2024

FOS · BOS 12

Fachabitur-P
mit Lösungen

MEHR
ERFAHREN

Bayern

Mathematik Te

+ *CAS-Aufgaben*

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Aufgabe der Beruflichen Oberschule I
2 Die schriftliche Fachabiturprüfung in Mathematik II
3 Arbeit mit diesem Buch III
4 Inhalte und Schwerpunktthemen IV
5 Operatoren VII
6 Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung VIII

Original-Fachabituraufgaben ohne CAS

Fachabitur 2019 ohne CAS (Technik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel) 2019-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel) 2019-8
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) 2019-14
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) 2019-25
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) 2019-36
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) 2019-43

Fachabitur 2020 ohne CAS (Technik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel) 2020-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel) 2020-7
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) 2020-12
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) 2020-23

Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) 2020-34
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) 2020-43

Fachabitur 2021 ohne CAS (Technik)
Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel) 2021-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel) 2021-8
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) 2021-12
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) 2021-24
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) 2021-34
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) 2021-41

Fachabitur 2022 ohne CAS (Technik)
Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel) 2022-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel) 2022-9
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) 2022-14
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) 2022-26
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) 2022-38
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) 2022-46

Fachabitur 2023 ohne CAS (Technik) .... **www.stark-verlag.de/mystark**
Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Musterprüfungen zum Fachabitur ab 2019 (online)

Musterprüfung I .... **www.stark-verlag.de/mystark**
Teil 1, Analysis I (ohne Hilfsmittel) M-1
Teil 1, Geometrie I (ohne Hilfsmittel) M-7
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) M-10
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) M-20

Musterprüfung II .... **www.stark-verlag.de/mystark**
Teil 1, Analysis II (ohne Hilfsmittel) M-26
Teil 1, Geometrie II (ohne Hilfsmittel) M-32
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) M-36
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) M-44

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung mit CAS (online)

1 Fachabiturprüfung mit Computer-Algebra-System (CAS) i

2 Hinweise zum Bearbeiten der Aufgaben, bei denen CAS als Hilfsmittel zugelassen ist iii

Original-Fachabituraufgaben mit CAS (online)

Fachabitur 2019 mit CAS (Technik) . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**

Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) 2019-51

Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) 2019-60

Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) 2019-68

Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) 2019-71

Fachabitur 2020 mit CAS (Technik) . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**

Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) 2020-51

Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) 2020-59

Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) 2020-67

Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) 2020-74

Fachabitur 2021 mit CAS (Technik) . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**

Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) 2021-49

Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) 2021-59

Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) 2021-67

Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) 2021-71

Fachabitur 2022 mit CAS (Technik) . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**

Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) 2022-55

Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) 2022-63

Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) 2022-71

Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) 2022-75

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie haben zwei lehrreiche Jahre an der FOS bzw. ein Jahr an der BOS absolviert und werden eine schriftliche Prüfung im Fach Mathematik ablegen. Bei der Vorbereitung auf die Abschlussprüfungen wird Ihnen dieses Buch eine gute Hilfe sein.

Mit dem Buch erhalten Sie:

- **offizielle schriftliche Fachabituraufgaben** für die technischen Ausbildungsrichtungen
- zwei **Musterprüfungen**, um Ihnen weitere Übungsmöglichkeiten für die Fachabiturprüfung zu geben

Zu jeder Aufgabe folgen **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie zusätzliche **Lösungshinweise**, die Ihnen das eigenständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Die angeführten Lösungen sind dabei als **möglicher, aber keineswegs einziger Weg** zum Erreichen des Ergebnisses zu sehen.

Das Ziel der Arbeit mit dem Buch besteht darin, dass Sie die Problemstellungen weitgehend selbstständig bearbeiten können und die beschriebenen Lösungswege nur noch zur Kontrolle Ihrer eigenen Ergebnisse nutzen. Wenn Sie dieses Ziel erreicht haben, sind Sie gut auf die bevorstehende Prüfung vorbereitet.

Darüber hinaus können Sie dieses Buch **unterrichtsbegleitend** bei der systematischen Vorbereitung auf Schulaufgaben einsetzen, da Ihr Fachlehrer oder Ihre Fachlehrerin hier auch immer die Fachabiturprüfung im Blick haben wird.

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen für Ihre Prüfungen viel Erfolg!

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungs-einheiten	100 ⋮ 96	95 ⋮ 91	90 ⋮ 86	85 ⋮ 81	80 ⋮ 76	75 ⋮ 71	70 ⋮ 66	65 ⋮ 61	60 ⋮ 56	55 ⋮ 51	50 ⋮ 46	45 ⋮ 41	40 ⋮ 34	33 ⋮ 27	26 ⋮ 20	19 ⋮ 0

2.3 Zugelassene Hilfsmittel (Prüfung ohne CAS)

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Technik für Berufliche Oberschulen bzw. eine diese enthaltende zugelassene Formelsammlung. Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.

Die Merkhilfe Mathematik/Technik wurde von den Fachmitarbeitern der Dienststellen der Ministerialbeauftragten für die Beruflichen Oberschulen des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus erarbeitet. Sie ist auf der Website des Staatinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (www.isb.bayern.de) zu finden.

3 Arbeit mit diesem Buch

Mit diesem Buch erhalten Sie die **Original-Fachabiturprüfungen ab 2019**. Die Original-Aufgaben 2019 bis 2022 für die Prüfung ohne CAS sind im Buch abgedruckt. Sobald die Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, stehen diese auf der Plattform MyStark zur Verfügung (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite). Dort finden Sie zudem Original-Aufgaben für die Prüfung mit CAS.

Eine zusätzliche Übungsmöglichkeit für den hilfsmittelfreien Teil bietet Ihnen das ebenfalls auf MyStark abrufbare **interaktive Training**.

Zur weiteren Einübung der Prüfungsinhalte und insbesondere zur Simulation der Prüfungssituation dienen die **Musterprüfungen** auf MyStark, die der Form der Fachabiturprüfung (ohne CAS) ab 2019 entsprechen. Der Aufgabensatz mit den Varianten AI und GI bzw. AII und GII stellt dabei jeweils eine vollständige Prüfung dar. Die Musterprüfungen decken ein möglichst breites Spektrum an unterschiedlichen Aufgabenstellungen ab, erheben aber nicht den Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller möglichen Aufgabentypen und -varianten.

4 Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen für die schriftliche Fachabiturprüfung stichpunktartig aufgeführt. Diese Auflistung soll Ihnen einen Überblick über den prüfungsrelevanten Lehrstoff vermitteln, sie ersetzt jedoch nicht den ausführlichen Lehrplan für das Fach Mathematik. Die Zusammenstellung kann Ihnen bei der Vorbereitung auf die Fachabiturprüfung als Leitfaden für die verbindlichen Inhalte und wichtigsten mathematischen Begriffe dienen.

4.1 Analysis

Grundbegriffe bei reellen Funktionen

Grundlagen
- Reelle Funktionen: Abbildungsvorschrift, Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge, Funktionsgraph
- Lineare Funktionen und lineare Ungleichungen
- Quadratische Funktionen und quadratische Ungleichungen

Ganzrationale Funktionen und Funktionsscharen
- Verknüpfung von Funktionen: Summe, Differenz, Produkt
- Nullstellenbestimmung unter Verwendung von Polynomdivision und Substitution
- Faktorisierung des Funktionsterms und Vielfachheit der Nullstellen
- Schnittpunkte von Funktionsgraphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$
- Symmetrie des Funktionsgraphen (Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)

Exponentialfunktion und Logarithmus
- Eigenschaften der Funktion $f\colon x \mapsto a \cdot e^{c \cdot (x-d)} + y_0$ mit $b > 0$
- Einfluss der Parameter a, b, c, d und y_0 auf den Graphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$
- Lösen von Exponentialgleichungen unter Verwendung der Logarithmusgesetze
- Exponentielles Wachstum bzw. exponentielle Abnahme

Differenzialrechnung
- Differenzenquotient, Differenzialquotient und Ableitungsfunktion
- Lokale und mittlere Änderungsrate
- Tangente
- Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktionen und deren Ableitungsfunktionen
- Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor, Summenregel, Produktregel, Kettenregel
- Ableitung von ganzrationalen Funktionen (auch mit Parameter)
- Ableitung von einfachen Funktionen, die als Produkt, Summe oder Verkettung von Exponential- und Polynomfunktionen entstehen (ohne Parameter)

Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung
- Monotoniedefinition, Monotoniekriterium, maximale Monotonieintervalle
- Links- und Rechtskrümmung, maximale Krümmungsintervalle
- Extrempunkte, Wendepunkte, Randextrema und absolute Extrema
- Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen (auch mit Parameter) und einfachen Funktionen, die als Produkt, Summe oder Verkettung von Exponentialfunktionen und linearen bzw. quadratischen Funktionen entstehen
- Aufstellen eines Funktionsterms bei vorgegebenen Eigenschaften
- Anwendungsaufgaben, Optimierungsaufgaben

Integralrechnung
- Stammfunktion einer Funktion
- Unbestimmtes Integral
- Berechnung von Stammfunktionen für ganzrationale Funktionen sowie für einfache Funktionen, deren Term Exponentialfunktionen enthält, unter Verwendung von
  $\int e^{ax+b}\,dx$
- Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals
- Deutung des bestimmten Integrals als Flächenbilanz
- Berechnung von Flächeninhalten mithilfe des bestimmten Integrals

4.2 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$
- Geometrischer Vektor als Menge aller parallelgleichen Pfeile
- Repräsentant eines Vektors
- Nullvektor, Gegenvektor
- Addition von Vektoren, S-Multiplikation und deren Rechengesetze
- Punkte und Ortsvektoren, Koordinatensysteme, Koordinaten
- Addition und S-Multiplikation in Koordinatenschreibweise

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, lineare Gleichungssysteme
- Linearkombination von Vektoren
- Lösen eines linearen Gleichungssystems mit höchstens vier Unbekannten und höchstens drei Gleichungen mit dem Gauß-Algorithmus
- Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren
- Basis eines reellen Vektorraums
- Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen

Produkte von Vektoren

- Skalarprodukt zweier Vektoren
- Längen- und Winkelberechnungen
  - Betrag eines Vektors
  - Entfernung zweier Punkte
  - Winkel zwischen zwei Vektoren
  - orthogonale Vektoren
- Vektorprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$, Normalenvektor
- Spatprodukt dreier Vektoren im $\mathbb{R}^3$
- Flächen- und Volumenberechnungen

Geometrische Anwendungen

- Geraden und Ebenen
  - vektorielle Parameterform
  - Normalenform
  - Koordinatenform
  - Achsenabschnittsform
- Lage im Koordinatensystem
  - Koordinaten der Spurpunkte von Geraden
  - Koordinaten der Achsenschnittpunkte von Ebenen
  - Gleichungen der Spurgeraden von Ebenen
  - Schrägbildskizzen
- Lagebeziehung von Punkten, Geraden und Ebenen
- Schnittpunkt, Schnittgerade, Schnittwinkel
- Abstandsberechnungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen
- Lotgerade, Lotebene, Lotfußpunkt
- Spiegelpunkt

Bitte beachten Sie: Aufgrund des durch COVID-19 bedingten Unterrichtsausfalls waren in den Abiturprüfungen 2021 bis 2023 nicht alle Inhalte prüfungsrelevant. Über die aktuellen Bestimmungen für die Prüfung 2024 sollten Sie sich rechtzeitig bei Ihrer Lehrkraft erkundigen.

Aufgabenstellung

BE

1 Für eine ganzrationale Funktion g vierten Grades mit ihrer Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$ gelten die beiden folgenden wahren Aussagen:

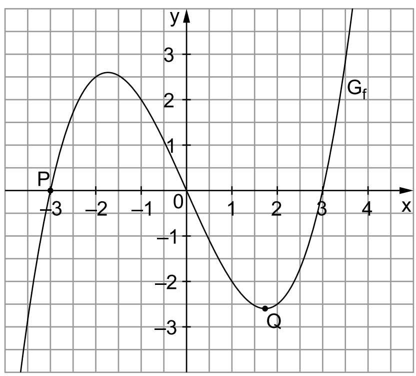
(a) $g'(3) = 0$

(b) $g(-x) - g(x) = 0$ für alle $x \in D_g$

Formulieren Sie für (a) und (b) jeweils eine sich mit Sicherheit aus der jeweiligen Aussage ergebende Eigenschaft des Graphen von g in Worten. 3

2.0 Die ganzrationale Funktion f mit ihrer Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ hat den Grad drei.

Nebenstehende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen von f. Auf G_f liegen die Punkte $P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$.



2.1 Geben Sie jeweils an, ob $f'(x_P)$, $f''(x_P)$, $f'(x_Q)$ und $f''(x_Q)$ größer, kleiner oder gleich null ist. 4

2.2 Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.
Hinweis: Ganzzahlige Werte können der Abbildung in 2.0 entnommen werden. 4

3 Zur Bestimmung des Alters kohlenstoffhaltiger Fossilien wird die C-14-Methode eingesetzt. Diese nutzt aus, dass das Verhältnis von C-14-Atomen zu den C-12-Atomen in lebenden Organismen annähernd konstant ist. Nach dem Absterben des Organismus halbiert sich die Anzahl der C-14-Atome ca. alle 5 730 Jahre. Die Anzahl der C-12-Atome bleibt konstant.
Für die Anzahl N(t) der C-14-Atome in einem abgestorbenen Organismus gilt somit nachfolgender Zusammenhang, wobei t die Zeit in Jahren nach Absterben des Organismus und N_0 die Anzahl der C-14-Atome zum Zeitpunkt $t=0$ beschreibt:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730} \cdot t}; \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

Das Analyselabor Yeti 3.0 kann mit dieser Methode eine Altersbestimmung durchführen, wenn noch mindestens 3,8 % vom anfänglichen Wert N_0 vorhanden sind.

Begründen Sie, ob Yeti 3.0 kohlenstoffhaltige Fossilien bis zu einem Alter von 60 000 Jahren auf ihr Alter hin untersuchen kann. Ermitteln Sie dazu überschlagsmäßig, wie viel Prozent der ursprünglichen C-14-Atome nach 57 300 Jahren noch vorhanden sind. 4

4 Bestimmen Sie rechnerisch die Lösung der Gleichung $e^x - 1 = \frac{6}{e^x}$ für $x \in \mathbb{R}$ mithilfe einer geeigneten Substitution. 4

5 Gegeben sind die folgenden Funktionen mit ihrer jeweiligen Definitionsmenge:

$t\colon x \mapsto e^x + 2 \quad \text{mit } D_t = \mathbb{R} \qquad u\colon x \mapsto -e^{-x} + 4 \quad \text{mit } D_u = \mathbb{R}$

Nachfolgend wird beschrieben, wie der Graph der Funktion t in den Graphen der Funktion u übergeführt werden kann. Es hat sich in dieser Beschreibung genau ein Fehler eingeschlichen.

„Der Graph von u entsteht, indem man zunächst den Graphen von t …
1.) an der x-Achse spiegelt,
2.) anschließend an der y-Achse spiegelt und
3.) danach um 2 LE parallel zur y-Achse nach oben verschiebt."

Geben Sie an, in welchem der Schritte 1.) bis 3.) der Fehler ist, und korrigieren Sie diesen. 3

22

TIPP Lösungshinweise – Teil 1, Analysis

Teilaufgabe 1

Deuten Sie die 1. Ableitung einer Funktion g an einer Stelle x als Steigung ihres Graphen an dieser Stelle.

Formen Sie die gegebene Gleichung so um, dass sich eine Aussage zur Symmetrie des Graphen bezüglich des Koordinatensystems machen lässt.

Teilaufgabe 2.1

Entnehmen Sie der Zeichnung das Steigungsverhalten des Graphen der Funktion f im Punkt P bzw. Q.

Entscheiden Sie, ob der Graph der Funktion f im Punkt P bzw. Q rechts- oder linksgekrümmt ist.

Teilaufgabe 2.2

Entnehmen Sie der Zeichnung die Nullstellen der Funktion f und entscheiden Sie, welche Vielfachheit die jeweilige Nullstelle besitzt.

Geben Sie einen möglichen Funktionsterm in faktorisierter Form an.

Entnehmen Sie der Zeichnung die Koordinaten eines Kurvenpunktes (der nicht auf der x-Achse liegt) und bestimmen Sie damit den Formfaktor des Funktionsterms f(x).

Teilaufgabe 3

Zeigen Sie durch eine geeignete Abschätzung, dass nach 57 300 Jahren (sogar) weniger als 0,1 % vom anfänglichen Wert vorhanden sind.

Benutzen Sie, dass $\frac{1}{1\,024} < \frac{1}{1\,000}$.

Teilaufgabe 4

Verwenden Sie die Substitution $z = e^x$.

Formen Sie die Gleichung so um, dass Sie eine quadratische Gleichung erhalten, deren Lösungen Sie mit der Lösungsformel bestimmen können.

Führen Sie die Rücksubstitution durch.

Teilaufgabe 5

Vollziehen Sie ausgehend vom Funktionsterm t(x) nach, wie die gegebenen Schritte den Term verändern.

Beachten Sie, dass beim Spiegeln an der y-Achse der gesamte Term mit –1 multipliziert werden muss.

Lösungsvorschlag – Teil 1, Analysis

1 (a) Der Graph der Funktion g besitzt an der Stelle $x = 3$ eine waagrechte Tangente.

Oder: Der Graph der Funktion g besitzt an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt (Hoch- bzw. Tiefpunkt) oder einen Terrassenpunkt.

(b) Der Graph der Funktion g verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse.

TIPP Zu Aussage (b): Formt man die gegebene Gleichung um, so erhält man die Aussage zur Symmetrie des Graphen der Funktion g bezüglich der y-Achse:

$$\begin{aligned} g(-x) - g(x) &= 0 \qquad \Big| + g(x) \\ g(-x) &= g(x) \end{aligned}$$

2.1

$f'(x_P) > 0$	(Die Tangente an G_f hat an der Stelle x_P eine positive Steigung.)
$f''(x_P) < 0$	(G_f ist im Punkt P rechtsgekrümmt.)
$f'(x_Q) = 0$	(G_f hat im Punkt Q eine waagrechte Tangente. *Oder:* G_f hat an der Stelle x_Q einen relativen Tiefpunkt.)
$f''(x_Q) > 0$	(Im Tiefpunkt Q ist G_f linksgekrümmt.)

TIPP Die Begründungen in Klammern sind nicht verlangt.

2.2 Die Nullstellen der Funktion f können der Zeichnung entnommen werden:

$x_1 = -3$ (einfache Nullstelle)
$x_2 = 0$ (einfache Nullstelle)
$x_3 = 3$ (einfache Nullstelle)

Somit erhält man:
$f(x) = a \cdot x \cdot (x+3) \cdot (x-3)$ mit dem Formfaktor $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Der Zeichnung kann entnommen werden, dass der Graph durch den Punkt $A(1 \,|\, -2)$ verläuft. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(1) &= -2 \\ a \cdot 1 \cdot (1+3) \cdot (1-3) &= -2 \\ a \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-2) &= -2 \\ -8a &= -2 \qquad \Big| : (-8) \\ a &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man:
$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x \cdot (x+3) \cdot (x-3)$

Alternative (aber etwas aufwendiger):
Da f eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 ist, kann man auch den Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verwenden.

Die Nullstellen von f können der Zeichnung entnommen werden. Somit gilt:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{I} & f(0) = 0 & . & a \cdot 0^3 & + b \cdot 0^2 & + c \cdot 0 & + d = 0 & \Rightarrow \; d = 0 \\
\text{II} & f(-3) = 0 & \overset{d=0}{\Rightarrow} & a \cdot (-3)^3 & + b \cdot (-3)^2 & + c \cdot (-3) & = 0 & \\
\text{III} & f(3) = 0 & \overset{d=0}{\Rightarrow} & a \cdot 3^3 & + b \cdot 3^2 & + c \cdot 3 & = 0 &
\end{array}$$

Die Gleichungen II und III liefern:

$$\begin{array}{lrl}
\text{II} & -27a + 9b - 3c = 0 & \\
\text{III} & 27a + 9b + 3c = 0 & + \\
\hline
 & 18b \qquad = 0 & \Rightarrow \; b = 0
\end{array}$$

Der Zeichnung kann entnommen werden, dass der Graph durch den Punkt $A(1\,|-2)$ verläuft. Daraus folgt:

$$\text{IV} \quad f(1) = -2 \quad \overset{b=d=0}{\Rightarrow} \quad a \cdot 1^3 + c \cdot 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad a + c = -2$$

Zusammen mit Gleichung III (und $b = 0$) ergibt sich:

$$\begin{array}{lrll}
\text{III} & 27a + 3c = 0 & & \\
\text{IV} & a + c = -2 & |\cdot 3 & - \\
\hline
 & 24a \qquad = 6 & & \Rightarrow \; a = \frac{1}{4}
\end{array}$$

$a = \frac{1}{4}$ eingesetzt in Gleichung IV liefert:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} + c &= -2 \qquad \left|\, -\tfrac{1}{4}\right. \\
c &= -2\tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man:
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2\frac{1}{4}x$

1.1 Koordinaten des Punktes D

TIPP Im Quader verlaufen die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ parallel und sind gleich lang, d. h., es gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Mithilfe einer geeigneten Vektorkette folgt:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$ mit $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$ mit $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-10 \\ 16-10 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad D(-4\,|\,8\,|\,0)$

Rechter Winkel im Punkt B

Im Punkt B liegt genau dann ein rechter Winkel vor, wenn $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ gilt.

Mit $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2-10 \\ 2-10 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC}$ wie oben folgt:

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = (-8) \cdot (-6) + (-8) \cdot 6 = 48 - 48 = 0$$

Somit ist die Grundfläche ABCD des geplanten Hauses bei B rechtwinklig.

1.2 Lage der Geraden g und h

Für die Gleichung der Geraden h gilt:

h: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \overrightarrow{AD}$ mit $k \in \mathbb{R}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4-2 \\ 8-2 \\ 0-0 \end{pmatrix}$

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

TIPP Die Gleichung der Geraden h muss man nicht unbedingt aufstellen. Es genügt der Richtungsvektor $\vec{u}_h = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Geraden h.

Für die Richtungsvektoren $\vec{u}_h = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_g = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Geraden h und g gilt:

$$\vec{u}_h = r \cdot \vec{u}_g \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = 6$$

Die Richtungsvektoren sind also kollinear (Vielfache voneinander).

Somit müssen die Geraden g und h entweder identisch sein oder echt parallel zueinander liegen.

Nun führt man eine Punktprobe durch, um zu überprüfen, ob $A(2|2|0)$ auf der Geraden g liegt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2 = -4 - s & \Rightarrow \quad s = -6 \\ 2 = 1 + s & \Rightarrow \quad s = 1 \\ 0 = 0 & \end{cases}$$

Das ist ein Widerspruch. Somit folgt, dass A nicht auf g liegt.

Dann aber sind g und h echt parallel zueinander.

1.3 **TIPP** Das Volumen des Hauses setzt sich zusammen aus dem Volumen des Quaders ABCDEFGH und dem Volumen des Prismas EJHFKG mit der dreieckigen Grundfläche EJH.

Volumen des Quaders

$$V_{Quader} = \underbrace{\left|\overrightarrow{BA}\right|}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{\left|\overrightarrow{BC}\right|}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{\left|\overrightarrow{BF}\right|}_{\text{Höhe}} \qquad \text{(vgl. (*) unten)}$$

$$V_{Quader} = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot 3$$

$$V_{Quader} = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} \cdot 3$$

$$V_{Quader} = \sqrt{128} \cdot \sqrt{72} \cdot 3$$

$$V_{Quader} = 288\,[\text{m}^3]$$

Bemerkungen zu (*):

- $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ wie in Teilaufgabe 1.1
- $\left|\overrightarrow{BF}\right| = 3$ (da laut Angabe die Deckenhöhe des Erdgeschosses 3 m beträgt)

Volumen des Prismas

$$V_{Prisma} = A_{\Delta EJH} \cdot h_{Prisma}$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{EH} \times \overrightarrow{EJ} \right| \cdot \left| \overrightarrow{JK} \right| \qquad \text{(vgl. (**) unten)}$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot (-3) - (-6) \cdot 4 \\ (-6) \cdot 3 - 6 \cdot (-3) \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 24 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{24^2 + 24^2 + 0^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2 + 0^2}$$

$$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1152} \cdot \sqrt{128}$$

$$V_{Prisma} = 192\,[\mathrm{m}^3]$$

Bemerkungen zu (**):

- $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Der Punkt E befindet sich senkrecht über dem Punkt $A(2|2|0)$ in einer Höhe von 3 m und hat somit die Koordinaten $E(2|2|3)$. Daher folgt:
  $\overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 5-2 \\ 7-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = -\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Volumen des Hauses

$$V_{Haus} = V_{Quader} + V_{Prisma} = 288 + 192 = 480\,[\mathrm{m}^3]$$

1.4 **TIPP** Der gesuchte Winkel zwischen der Dachfläche EFKJ und der durch EFGH gegebenen Ebene ist gleich dem (spitzen) Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{EH}$ und $\overrightarrow{EJ}$.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{EH} \circ \overrightarrow{EJ}}{|\overrightarrow{EH}| \cdot |\overrightarrow{EJ}|} \qquad \text{mit } \overrightarrow{EH} \text{ und } \overrightarrow{EJ} \text{ aus Teilaufgabe 1.3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{(-6)\cdot(-3) + 6\cdot 3 + 0\cdot 4}{\sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 4^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{36}{\sqrt{72} \cdot \sqrt{34}}$$

$\Rightarrow \quad \alpha \approx 43{,}3°$ (spitzer Winkel)

Der Dachneigungswinkel erfüllt damit die Bauvorschrift.

1.5 *1. Möglichkeit:*

Gleichung der Ebene Z

Da der Punkt $J(-1\,|\,5\,|\,7)$ die x_3-Koordinate $x_3 = 7$ besitzt, liegt der First 7 m über dem Boden. Die 1 m tiefer liegende Zwischendecke liegt dann 6 m über dem Boden. Da diese parallel zum Boden (x_1-x_2-Ebene) verläuft, folgt für die Gleichung der Ebene Z, in der die Zwischendecke liegt:

Z: $x_3 = 6$

Gleichung der Ebene Y durch die Punkte E, F, K und J

Y: $\vec{x} = \overrightarrow{OE} + \lambda \cdot \overrightarrow{EF} + \mu \cdot \overrightarrow{EJ}$ mit $E(2\,|\,2\,|\,3)$, $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{EJ}$ wie in 1.3

$$Y: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Gleichung der Schnittgeraden

Der allgemeine Ebenenpunkt $X_Y(2 + 8\lambda - 3\mu\,|\,2 + 8\lambda + 3\mu\,|\,3 + 4\mu)$ der Ebene Y wird in die Ebenengleichung Z: $x_3 = 6$ eingesetzt:

$$3 + 4\mu = 6 \quad \Rightarrow \quad 4\mu = 3 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{3}{4}$$

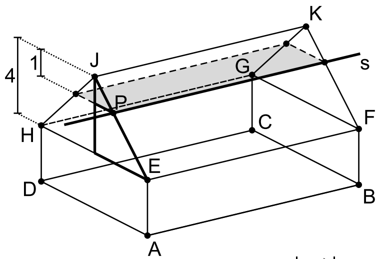
Einsetzen in Y liefert die Gleichung der Schnittgeraden s:

$$s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{4} \cdot (-3) \\ 2 + \frac{3}{4} \cdot 3 \\ 3 + \frac{3}{4} \cdot 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$s:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 4{,}25 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Möglichkeit:
Die x_3-Koordinate des Punktes J ist $x_3 = 7$ und die Deckenfläche EFGH liegt 3 m über der Grundfläche ABCD. Der Punkt J liegt also 4 m über der Fläche EFGH.



Mit dem Strahlensatz folgt: $\dfrac{|\overrightarrow{JP}|}{|\overrightarrow{JE}|} = \dfrac{1}{4}$

TIPP $\frac{1}{|\overrightarrow{JE}|} \cdot \overrightarrow{JE}$ ist der Vektor der Länge 1 in Richtung von J nach E.
Skaliert man diesen Vektor mit der Länge $|\overrightarrow{JP}|$, so erhält man den Vektor:
$\overrightarrow{JP} = |\overrightarrow{JP}| \cdot \frac{1}{|\overrightarrow{JE}|} \cdot \overrightarrow{JE} = \frac{|\overrightarrow{JP}|}{|\overrightarrow{JE}|} \cdot \overrightarrow{JE}$

Somit gilt für den Stützvektor $\overrightarrow{OP}$ der gesuchten Schnittgeraden s mithilfe einer geeigneten Vektorkette:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JP}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OJ} + \frac{|\overrightarrow{JP}|}{|\overrightarrow{JE}|} \cdot \overrightarrow{JE} \qquad \text{mit } \overrightarrow{JE} = -\overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ (vgl. Teilaufgabe 1.3)}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 4{,}25 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Als Richtungsvektor der gesuchten Schnittgeraden s wählt man z. B.
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und erhält:

$$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 4{,}25 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

1.6 Für die zusätzlich im Monat Juli benötigte Regenwassermenge W_{Soll} gilt:

$$W_{Soll} = 113\,\text{m}^2 \cdot \underbrace{2{,}5\,\frac{\ell}{\text{m}^2}}_{\substack{\text{täglich benötigte}\\ \text{Regenwasser-}\\ \text{menge pro m}^2}} \cdot \underbrace{31}_{\substack{\text{Anzahl}\\ \text{der Tage}\\ \text{im Juli}}} = 8\,757{,}5\,\ell$$

> **TIPP** Da angenommen wird, dass der Regen senkrecht nach unten fällt (parallel zur x_3-Achse), entspricht die Grundfläche der „Regensäule" über dem Haus der rechteckigen Grundfläche des Hauses.

Für die Grundfläche A_{ABCD} des Hauses gilt:

$$A_{ABCD} = \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|$$

$$A_{ABCD} = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \qquad \text{(vgl. Teilaufgabe 1.1)}$$

$$A_{ABCD} = \sqrt{128} \cdot \sqrt{72} \qquad \text{(vgl. Teilaufgabe 1.3)}$$

$$A_{ABCD} = 96\,[\text{m}^2]$$

Für die im Juli über das Dach gesammelte Wassermenge W_{Ist} gilt:

$$W_{Ist} = 96\,\text{m}^2 \cdot \underbrace{101\,\frac{\ell}{\text{m}^2}}_{\substack{\text{Gesamtnieder-}\\ \text{schlagsmenge}\\ \text{pro m}^2}} = 9\,696\,\ell$$

Wegen $W_{Ist} > W_{Soll}$ kann die Bewässerung des Gartens im Juli durchgeführt werden.