

2024

FOS · BOS 12

Fachabitur-Prüfung
mit Lösungen

Bayern

Mathematik Nichtkandidat

**MEHR
ERFAHREN**



STARK

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Stichwortverzeichnis 2019 – 2022

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1	Aufgabe der Beruflichen Oberschule	I
2	Die schriftliche Fachabiturprüfung in Mathematik	II
3	Arbeit mit diesem Buch	III
4	Inhalte und Schwerpunktthemen	IV
5	Operatoren	VII
6	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung	VIII

Original-Fachabituraufgaben

Fachabitur 2019 (Nichttechnik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel)	2019-1
Teil 1, Stochastik (ohne Hilfsmittel)	2019-8
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	2019-13
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	2019-24
Teil 2, Stochastik I (mit Hilfsmitteln)	2019-35
Teil 2, Stochastik II (mit Hilfsmitteln)	2019-43

Fachabitur 2020 (Nichttechnik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel)	2020-1
Teil 1, Stochastik (ohne Hilfsmittel)	2020-7
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	2020-13
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	2020-22

Teil 2, Stochastik I (mit Hilfsmitteln)	2020-32
Teil 2, Stochastik II (mit Hilfsmitteln)	2020-38

Fachabitur 2021 (Nichttechnik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel)	2021-1
Teil 1, Stochastik (ohne Hilfsmittel)	2021-7
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	2021-12
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	2021-21
Teil 2, Stochastik I (mit Hilfsmitteln)	2021-32
Teil 2, Stochastik II (mit Hilfsmitteln)	2021-39

Fachabitur 2022 (Nichttechnik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel)	2022-1
Teil 1, Stochastik (ohne Hilfsmittel)	2022-9
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	2022-13
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	2022-24
Teil 2, Stochastik I (mit Hilfsmitteln)	2022-33
Teil 2, Stochastik II (mit Hilfsmitteln)	2022-40

Fachabitur 2023 (Nichttechnik) www.stark-verlag.de/mystark

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Musterprüfungen zum Fachabitur ab 2019 (online)

Musterprüfung I www.stark-verlag.de/mystark

Teil 1, Analysis I (ohne Hilfsmittel)	M-1
Teil 1, Stochastik I (ohne Hilfsmittel)	M-8
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln)	M-12
Teil 2, Stochastik I (mit Hilfsmitteln)	M-23

Musterprüfung II www.stark-verlag.de/mystark

Teil 1, Analysis II (ohne Hilfsmittel)	M-30
Teil 1, Stochastik II (ohne Hilfsmittel)	M-37
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln)	M-41
Teil 2, Stochastik II (mit Hilfsmitteln)	M-51

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

das vorliegende Buch bietet Ihnen die Möglichkeit, sich optimal und zielgerichtet auf die **Fachabiturprüfung in Mathematik** vorzubereiten. Zugleich können Sie es als **unterrichtsbegleitendes Übungsbuch** einsetzen, das Sie bei der systematischen Vorbereitung auf Schulaufgaben im Fach Mathematik unterstützt.

- Mit dem Buch erhalten Sie die **offiziellen schriftlichen Prüfungsaufgaben zum Erwerb der Fachhochschulreife** (Nichttechnik) der letzten Jahre.
- Das **Stichwortverzeichnis** erlaubt Ihnen die gezielte Suche nach bestimmten Begriffen und Inhalten in den Fachabiturprüfungen.
- Die beiden **Musterprüfungen** auf MyStark entsprechen der neuen Form der Fachabiturprüfung, wie sie seit 2019 gestellt wird.

Allen Aufgaben folgen **vollständige Lösungsvorschläge**. Zwischen der Angabe und den Lösungen sind zusätzlich für jede Teilaufgabe separate **Lösungshinweise** eingefügt. Sie erleichtern Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben, indem Sie Denkanstöße zur Lösung liefern, wenn Sie einmal beim Bearbeiten der Aufgaben ins Stocken geraten.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Fachabiturprüfung 2024 (Nichttechnik) vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu unter www.stark-verlag.de/mystark (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Wir hoffen, dass Sie sich mithilfe dieser Aufgabensammlung sehr gut auf die bevorstehende Fachabiturprüfung vorbereiten können, und wünschen Ihnen viel Erfolg!

Friedrich Schmidt
Georg Ott

2 Die schriftliche Fachabiturprüfung in Mathematik

2.1 Aufbau und Auswahl der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben werden einheitlich vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus gestellt. Die Prüfung ist in zwei Teile gegliedert:

- Teil 1: Die Bearbeitung erfolgt ohne Verwendung von Hilfsmitteln.
Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Teil 2: Die Bearbeitung erfolgt unter Verwendung von Hilfsmitteln (siehe Abschnitt 2.3). Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Zwischen den beiden Prüfungsteilen ist eine Pause von 30 Minuten.

Jeder Teil setzt sich aus den beiden Aufgabengruppen A (Analysis) und S (Stochastik) zusammen.

In Teil 2 gibt es für jede Aufgabengruppe zwei Varianten (AI und AII bzw. SI und SII). Die Auswahl jeweils einer Variante trifft die Schule; die Schülerinnen und Schüler haben keine Wahlmöglichkeit.

In Teil 1 wird zentral nur eine Variante gestellt.¹

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit mit abzugeben.

Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen dürfen nur auf Papier, das den Stempel der Schule trägt, angefertigt werden.

2.2 Bewertung der Prüfungsaufgaben

Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten (BE) angegeben.

Es sind maximal 100 BE zu erreichen. Diese werden wie folgt verteilt:

	Aufgaben- gruppe	Bewertungs- einheiten
Teil 1	A	22 BE
	S	12 BE
Teil 2	A	43 BE
	S	23 BE

¹ Bei dem von den Autoren erstellten Musterprüfungssatz zu diesem Buch besteht Teil 1 dennoch aus zwei Varianten pro Aufgabengruppe, um Ihnen zwei vollständige Prüfungen zum Üben zur Verfügung zu stellen.

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungseinheiten	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	26	19
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	96	91	86	81	76	71	66	61	56	51	46	41	34	27	20	0

2.3 Zugelassene Hilfsmittel

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Nichttechnik für Berufliche Oberschulen und eines der beiden Tabellenwerke zur Stochastik: „Stochastik-Tabellen“ v. Barth u. a. (München: Ehrenwirth-Verlag); „Tafelwerk zur Stochastik“ v. Wörle/Mühlbauer (München: Bayerischer Schulbuch-Verlag). Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.

Die Merkhilfe Mathematik/Nichttechnik wurde von den Fachmitarbeitern der Dienststellen der Ministerialbeauftragten für die Beruflichen Oberschulen des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus erarbeitet. Sie ist auf der Webseite des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung zu finden:

www.isb.bayern.de

3 Arbeit mit diesem Buch

Mit dem Buch erhalten Sie die **offiziellen schriftlichen Prüfungsaufgaben** zum Erwerb der Fachhochschulreife (Nichttechnik) der letzten Jahre, um sich optimal und zielgerichtet auf die Fachabiturprüfung in Mathematik vorzubereiten. Die Original-Aufgaben 2019 bis 2022 sind im Buch abgedruckt. Sobald die Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, stehen diese auf MyStark zur Verfügung (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Zur weiteren Einübung der Prüfungsinhalte und insbesondere zur Simulation der Prüfungssituation dienen die beiden von den Autoren erstellten **Musterprüfungen** auf MyStark. Der Aufgabensatz mit den Varianten AI und SI bzw. AII und SII stellt dabei jeweils eine vollständige Prüfung dar. Die Intention bei der Erstellung der Musterprüfungen war die Abdeckung eines möglichst breiten Spektrums an unterschiedlichen Aufgabenstellungen, ohne dabei den Anspruch auf Vollständigkeit hinsichtlich aller möglichen Aufgabentypen und Aufgabenvarianten zu erheben.

Eine zusätzliche Übungsmöglichkeit für den hilfsmittelfreien Teil bietet Ihnen das **interaktive Training** auf MyStark.

Außerdem erhalten Sie dort Zugang zu **Lernvideos** zu ausgewählten Original-Prüfungen. In den Lernvideos werden die Teilaufgaben des hilfsmittelfreien Teils Schritt für Schritt vorgerechnet. Vor dem Ansehen der Lösungen ist es jedoch sinnvoll, die Aufgaben selbstständig zu lösen.

4 Inhalte und Schwerpunktthemen

In der folgenden Übersicht sind die wesentlichen Schwerpunktthemen für die schriftliche Fachabiturprüfung stichpunktartig aufgeführt. Diese Auflistung soll Ihnen einen Überblick über den prüfungsrelevanten Lehrstoff vermitteln, sie ersetzt jedoch nicht den ausführlichen Lehrplan für das Fach Mathematik. Die Zusammenstellung kann Ihnen bei der Vorbereitung auf die Fachabiturprüfung als Leitfaden für die verbindlichen Inhalte und wichtigsten mathematischen Begriffe dienen.

4.1 Analysis

Grundbegriffe bei reellen Funktionen

Grundlagen

- Reelle Funktionen: Abbildungsvorschrift, Funktionsterm, Definitions- und Wertemenge, Funktionsgraph
- Lineare Funktionen und lineare Ungleichungen
- Quadratische Funktionen und quadratische Ungleichungen

Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

- Verknüpfung von Funktionen: Summe, Differenz, Produkt und Quotient
- Nullstellenbestimmung unter Verwendung von Polynomdivision und Substitution
- Faktorisierung des Funktionsterms und Vielfachheit der Nullstellen
- Schnittpunkte von Funktionsgraphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow \pm\infty$
- Symmetrie des Funktionsgraphen (Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung)
- Geraden- und Parabelscharen

Exponentialfunktion und Logarithmus

- Eigenschaften der Funktion $f: x \mapsto a \cdot b^{c \cdot (x-d)} + y_0$ mit $b > 0$
- Einfluss der Parameter a , b , c , d und y_0 auf den Graphen
- Verhalten der Funktionswerte für $x \rightarrow \pm\infty$
- Lösen von Exponentialgleichungen unter Verwendung des Logarithmus und der Rechenregeln für Logarithmen
- Exponentielles Wachstum bzw. exponentielle Abnahme

Differenzialrechnung

- Differenzenquotient, Differenzialquotient und Ableitungsfunktion
- Lokale und mittlere Änderungsrate
- Tangente

- Zusammenhang zwischen den Graphen von Funktionen und deren Ableitungsfunktionen
- Ableitung einer Funktion mit konstantem Faktor, Summenregel, Produktregel, Kettenregel
- Ableitung von Polynomfunktionen und von einfachen Funktionen, die als Produkt und Verkettung von Exponentialfunktionen und linearen bzw. quadratischen Funktionen entstehen

Integralrechnung

- Stammfunktion einer Funktion
- Unbestimmtes Integral
- Berechnung von Stammfunktionen für ganzrationale Funktionen sowie Funktionen der Form $f: x \mapsto a \cdot e^{c(x-d)} + y_0$
- Definition und Eigenschaften des bestimmten Integrals
- Deutung des bestimmten Integrals als Flächenbilanz
- Berechnung von bestimmten Integralen und Flächeninhalten ohne Parameter

Anwendung der Differenzialrechnung

- Monotoniedefinition, Monotoniekriterium, maximale Monotonieintervalle
- Links- und Rechtskrümmung, maximale Krümmungsintervalle
- Extrempunkte, Wendepunkte, Randextrema und absolute Extrema
- Kurvendiskussion von ganzrationalen Funktionen und einfachen Funktionen, die als Produkt und Verkettung von Exponentialfunktionen und linearen bzw. quadratischen Funktionen entstehen
- Aufstellen des Funktionsterms bei vorgegebenen Eigenschaften
- Anwendungsaufgaben, Optimierungsprobleme

4.2 Stochastik

Zufallsexperiment und Ereignis

- Ergebnisraum Ω eines ein- bzw. mehrstufigen Zufallsexperimentes
- Baumdiagramm eines mehrstufigen Zufallsexperimentes
- Ereignis als Teilmenge des Ergebnisraumes
- Venn-Diagramme
- Elementarereignis, sicheres und unmögliches Ereignis, Gegenereignis
- Verknüpfung von Ereignissen, Gesetze von De Morgan
- Unvereinbarkeit von Ereignissen

Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

- Relative Häufigkeit eines Ereignisses und deren Eigenschaften
- Empirisches Gesetz der großen Zahlen
- Laplace-Experiment, Laplace-Wahrscheinlichkeit
- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Satz von Sylvester für zwei Ereignisse
- Vierfeldertafel
- Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Stochastische Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit zweier Ereignisse

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

- Baumdiagramm bei mehrstufigen Zufallsexperimenten
- Pfadregeln, Urnenmodell
- Allgemeines Zählprinzip
- $n!$ und Binomialkoeffizient
- Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Bernoulli-Ketten
- Verwendung eines Tafelwerkes

Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zufallsgröße und Zufallswert
- Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße
 - in Tabellenform
 - in grafischer Darstellung, Histogramm u. a.
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße
- Verschiebungsformel zur Berechnung der Varianz
- Binomialverteilte Zufallsgröße und ihre charakteristischen Maßzahlen

Testen von Hypothesen

- Ziel eines Hypothesentests
- Stichprobe und Testgröße
- Nullhypothese und Gegenhypothese
- Entscheidungsregel
- Ablehnungsbereich der Nullhypothese
- Fehler 1. und 2. Art beschreiben und deren Wahrscheinlichkeit berechnen
- Signifikanzniveau
- Einseitiger Signifikanztest bei zugrunde liegender Binomialverteilung

Bitte beachten Sie: Aufgrund des durch COVID-19 bedingten Unterrichtsausfalls waren in den Fachabiturprüfungen 2021 bis 2023 nicht alle Inhalte prüfungsrelevant. Über die aktuellen Bestimmungen für die Prüfung 2024 sollten Sie sich rechtzeitig bei Ihrer Lehrkraft erkundigen.

5 Operatoren

Bei der Formulierung von Prüfungsaufgaben werden bestimmte Handlungsanweisungen, sogenannte Operatoren, verwendet. Diese sollen sicherstellen, dass unter einer bestimmten Aufgabenstellung stets das Gleiche verstanden wird. Die nachfolgende Tabelle soll Ihnen einen Überblick über oft verwendete Operatoren geben, damit Sie die Aufgabenstellungen korrekt erfassen können.

Operator	Bedeutung
begründen	Für einen gegebenen Sachverhalt einen folgerichtigen Zusammenhang zwischen Ursache(n) und Wirkung(en) herstellen.
berechnen	Ausschließlich rechnerische Generierung der Ergebnisse, wobei der Lösungsweg nachvollziehbar ist.
bestimmen, ermitteln	Rechnerische, grafische oder inhaltliche Generierung eines Ergebnisses.
beweisen, zeigen, nachweisen	Mithilfe von sachlichen Argumenten durch logisches Herleiten eine Behauptung/Aussage belegen bzw. widerlegen.
entscheiden	Sich bei Alternativen eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen.
erläutern	Wesentliche Seiten eines Sachverhalts, Gegenstands bzw. Vorgangs an Beispielen verständlich machen.
interpretieren	Sachverhalte/Zusammenhänge/Fakten oder Daten analysieren, sie deuten bzw. erklären.
nennen, angeben	Fakten/Sachverhalte, Begriffe ohne Erläuterung wiedergeben.
prüfen	Wahrheitsgehalt feststellen.
skizzieren	Sachverhalte, Objekte, Strukturen oder Ergebnisse auf das Wesentliche reduziert (vereinfacht) übersichtlich darstellen.
untersuchen	Sachverhalte/Objekte erkunden, Merkmale und Zusammenhänge herausarbeiten.
zeichnen	Eine exakte grafische Darstellung unter Verwendung von Zeichengeräten darstellen.

6 Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung

6.1 Vorbereitung

Folgende Vorgehensweise bei der Prüfungsvorbereitung hat sich als vorteilhaft erwiesen.

- Eine gründliche und kontinuierliche Vorbereitung ist die Voraussetzung, um das notwendige mathematische Wissen und Verständnis für eine erfolgreiche Fachabiturprüfung zu erwerben. Um Ihnen die Prüfungsvorbereitung zu erleichtern, bietet Ihnen dieses Buch eine umfangreiche Zusammenstellung von **Original-Prüfungen** an der FOS/BOS der letzten Jahre sowie zwei von den Autoren erstellte **Musterprüfungen**.
- Der Aufgabenstellung folgt jeweils ein **komplett ausgearbeiteter Lösungsvorschlag** mit umfangreichen Erläuterungen zu jedem einzelnen Lösungsschritt. Diese kommentierten Lösungsvorschläge stellen jedoch nur einen möglichen Weg dar, um das Ergebnis zu erreichen. Es ist möglich, dass Sie bei der selbstständigen Bearbeitung einer Teilaufgabe auf einem anderen Weg zum selben Ziel kommen.
- Um einen **optimalen Lernerfolg** zu erreichen, empfiehlt es sich, das Lern- und Übungspensum langfristig zu planen. Es ist zweckmäßig, alle eigenen schriftlichen Bearbeitungen der Aufgaben übersichtlich aufzubewahren. Dies erleichtert Ihnen spätere Wiederholungen und ermöglicht eine unmittelbare Übersicht über die von Ihnen bereits bearbeiteten Inhalte und Themenbereiche.
- Das **Stichwortverzeichnis** hilft Ihnen während des Schuljahres – entsprechend dem behandelten Lernstoff – die passenden Fachabiturprüfungsaufgaben zu finden.
Beispielsweise sind unter dem Stichwort „Aufstellen von Funktionstermen“ die Nummern aller betreffenden Prüfungsaufgaben aufgelistet, die Ihnen eine umfassende und zusammenhängende Bearbeitung des Themengebietes ermöglichen.
- Es empfiehlt sich, während der Prüfungsvorbereitung stets die **Hilfsmittel** zu verwenden, die auch in der Fachabiturprüfung zugelassen sind. Dies führt zur Vertrautheit mit der Merkhilfe und mit den verwendeten Funktionen des Taschenrechners. Üben Sie zudem das Bearbeiten von Aufgaben ohne Hilfsmittel.
- Teilen Sie die Vorbereitung zur Fachabiturprüfung in einzelne **Phasen** ein. Versuchen Sie, von der ersten Übungsphase bis zur letzten Übungsphase schrittweise das angestrebte Ziel zu erreichen, eine Prüfungsaufgabe in der dafür vorgegebenen Zeit selbstständig zu lösen. Simulieren Sie selbst eine **Prüfungssituation** unter Bedingungen wie im „Ernstfall“.
- Bei der **selbstständigen Bearbeitung** der Prüfungsaufgaben sollten Sie zunächst versuchen, allein mit der Aufgabenstellung zurechtzukommen. Finden Sie jedoch bei einer Teilaufgabe keinen eigenen Lösungsansatz oder geraten Sie ins Stocken, so nutzen Sie zuerst die **Lösungshinweise**, die zwischen den Angaben und den Lösungen eingefügt sind. Diese sollen Ihnen einen Denkanstoß geben, der Ihnen

weiterhilft, ohne die Lösung vorwegzunehmen. Gehen Sie dabei schrittweise vor, indem Sie jeden einzelnen Tipp erst bei Bedarf lesen.

Schlagen Sie im Lösungsteil erst nach, wenn Ihnen alle zur Aufgabe gehörenden Tipps nicht weiterhelfen oder Sie Ihre selbst erarbeitete Lösung mit der im Buch dargestellten vergleichen wollen. Die ausgearbeiteten Lösungsvorschläge dienen vor allem zur Kontrolle, ob Ihre Ergebnisse richtig und vollständig sind. An vielen Stellen zeigen Ihnen die von den Autoren entworfenen Lösungswege aber auch bewährte und übersichtliche mathematische Verfahren, die Ihnen hilfreich sein können.

Denken Sie daran: Wer sich gut vorbereitet hat, kann optimistisch und gelassen in die Fachabiturprüfung gehen.

6.2 Bearbeitung der Prüfungsaufgaben

Erinnern Sie sich in der Prüfungssituation an folgende Ratschläge und Tipps:

- Beginnen Sie nach einem kurzen **Überblick** mit der Bearbeitung des Themenbereichs (Analysis oder Stochastik), den Sie am besten beherrschen. Als sehr vorteilhaft hat es sich erwiesen, sich mit dem jeweiligen Themenbereich intensiv zu beschäftigen und nicht immer wieder von dem einen Themenbereich zum anderen zu wechseln.

Dies sollten Sie nur dann tun, falls Sie mit einer Aufgabe gar nicht weiterkommen und die nächste Teilaufgabe bzw. die restlichen Aufgaben aus demselben Themenbereich ebenfalls nicht bearbeiten können. Halten Sie sich nicht zu lange an einer Aufgabe auf, bei der Sie nicht weiterkommen. Kommen Sie nach Bearbeitung aller restlichen Aufgaben nochmals auf die angefangene Aufgabe zurück und versuchen Sie in Ruhe, eine Lösung zu finden.

- Lesen Sie den Aufgabentext konzentriert und markieren Sie dabei die **Schlüsselwörter** wie beispielsweise *Nullstellen* oder *Testgröße*. Wichtig sind dabei vor allem genaue Unterscheidungen innerhalb der Aufgabenstellung wie z. B. *mindestens eine Nullstelle* oder *genau eine Nullstelle*.
- Um den Lösungsansatz zu einer Aufgabe zu finden oder die gegebene Problemstellung zu veranschaulichen, kann das **Anfertigen einer Skizze** nützlich sein.
- Beachten Sie, dass in manchen Teilaufgaben „**Zwischenlösungen**“ angegeben sind, die Ihnen als Kontrolle dienen bzw. mit denen Sie weiterarbeiten können.
- Orientieren Sie sich an der angegebenen **Zahl der Bewertungseinheiten (BE)**: Je mehr Bewertungseinheiten eine Aufgabe ergibt, desto mehr Zeit sollte für die Bearbeitung eingeplant werden.
- Die einzelnen Teilaufgaben sind oftmals inhaltlich eng miteinander verbunden. Daraus ergibt sich eine sinnvolle Bearbeitung in der vorgegebenen nummerierten **Reihenfolge der Teilaufgaben**.
- In Teil 2 der Prüfung dürfen Sie die **Merkhilfe** und das Tafelwerk zur Stochastik benutzen. Dabei ist es wichtig, dass Sie die Merkhilfe lediglich als eine Gedächtnisstütze verstehen, mit deren Umgang Sie sich bereits während der Prüfungsvor-

bereitung vertraut gemacht haben. Es hilft wenig, wenn Sie auf der Merkhilfe beispielsweise zum Begriff *Symmetrie* eine Formel finden, deren Anwendung Sie bei der Vorbereitung auf die Fachabiturprüfung nicht geübt haben.

- Bemühen Sie sich um eine **ordentliche äußere Form** der Prüfungsarbeit. Schreiben und zeichnen Sie deutlich und übersichtlich, streichen Sie fehlerhafte Stellen mit einem Lineal durch und fügen Sie Ihre Korrektur ein. Nummerieren Sie die beschriebenen Seiten, um spätere Verweise und Korrekturen einfacher zuordnen zu können.
- Achten Sie bei der Aufgabenstellung auch auf die verwendeten **Operatoren** (Handlungsanweisungen). Diese geben Ihnen zusammen mit den zu erzielenden Bewertungseinheiten einen Überblick über den notwendigen Umfang der erwarteten Lösung. So verlangt beispielsweise die Aufgabenstellung „*Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit ...*“, dass Sie anhand einer Formel oder eines Baumdiagramms per Hand rechnen, eine Stochastik-Tabelle oder einen Taschenrechner zu Hilfe nehmen und so lange wie möglich exakt rechnen. Die Aufgabenstellung „*Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes an ...*“ verlangt dagegen unter Umständen keine Rechnung, weil sich das Ergebnis eventuell aus der Lösung einer vorangehenden Teilaufgabe unmittelbar ergibt.
- Die Verteilung der zu erzielenden **Bewertungseinheiten** der Themengebiete Analysis und Stochastik im Verhältnis von ca. 2:1 kann als grober Anhaltspunkt für die Aufteilung der zur Verfügung stehenden Arbeitszeit von 60 Minuten im Teil 1 bzw. 120 Minuten im Teil 2 angesehen werden.

6.3 Lösungsplan

Aufgrund des Umfangs und der Komplexität von Aufgaben auf Fachabiturniveau empfiehlt es sich, beim Lösen systematisch zu arbeiten. Folgende Vorgehensweise hilft Ihnen dabei:

Schritt 1:

Nehmen Sie sich ausreichend Zeit zum **Analysieren** der Aufgabenstellung. Stellen Sie fest, zu welchem Themenbereich die Aufgabe gehört. Sammeln Sie alle Informationen, die direkt gegeben sind, und achten Sie darauf, ob eventuell versteckte Informationen enthalten sind.

Schritt 2:

Markieren Sie die **Operatoren** in der Aufgabenstellung. Diese geben an, was in der Aufgabe von Ihnen verlangt wird. Vergewenwärtigen Sie sich die Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe.

Schritt 3:

Versuchen Sie, den Sachverhalt zu **veranschaulichen**. Fertigen Sie gegebenenfalls mithilfe der Angaben und Zwischenergebnisse aus vorherigen Teilaufgaben eine **Skizze** an.

Schritt 4:

Erarbeiten Sie nun schrittweise den **Lösungsplan**, um aus den gegebenen Größen die gesuchte Größe zu erhalten. Notieren Sie sich, welche Einzel- bzw. Zwischenschritte auf dem Lösungsweg notwendig sind. Prinzipiell haben Sie zwei Möglichkeiten, oft hilft auch eine Kombination beider Vorgehensweisen:

- Sie gehen vom Gegebenen aus und versuchen, das Gesuchte zu erschließen.
- Sie gehen vom Gesuchten aus und überlegen „rückwärts“, wie Sie zur Ausgangssituation kommen.

Bei diesem Schritt wird dann sukzessive die **Lösung dargestellt**.

Schritt 5:

Suchen Sie nach geeigneten Möglichkeiten, das Endergebnis zu **kontrollieren**. Oftmals sind bereits Überschlagsrechnungen, Punktproben oder Grobskizzen ausreichend.

Anhand der folgenden **Beispielaufgabe** werden diese Schritte veranschaulicht:

Gegeben ist eine Funktion f durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2$. Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der relativen Extrempunkte von G_f .
- b) Zeigen Sie: $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3$ ist die Gleichung einer Stammfunktion F von f .
Berechnen Sie die Fläche, die G_f mit der x -Achse einschließt.

Lösungsvorschlag für Teilaufgabe a:

Schritt 1:

- Themenbereich: Kurvendiskussion einer ganzrationalen Funktion
- Der Definitionsbereich ist nicht angegeben, daher wird \mathbb{R} als der größtmögliche angenommen.

Schritt 2:

- Der Operator „Bestimmen Sie“ bedeutet, dass die Lösungen durch Berechnungen und durch Überlegungen gefunden werden können.
- Unter Extrempunkten versteht man Hoch- oder Tiefpunkte.

Schritt 3:

Eine Veranschaulichung des Globalverlaufs von G_f ist sinnvoll. Die ganzrationale Funktion f hat den Grad 3 und den negativen Leitkoeffizienten $a_3 = -1$. G_f verläuft somit vom II. Quadranten in den IV. Quadranten. Es ist zusätzlich zu beachten, dass eine ganzrationale Funktion 3. Grades entweder keine oder zwei relative Extremstellen hat. Die Aufgabenstellung impliziert, dass der zweite Fall vorliegt.

Schritt 4:

Ausgehend von der gegebenen Funktion werden mögliche relative Extremstellen berechnet und damit Art und Lage der relativen Extrempunkte bestimmt:

- f ist ein Polynom und lässt sich leicht ableiten (Summenregel, Faktorregel, Potenzregel):

$$f'(x) = -3x^2 + 8x$$

Die Nullstellen der Ableitung sind mögliche relative Extremstellen:

$$-3x^2 + 8x = x \cdot (-3x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{8}{3}$$

- Ob tatsächlich relative Extremstellen vorliegen, lässt sich durch Einsetzen in die zweite Ableitung überprüfen:

$$f''(x) = -6x + 8$$

$$f''(0) = 8 > 0 \Rightarrow \text{relatives Minimum bei } x = 0$$

$$f''\left(\frac{8}{3}\right) = -6 \cdot \frac{8}{3} + 8 = -8 < 0 \Rightarrow \text{relatives Maximum bei } x = \frac{8}{3}$$

- Um die Lage angeben zu können, braucht man noch die y -Koordinate. Dazu werden die relativen Extremstellen in den Funktionsterm f eingesetzt:

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = -\left(\frac{8}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{512}{27} + 4 \cdot \frac{64}{9} = \frac{256}{27}$$

- Ergebnis:

Relativer Tiefpunkt $(0|0)$ und relativer Hochpunkt $\left(\frac{8}{3} \mid \frac{256}{27}\right)$

Schritt 5:

Um das Ergebnis zu überprüfen, kann man G_f skizzieren. Dazu muss eine Wertetabelle erstellt werden. Ablesen der Extrempunkte aus dem Graphen ermöglicht einen Vergleich mit den berechneten Punkten.

Lösungsvorschlag für Teilaufgabe b:

Schritt 1:

- Themenbereich: Flächenberechnung mithilfe des Integrals
- Es sind die Funktion und die Stammfunktion gegeben. Weiter ist implizit gegeben, dass die Funktion mindestens zwei verschiedene Nullstellen hat, weil der Graph eine Fläche mit der x -Achse einschließt.

Schritt 2:

- Der erste Operator ist „Zeigen Sie“. Das bedeutet, dass Sie die Aussage mithilfe von Berechnungen bestätigen sollen. Die Funktion und die zugehörige Stammfunktion sind dabei gegeben.

- Um zu zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist, kann entweder f integriert oder F abgeleitet werden. Es muss dann $F'(x)=f(x)$ gelten. Da das Bilden der Ableitung leichter ist, als die Funktion zu integrieren, bietet es sich hier an, die Stammfunktion abzuleiten.

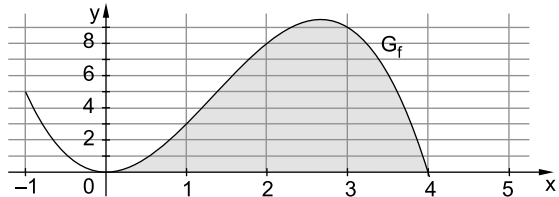
$$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3$$

$$F'(x) = -x^3 + 4x^2 \Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \text{q. e. d.}$$

- Der zweite Operator in der Aufgabe ist „Berechnen Sie“. Das bedeutet, dass Sie das Ergebnis durch Berechnungen erzielen sollen.

Schritt 3:

Nutzen Sie die Lage des Hochpunkts für die Skizze des Graphen.



Schritt 4:

Wie Sie an der Lösungsskizze erkennen, brauchen Sie für die Bestimmung der Fläche die beiden Nullstellen (als Integrationsgrenzen):

$$-x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Für die Berechnung der Fläche benötigen Sie die Stammfunktion der angegebenen Funktion:

$$\int_0^4 f(x) \, dx = [F(x)]_0^4 = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^4 = -\frac{256}{4} + \frac{256}{3} = \frac{256}{12} = \frac{64}{3}$$

Schritt 5:

Um die Fläche abzuschätzen, können Sie in der Skizze die Kästchen abzählen, die von dem Graphen und der x -Achse eingeschlossen werden. Man erhält ca. 21 Kästchen, das passt gut zu dem errechneten Wert.

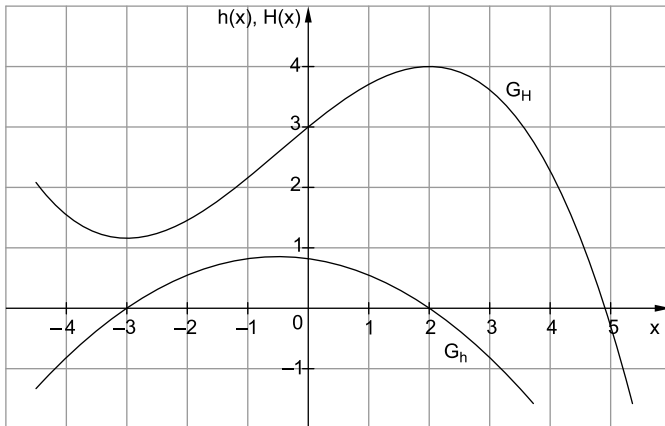
„Ohne Fleiß kein Preis!“

Nach diesem Motto wird Ihre Ausdauer bei der Bearbeitung der Aufgaben mit vielen Punkten bei der Fachabiturprüfung belohnt.

Aufgabenstellung

- BE
- 1.0** Der zum Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems punktsymmetrische Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$ besitzt einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$.
- 1.1** Skizzieren Sie mithilfe der oben genannten Eigenschaften von f einen möglichen Graphen dieser Funktion und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$ an. 3
- 1.2** Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion f' mit Worten. Geben Sie dabei insbesondere die Nullstellen der Funktion f' , die Lage des Extrempunktes und das Symmetrieverhalten des Graphen $G_{f'}$ an. 4
- 2** Lösen Sie die beiden folgenden Gleichungen über der Grundmenge der reellen Zahlen.
- a) $3x^4 - 12x^2 = 0$
- b) $e^{x^2} = e^{2x-1}$ 6
- 3.0** Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto e^{0,25x} - e^{-0,25x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$. Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.
- 3.1** Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g zum Koordinatensystem und geben Sie $\int_{-2}^2 g(x) dx$ an. 3
- 3.2** Ermitteln Sie die Gleichung für die Tangente an den Graphen der Funktion g an der Stelle $x=0$. 3

- 4 In der folgenden Abbildung sind ein Ausschnitt des Graphen der Funktion h und der entsprechende Ausschnitt des Graphen einer Stammfunktion H von h dargestellt. Entnehmen Sie der Abbildung den Wert der Differenz $H(2) - H(0)$ und interpretieren Sie diesen Wert bezüglich des Graphen von h geometrisch.



$\frac{3}{22}$

Teilaufgabe 1.1

Beachten Sie, dass der Graph von f einen lokalen Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$ besitzt, und schließen Sie mit den gegebenen Eigenschaften auf weitere Extrema.

Folgern Sie aus der Lage der Extrempunkte des Graphen von f die Anzahl und die Vielfachheit der Nullstellen von f .

Teilaufgabe 1.2

Die Funktion f ist ungerade und hat den Grad 3.

Schließen Sie daraus auf die gesuchten Eigenschaften der Ableitungsfunktion f' und deren Graphen.

Teilaufgabe 2

- Faktorisieren Sie den Linksterm der Gleichung und wenden Sie die Nullproduktregel an.
- Durch beidseitiges Logarithmieren und Anwendung der Logarithmenregeln ergibt sich eine quadratische Gleichung in x .

Teilaufgabe 3.1

Zeigen Sie, dass $g(-x) = -g(x)$ für alle $x \in D_g$ gilt.

Schließen Sie daraus auf das Symmetrieverhalten des Graphen der Funktion g .

Folgern Sie den Wert des bestimmten Integrals. Denken Sie dabei an die Flächenbilanz, die das Integral angibt.

Teilaufgabe 3.2

Verwenden Sie für die Gleichung der Tangente t im Kurvenpunkt $P(x_0 | g(x_0))$ den Ansatz $t(x) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) + g(x_0)$.

Betrachten Sie die Stelle $x_0 = 0$.

Teilaufgabe 4

Beachten Sie, dass die Differenz $H(2) - H(0)$ dem Wert eines bestimmten Integrals entspricht.

1.1 Eigenschaften aus 1.0:

- (1) f ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades.
- (2) G_f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
- (3) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$
- (4) $x = -2$ ist eine lokale Minimalstelle von f .

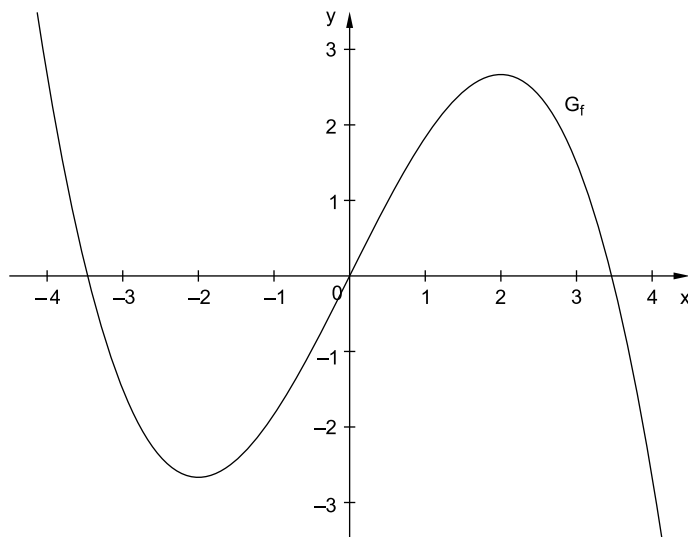
Daraus ergeben sich weitere Eigenschaften:

Aus (2) und (3): $O(0|0) \in G_f$

Aus (2) und (4): $x = 2$ ist eine lokale Maximalstelle von f .

Aus (1), (2), (3) und (4): f besitzt genau drei einfache Nullstellen.

Mögliche Skizze:



Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

- 1.2** Der Graph $G_{f'}$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, die die x -Achse bei $x = -2$ und $x = 2$ schneidet. Die Parabel verläuft achsensymmetrisch zur y -Achse. Ihr Scheitel (Hochpunkt) liegt auf der y -Achse und hat eine positive y -Koordinate.

TIPP Überlegungen zum Verlauf von $G_{f'}$:

- Die Extremstellen von f sind die Nullstellen von f' .
- Die Wendestelle von f ist die Extremstelle von f' .
- Aus der zum Koordinatenursprung punktsymmetrischen ganzrationalen Funktion f wird beim Ableiten eine zur y -Achse achsensymmetrische Funktion. (Begründung: Da f eine ungerade Funktion vom Grad 3 ist, ist f' gerade und vom Grad 2.)
- $G_{f'}$ ist auf $]-\infty; -2]$ und $[2; \infty[$ streng monoton fallend und auf $[-2; 2]$ streng monoton steigend, d. h., es gilt $f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty; -2]$ und $x \in [2; \infty[$ sowie $f'(x) > 0$ für $x \in [-2; 2]$. Somit ist $G_{f'}$ eine nach unten geöffnete Parabel.

2 Grundmenge: $G = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x^4 - 12x^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ 3x^2(x^2 - 4) &= 0 && \text{(Ausklammern von } 3x^2) \end{aligned}$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt (Nullproduktregel) folgt:

$$\begin{aligned} 3x^2 = 0 \vee x^2 - 4 = 0 &\Leftrightarrow \\ x^2 = 0 \vee x^2 = 4 &\Leftrightarrow \\ x = 0 \vee x = -2 \vee x = 2 & \end{aligned}$$

Die Gleichung besitzt die Lösungen $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$.

$$\begin{aligned} \text{b) } e^{x^2} &= e^{2x-1} && \Leftrightarrow \\ \ln(e^{x^2}) &= \ln(e^{2x-1}) && \Leftrightarrow \text{(Beidseitiges Logarithmieren)} \\ x^2 \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} &= (2x-1) \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1} && \Leftrightarrow \text{(Logarithmenregel)} \\ x^2 &= 2x - 1 && \Leftrightarrow \text{(Vereinfachen)} \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 && \Leftrightarrow \text{(Herstellen einer Nullform)} \\ (x-1)^2 &= 0 && \Leftrightarrow \text{(2. binomische Formel)} \\ x - 1 &= 0 && \Leftrightarrow \text{(Nullproduktregel)} \\ x &= 1 && \Leftrightarrow \text{(Auflösen nach } x) \end{aligned}$$

Die Gleichung besitzt die Lösung $x = 1$.

TIPP Links- und Rechtsterm der Gleichung in Teilaufgabe b sind jeweils Potenzen mit gleicher Basis. Somit läuft das beidseitige Logarithmieren der Gleichung einfach auf das Gleichsetzen der Exponenten hinaus (alternative Lösung).



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK