch allein nicht weiterkommen, kann ein Blick in die Lösung hilfreich sein, da dort wichtige **Hinweise und Tipps** zur Bearbeitung der Aufgabe gegeben werden. Vergleiche zum Schluss deine Lösung mit der Musterlösung und suche gegebenenfalls nach Rechenfehlern oder Verbesserungsmöglichkeiten deines Ansatzes.
- Gehe optimistisch in die Prüfung. Wenn du dich gut vorbereitet hast, brauchst du dir keine Sorgen zu machen. Übung macht die Meisterin und den Meister!

12 Strahlensätze

Das musst du wissen!

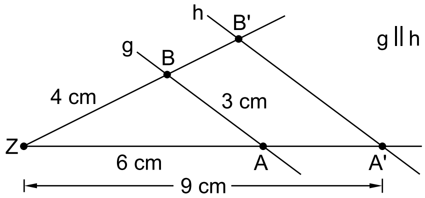
Strahlensätze

Voraussetzung für die Strahlensätze ist, dass von einem gemeinsamen Punkt (Zentrum Z) **zwei Strahlen** ausgehen, die **von zwei parallelen Geraden geschnitten** werden.

- **1. Strahlensatz:**
  Die Streckenabschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.
  $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ $\qquad$ $\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{ZB}|}$
- **2. Strahlensatz:**
  Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die vom Strahlenschnittpunkt aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl.
  $\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$ $\qquad$ $\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$

Beispiel

Berechne die Längen der Strecken $\overline{BB'}$ und $\overline{A'B'}$.



Lösung:

Länge der Strecke $\overline{ZB'}$:
1. Strahlensatz:

$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$$

$$\frac{9\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{|\overline{ZB'}|}{4\text{ cm}} \qquad |\cdot 4\text{ cm}$$

$$|\overline{ZB'}| = \frac{4\text{ cm}\cdot 9\text{ cm}}{6\text{ cm}}$$

$$|\overline{ZB'}| = 6\text{ cm}$$

Länge der Strecke $\overline{BB'}$:

$$|\overline{BB'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZB}|$$

$$|\overline{BB'}| = 6\text{ cm} - 4\text{ cm} = 2\text{ cm}$$

Länge der Strecke $\overline{A'B'}$:
2. Strahlensatz:

$$\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$$

$$\frac{|\overline{A'B'}|}{3\text{ cm}} = \frac{9\text{ cm}}{6\text{ cm}} \qquad |\cdot 3\text{ cm}$$

$$|\overline{A'B'}| = \frac{3\text{ cm}\cdot 9\text{ cm}}{6\text{ cm}}$$

$$|\overline{A'B'}| = 4{,}5\text{ cm}$$

Aufgaben A

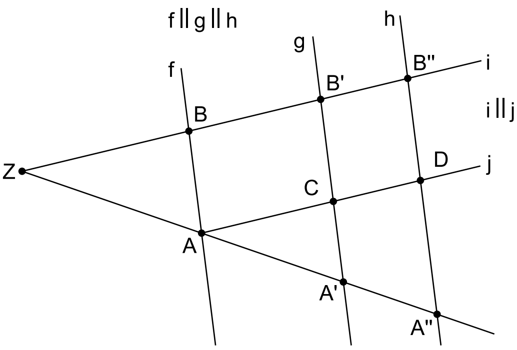
162. Welche beiden Gleichungen passen zur Zeichnung? Kreuze an.

☐ $\frac{|\overline{A''D}|}{|\overline{A'C}|} = \frac{|\overline{AA''}|}{|\overline{AA'}|}$

☐ $\frac{|\overline{B''D}|}{|\overline{B''A''}|} = \frac{|\overline{ZB''}|}{|\overline{ZA''}|}$

☐ $\frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\overline{B'B''}|}{|\overline{AB}|}$

☐ $\frac{|\overline{ZB''}|}{|\overline{ZB'}|} = \frac{|\overline{ZA''}|}{|\overline{ZA'}|}$



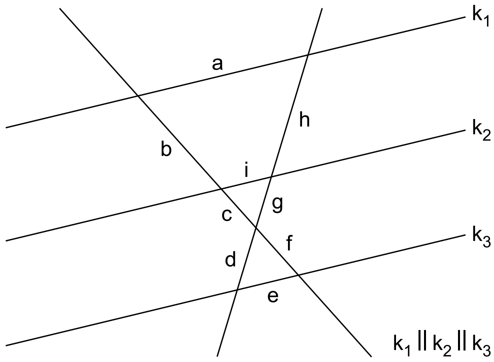
163. Fülle jeweils die Lücke so, dass die Formel richtig ist.

a) $\frac{a}{e} = \frac{b+c}{\square}$

b) $\frac{g}{h} = \frac{\square}{b}$

c) $\frac{i}{g} = \frac{a}{\square}$

d) $\frac{d}{f} = \frac{\square}{b+c}$

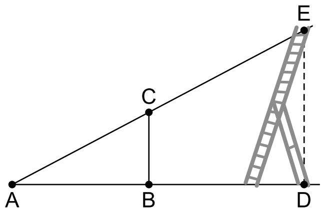


164. Berechne, bis zu welcher Höhe die Leiter in der Skizze reicht.

$|\overline{BD}| = 8\ \text{m}$

$|\overline{AD}| = 12\ \text{m}$

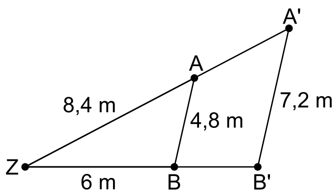
$|\overline{BC}| = 2\ \text{m}$



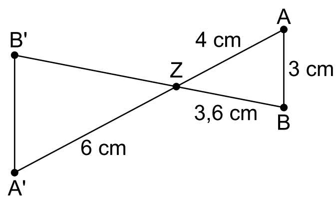
Aufgaben B

165. Berechne die fehlenden Längen mithilfe der Strahlensätze.

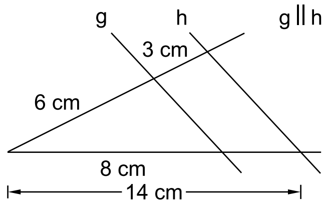
a)



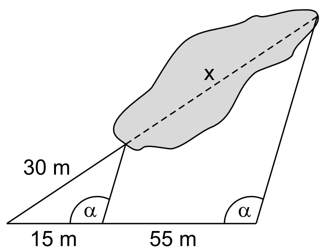
b)



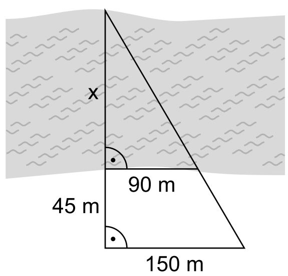
166. Prüfe, ob die angegebenen Maße stimmen.



167. a) Wie lang ist der See?



b) Wie breit ist der Fluss?



Hinweise und Tipps

162. ☒ $\dfrac{|\overline{A''D}|}{|\overline{A'C}|} = \dfrac{|\overline{AA''}|}{|\overline{AA'}|}$

Dieses Streckenverhältnis lässt sich mit dem 2. Strahlensatz aufstellen.

☐ $\dfrac{|\overline{B''D}|}{|\overline{B''A''}|} = \dfrac{|\overline{ZB''}|}{|\overline{ZA''}|}$

☐ $\dfrac{|\overline{CD}|}{|\overline{AC}|} = \dfrac{|\overline{B'B''}|}{|\overline{AB}|}$

☒ $\dfrac{|\overline{ZB''}|}{|\overline{ZB'}|} = \dfrac{|\overline{ZA''}|}{|\overline{ZA'}|}$

Dieses Streckenverhältnis lässt sich mit dem 1. Strahlensatz aufstellen.

---

163. a) $\dfrac{a}{e} = \dfrac{b+c}{\boxed{\mathbf{f}}}$

Dieses Streckenverhältnis lässt sich mit dem 2. Strahlensatz aufstellen.

b) $\dfrac{g}{h} = \dfrac{\boxed{\mathbf{c}}}{b}$

Dieses Streckenverhältnis lässt sich mit dem 1. Strahlensatz aufstellen.

c) $\dfrac{i}{g} = \dfrac{a}{\boxed{\mathbf{g+h}}}$

Dieses Streckenverhältnis lässt sich mit dem 2. Strahlensatz aufstellen.

d) $\dfrac{d}{f} = \dfrac{\boxed{\mathbf{g+h}}}{b+c}$

Dieses Streckenverhältnis lässt sich mit dem 1. Strahlensatz aufstellen.

---

164. Länge der Strecke $\overline{DE}$:

$$\frac{|\overline{DE}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{AB}|}$$

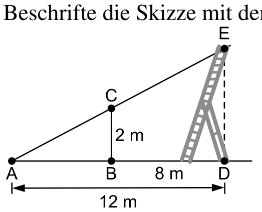
$$\frac{|\overline{DE}|}{2\text{ m}} = \frac{12\text{ m}}{4\text{ m}} \quad \Big|\cdot 2\text{ m}$$

$$|\overline{DE}| = \frac{12\text{ m}\cdot 2\text{ m}}{4\text{ m}}$$

$$|\overline{DE}| = 6\text{ m}$$

Die Leiter ist 5,5 m hoch.

Beschrifte die Skizze mit den Maßen:



Es gilt:
$|\overline{AB}| = |\overline{AD}| - |\overline{BD}| = 12\text{ m} - 8\text{ m} = 4\text{ m}$

Nutze den 2. Strahlensatz. Forme ihn nach der Länge der Strecke $\overline{DE}$ um.

---

165. a) Länge der Strecke $\overline{ZB'}$:

Berechne die Länge von $\overline{ZB'}$ mithilfe des 2. Strahlensatzes.

$$\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$$

$$\frac{7{,}2\text{ m}}{4{,}8\text{ m}} = \frac{|\overline{ZB'}|}{6\text{ m}} \quad \Big|\cdot 6\text{ m}$$

$$|\overline{ZB'}| = \frac{7{,}2\text{ m}\cdot 6\text{ m}}{4{,}8\text{ m}}$$

$$|\overline{ZB'}| = 9\text{ m}$$

Länge der Strecke $\overline{BB'}$:

Berechne die Länge von $\overline{BB'}$.

$$|\overline{BB'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZB}|$$

$$|\overline{BB'}| = 9\text{ m} - 6\text{ m}$$

$$|\overline{BB'}| = 3\text{ m}$$

Hinweise und Tipps

Länge der Strecke $\overline{AA'}$:

$$\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{ZB}|}$$

$$\frac{|\overline{AA'}|}{8{,}4\text{ m}} = \frac{3\text{ m}}{6\text{ m}} \quad |\cdot 8{,}4\text{ m}$$

$$|\overline{AA'}| = \frac{3\text{ m}\cdot 8{,}4\text{ m}}{6\text{ m}}$$

$$|\overline{AA'}| = 4{,}2\text{ m}$$

Berechne die Länge von $\overline{AA'}$ mithilfe des 1. Strahlensatzes.

b) Länge der Strecke $\overline{ZB'}$:

$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$$

$$\frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{|\overline{ZB'}|}{3{,}6\text{ cm}} \quad |\cdot 3{,}6\text{ cm}$$

$$|\overline{ZB'}| = \frac{6\text{ cm}\cdot 3{,}6\text{ cm}}{4\text{ cm}}$$

$$|\overline{ZB'}| = 5{,}4\text{ cm}$$

Berechne die Länge von $\overline{ZB'}$ mithilfe des 1. Strahlensatzes.

Länge der Strecke $\overline{A'B'}$:

$$\frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|} = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$$

$$\frac{|\overline{A'B'}|}{3\text{ cm}} = \frac{6\text{ cm}}{4\text{ cm}} \quad |\cdot 3\text{ cm}$$

$$|\overline{A'B'}| = \frac{6\text{ cm}\cdot 3\text{ cm}}{4\text{ cm}}$$

$$|\overline{A'B'}| = 4{,}5\text{ cm}$$

Berechne die Länge von $\overline{A'B'}$ mithilfe des 2. Strahlensatzes.

---

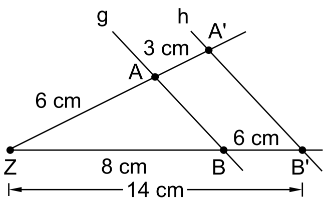
166. Da g und h parallel sind, gilt nach dem 1. Strahlensatz:

$$\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{ZA}|} \stackrel{?}{=} \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{ZB}|}$$

$$\frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}} \stackrel{?}{=} \frac{6\text{ cm}}{8\text{ cm}}$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{4}$$

Die angegebenen Maße können nicht stimmen.



Es gilt:
$|\overline{BB'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZB}| = 14\text{ m} - 8\text{ m} = 6\text{ m}$
Prüfe, ob der 1. Strahlensatz erfüllt ist.

---

167. a) Länge der Strecke x:

$$\frac{x}{30\text{ m}} = \frac{55\text{ m}}{15\text{ m}} \quad |\cdot 30\text{ m}$$

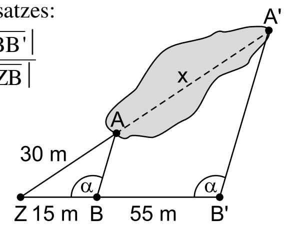
$$x = \frac{55\text{ m}\cdot 30\text{ m}}{15\text{ m}}$$

$$x = 110\text{ m}$$

Der See ist 110 m lang.

Berechne die Länge von x mithilfe des 1. Strahlensatzes:

$$\frac{|\overline{AA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{ZB}|}$$



M10-Musterprüfung an Mittelschulen in Bayern
Mathematik – Teil A

Aufgaben

Punkte

1. $(3x^4)^2 = 3x^8$

Bei der Termumformung ist ein Fehler unterlaufen.
Beschreiben Sie diesen und berichtigen Sie ihn.

1

2. Zum Mieten eines Leihwagens gibt es zwei Angebote.

Angebot A	Angebot B
0,40 € pro Kilometer	0,20 € pro Kilometer
kein Grundpreis	10 € Grundpreis

a) Die Abhängigkeit der Kosten in Euro von der Fahrstrecke in Kilometern lässt sich für Angebot A mit der Funktionsgleichung $y = 0{,}4x$ darstellen.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für das Angebot B.

b) Berechnen Sie für das Angebot A die Kosten für eine Wegstrecke von 80 Kilometern.

1

3. Kreuzen Sie den Sachverhalt an, bei dem es sich um ein exponentielles Wachstum handelt.

☐ Die Anzahl einer bestimmten Bakterienart verdoppelt sich im Labor alle 20 Minuten.

☐ Für mobile Daten am Smartphone müssen pro Gigabyte 5 € bezahlt werden.

☐ Für die Anlage eines festen Betrages erhält man bei einer Bank jährlich 0,5 % Zinsen, die dem Kunden am Ende des Jahres in bar ausgezahlt werden.

0,5

Lösungen

Teil A

Hinweise und Tipps

1. Richtige Umformung:
$(3x^4)^2 = \mathbf{9}x^8$

Erklärung:
Beim Potenzieren der Klammer wurde vergessen, die Zahl 3 zu potenzieren. Die Zahl 3 steht aber innerhalb der Klammer und muss somit auch potenziert werden.

Beachte das Potenzgesetz zum Potenzieren von Potenzen.

Wichtig: Hier ist eine Beschreibung des Fehlers gefordert und diese muss deshalb zwingend erfolgen, um den Punkt zu erhalten. Die Angabe der richtigen Gleichung allein reicht NICHT aus!

---

2. a) Funktionsgleichung für Angebot B:
x: Anzahl der Kilometer

$y = 0{,}2x + 10$

Stelle die lineare Gleichung mithilfe der Angaben auf.
Hier ist die Anzahl der Kilometer die Variable und der Grundpreis eine Konstante.

b) Kosten für die Wegstrecke von 80 Kilometern:
$x = 80$ in $y = 0{,}4x$:
$y = 0{,}4 \cdot 80$
$y = 32$
Die Kosten für 80 Kilometer betragen beim Angebot A 32 €.

Setze die 80 Kilometer in die gegebene Gleichung ein und berechne die Kosten.

3.
- ☒ Die Anzahl einer bestimmten Bakterienart verdoppelt sich im Labor alle 20 Minuten.
- ☐ Für mobile Daten am Smartphone müssen pro Gigabyte 5 € bezahlt werden.
- ☐ Für die Anlage eines festen Betrages erhält man bei einer Bank jährlich 0,5 % Zinsen, die dem Kunden am Ende des Jahres in bar ausgezahlt werden.

Exponentielles Wachstum bedeutet, dass sich eine Größe in jeweils den gleichen Zeitschritten vervielfacht (hier: verdoppelt). Dies ist nur bei der ersten Auswahlmöglichkeit der Fall.

---

4. Richtiges Dreieck:
Dreieck CDE

Mögliche Begründung:
Der Punkt E liegt auf dem Thaleskreis über $\overline{CD}$. Somit ist das Dreieck CDE rechtwinklig. Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Der Quotient $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ gilt nur in rechtwinkligen Dreiecken. Der Halbkreis mit M als Mittelpunkt ist der Thaleskreis über $\overline{CD}$. Da der Punkt E auf diesem Kreis liegt, befindet sich dort ein rechter Winkel. Das Dreieck CDE ist somit rechtwinklig.

Wichtig: Eine passende Begründung ist hier zwingend erforderlich, um die volle Punktzahl zu erhalten.

5.

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{6}d^3 \cdot \pi$$

$$V_{\text{neue Kugel}} = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot d)^3 \cdot \pi$$

$$V_{\text{neue Kugel}} = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot d^3 \cdot \pi$$

$$V_{\text{neue Kugel}} = 8 \cdot V_{\text{Kugel}}$$

Das Volumen ändert sich um den Faktor 8.

Volumenformel für Kugeln: $V = \frac{1}{6}d^3 \cdot \pi$

Verdopplung des Durchmessers: $d_{\text{neu}} = 2 \cdot d$
Da der Durchmesser mit 3 potenziert wird, wird auch die 2 mit 3 potenziert. Somit erhält man den Faktor 8.

Hinweis:
Es wäre ebenso möglich, den Faktor anhand eines Zahlenbeispiels auszurechnen. Beide Lösungswege sind akzeptiert.

M10-Prüfung an Mittelschulen in Bayern 2022
Mathematik – Aufgabengruppe I

Aufgaben Punkte

1. a) Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der nach oben geöffneten Normalparabel p_1 mit dem Scheitelpunkt $S_1(-4|1)$ in der Normalform.

b) Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 geht durch die Punkte $A(-4|1)$ und $B(0|1)$. Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_2 in der Scheitelpunktform und geben Sie den Scheitelpunkt S_2 an.

c) Bestimmen Sie zeichnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte Q und R der beiden Normalparabeln p_1 und p_2 in einem Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. Geben Sie Q und R an.

d) Die Normalparabeln p_3: $y = x^2 + 2x - 2$ sowie p_4: $y = -x^2 - 2x + 4$ schneiden sich in den Punkten M und N.
Berechnen Sie die Koordinaten von M und N und geben Sie beide Punkte an. 8

2. Der Neupreis eines Autos beträgt 37 450 €.

a) Berechnen Sie, in wie vielen Jahren sich der Wert dieses Autos auf 25 000 € verringert, wenn man von einem jährlich gleichbleibenden prozentualen Wertverlust von 12,7 % ausgeht.

b) Der Neuwagen soll nach acht Jahren als Gebrauchtwagen für 9 000 € verkauft werden. Bestimmen Sie für diesen Fall den Wertverlust pro Jahr in Prozent, unter der Annahme, dass dieser über die Jahre hinweg gleich bleibt.

c) Tatsächlich ist der Wertverlust aber nicht gleichbleibend.
Im ersten Jahr beträgt er 25 %, im zweiten Jahr 18 % und in den darauffolgenden vier Jahren jeweils 9 %.
Ermitteln Sie den Wert des Autos nach diesen 6 Jahren. 4

3. Die folgende Abbildung zeigt eine Figur, bei der gilt:

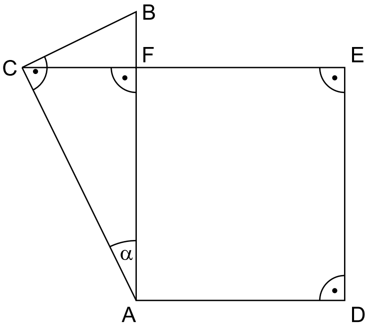
$\overline{AD} = 8\,\text{cm}$;

$\alpha = 25°$;

$A_{ADEF} = 72\,\text{cm}^2$

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu 3



Quelle: StMUK

4. Vereinfachen Sie den unten stehenden Term so weit wie möglich.
Es gilt: x; y; z ≠ 0

$$\frac{21x^{-4} \cdot 9y^3 \cdot 6z^5 \cdot x^3 \cdot 8z^{-8}}{4y^2 \cdot 7x^{-6} \cdot 3y \cdot 18z^{-4}}$$ 2

Lösungen

Aufgabengruppe I

Hinweise und Tipps

1. a) Funktionsgleichung der Parabel p_1 in der Normalform:

$S_1(-4\,|\,1)$

p_1 nach oben geöffnet: $y = (x - x_S)^2 + y_S$

Setze den Scheitelpunkt S_1 in die Scheitelpunktform für eine nach oben geöffnete Parabel ein. Achte auf die Vorzeichen.

$y = [x - (-4)]^2 + 1$

$y = (x + 4)^2 + 1$

$y = x^2 + 8x + 16 + 1$

$y = x^2 + 8x + 17$

Löse die Klammer mithilfe der binomischen Formel auf.
Fasse zusammen.

b) Funktionsgleichung der Parabel p_2 in der Normalform:

$A(-4\,|\,1);\ B(0\,|\,1)$

p_2 nach unten geöffnet: $y = -x^2 + px + q$

Setze die Punkte A und B jeweils in die Normalform für nach unten geöffnete Parabeln ein.
Achte auf die Vorzeichen.

I $\quad 1 = -(-4)^2 + (-4) \cdot p + q$
II $\quad 1 = -0^2 + 0 \cdot p + q$

I $\quad 1 = -16 - 4p + q$
II $\quad 1 = q$

Löse das Gleichungssystem (hier: mit dem Einsetzungsverfahren).

II in I $\quad 1 = -16 - 4p + 1$

$1 = -15 - 4p \quad |+15$

$16 = -4p \quad |:(-4)$

$-4 = p$

Setze den Term für q in Gleichung I ein und berechne p.

p_2: $y = -x^2 - 4x + 1$

Funktionsgleichung von p_2 in Normalform

Umformen in die Scheitelpunktform und Bestimmung von S_2:

$y = -(x^2 + 4x - 1)$

$y = -(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 - 1)$

$y = -[(x + 2)^2 - 5]$

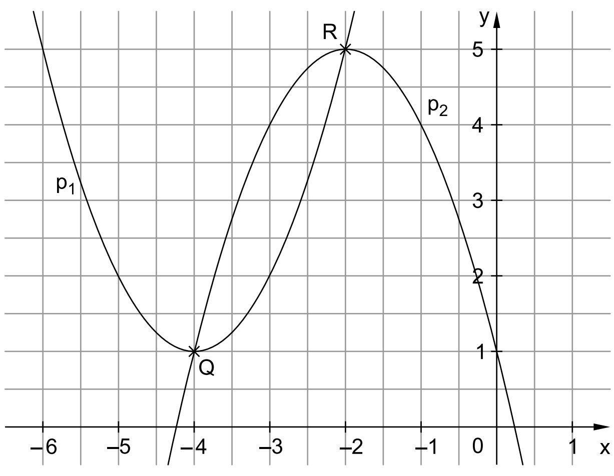
$y = -(x + 2)^2 + 5$

Wandle die Funktionsgleichung durch quadratische Ergänzung in die Scheitelpunktform um.
Bilde das Binom.

$S_2(-2\,|\,5)$

Lies die Koordinaten des Scheitelpunkts S_2 aus der Scheitelpunktform ab.

c) Grafische Darstellung:



Lege ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm an.
Platzbedarf:
x-Achse: -6 bis $+1$
y-Achse: 0 bis $+5$
Beschrifte das Koordinatensystem vollständig.
Trage den Scheitelpunkt S_1 ein und zeichne mithilfe der Parabelschablone die nach oben geöffnete Normalparabel p_1.
Trage den Scheitelpunkt S_2 ein und zeichne mithilfe der Parabelschablone die nach unten geöffnete Normalparabel p_2.

Ablesen der Schnittpunkte:
$Q(-4\,|\,1)$ und $R(-2\,|\,5)$

Lies die Schnittpunkte Q und R der beiden Parabeln ab und gib diese an.

Hinweise und Tipps

d) Koordinaten der Schnittpunkte M und N der Parabeln p_3 und p_4:

p_3: $y = x^2 + 2x - 2$

p_4: $y = -x^2 - 2x + 4$

$$p_3 = p_4$$

$$x^2 + 2x - 2 = -x^2 - 2x + 4 \quad |+x^2; +2x; -4$$

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-3)}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{4}$$

$$x_{1/2} = -1 \pm 2$$

$$x_1 = -1 + 2$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1 - 2$$
$$x_2 = -3$$

Setze die Funktionsterme von p_3 und p_4 gleich. Bringe alles auf eine Seite.

Forme die quadratische Gleichung in die Normalform um und berechne die x-Koordinaten mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Hier ist $p = 2$ und $q = -3$.

$x_1 = 1$ in p_3:

$$y_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 - 2$$
$$y_1 = 1$$
$$\Rightarrow \quad M(1\,|\,1)$$

$x_2 = -3$ in p_3:

$$y_2 = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 2$$
$$y_2 = 1$$
$$\Rightarrow \quad N(-3\,|\,1)$$

Setze x_1 und x_2 jeweils in eine der beiden Funktionsgleichungen (hier: p_3) ein und berechne die y-Koordinaten der Schnittpunkte M und N.

Gib die Koordinaten der Schnittpunkte an.

---

2. a) Anzahl der Jahre, in denen der Wert 25 000 € beträgt:

Anfangswert: $W_0 = 37\,450$ €

Endwert: $W_n = 25\,000$ €

Abnahmerate: $p = 12{,}7\,\% = 0{,}127$

Abnahmefaktor: $q = 1 - 0{,}127 = 0{,}873$

Gesucht: n

Bestimme den Wachstumsfaktor für negatives Wachstum.
$q = 1 - p$

$$25\,000\text{ €} = 37\,450\text{ €} \cdot 0{,}873^n \quad |:37\,450\text{ €}$$

$$0{,}6675\ldots = 0{,}873^n \quad |\log$$

$$n = \log_{0{,}873} 0{,}6675\ldots$$

$$n = 2{,}975\ldots$$

$$n \approx 3$$

In 3 Jahren hat sich der Wert des Autos auf 25 000 € reduziert.

Setze die gegebenen Werte in die Wachstumsformel $W_n = W_0 \cdot q^n$ ein.
Löse nach n auf.

Berechne n mithilfe des Logarithmus.
Runde auf ganze Jahre.

b) Jährlicher Wertverlust in Prozent:

Anfangswert: $W_0 = 37\,450$ €

Endwert: $W_n = 9\,000$ €

Anzahl der Jahre: $n = 8$

Gesucht: p (bzw. q)

Wachstumsfaktor:

$$9\,000\text{ €} = 37\,450\text{ €} \cdot q^8 \quad |:37\,450\text{ €}$$

$$0{,}2403\ldots = q^8 \quad |\sqrt[8]{\ }$$

$$q = 0{,}8367\ldots$$

Setze die gegebenen Werte in die Wachstumsformel $W_n = W_0 \cdot q^n$ ein und löse nach q auf.