2024 Training

Abschlussprüfung

MEHR ERFAHREN

Realschule Bayern

Mathematik I

+ *Basiswissen mit Übungen*
+ *Aufgaben im Stil der Prüfung*

STARK

Inhalt

Aufgaben im Stil der Prüfung

Original-Abschlussprüfung

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Mit dem **Interaktiven Training** kannst du online mit zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Autoren: Markus Hochholzer, Markus Schmidl

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung in Mathematik vorbereiten. Das Buch ist so konzipiert, dass es sich zudem bereits ab Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Schulaufgaben eignet.

Mit dem Buch erhältst du:

- **Grundwissen 9. und 10. Klasse**
  In diesen Kapiteln wird der prüfungsrelevante Stoff der 9. und der 10. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Zu jedem Themenbereich findest du zudem vielfältige Aufgaben. Diese eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. bzw. 10. Klasse als auch zur Vorbereitung auf die Abschlussprüfung.
  Die Aufgaben mit einem durchgestrichenen Taschenrechnersymbol eignen sich auch zur Bearbeitung ohne Taschenrechner.
  
- **Aufgaben im Stil der neuen Prüfung ab 2023**
  Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bepunktet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.
- **Original-Abschlussprüfung 2023**
  Die Abschlussprüfung dient dazu, unter Prüfungsbedingungen anhand einer echten Abschlussprüfung zu üben. Versuche, die Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

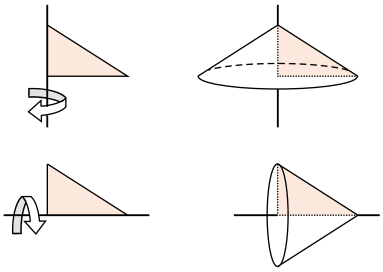
Zu allen Aufgaben der einzelnen Kapitel gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Lösungsbuch (Bestell-Nr. D0910TL)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden, und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen!
Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Viel Erfolg in der Prüfung!

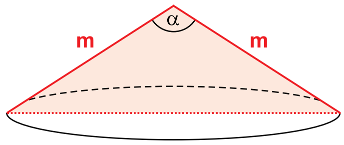
Markus Hochholzer Markus Schmidl

Kegel

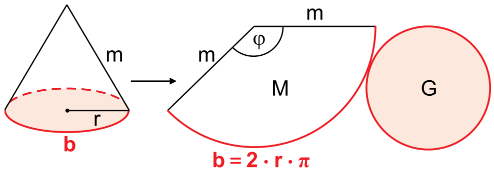
Ein **Kegel** (genauer: Kreiskegel) entsteht, wenn ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner beiden Katheten rotiert.



Der Axialschnitt eines Kegels ist ein gleichschenkliges Dreieck. Dessen gleich lange Schenkel werden als **Mantellinien m** bezeichnet. Sie schließen den sogenannten **Öffnungswinkel α** an der Spitze des Kegels ein.



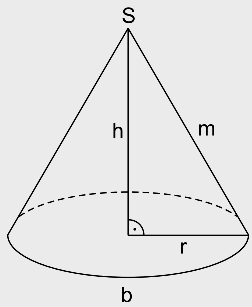
Die Abwicklung der Mantelfläche eines Kreiskegels ist ein **Kreissektor** mit **Mittelpunktswinkel φ**. Der Radius dieses Sektors ist die Mantellinie m des Kegels. Die Länge des Kreisbogens b entspricht dem Umfang u des Grundkreises. Die Mantelfläche M des Kegels entspricht der Fläche des Kreissektors.



Merke

Eigenschaften von Kegeln

- Die Höhe h eines Kegels ist der Abstand der Spitze S von der Grundfläche.
- Die Abwicklung der **Mantelfläche M** ist ein Kreissektor.
- Die **Oberfläche O** besteht aus der Mantelfläche und dem Grundkreis.



Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

Mantelfläche: $A_M = \frac{1}{2} \cdot b \cdot m$ oder: $A_M = \frac{\varphi}{360°} \cdot m^2 \cdot \pi$

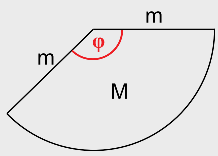
$A_M = r \cdot \pi \cdot m$

Oberfläche: $A_O = A_M + A_G$

$A_O = r \cdot \pi \cdot (m + r)$

Mittelpunktswinkel φ der Abwicklung der Mantelfläche:

$\varphi = \frac{r}{m} \cdot 360°$



Beispiel

Berechne das Volumen, die Mantelfläche und den Mittelpunktswinkel φ der abgewickelten Mantelfläche für einen Kegel mit den Maßen r = 5 cm und h = 8 cm.

Lösung:

Berechnung des Volumens:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (5\text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 8\text{ cm}$$

$$V = 209{,}44\text{ cm}^3$$

Berechnung der Mantelfläche:

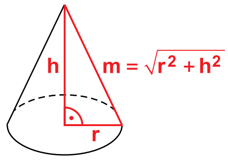
$$A_M = r \cdot \pi \cdot m$$

$$A_M = 5\text{ cm} \cdot \pi \cdot \sqrt{(5\text{ cm})^2 + (8\text{ cm})^2}$$

$$A_M = 5 \cdot \pi \cdot 9{,}43\text{ cm}^2$$

$$A_M = 148{,}13\text{ cm}^2$$

Berechnung der Mantellinie m mit dem Satz des Pythagoras



Berechnung des Mittelpunktswinkels:

$$A_M = \frac{\varphi}{360°} \cdot m^2 \cdot \pi \quad \left| \cdot \frac{360°}{m^2 \cdot \pi} \right.$$

$$\varphi = \frac{M \cdot 360°}{m^2 \cdot \pi}$$

$$\varphi = \frac{148{,}13\text{ cm}^2 \cdot 360°}{(9{,}43\text{ cm})^2 \cdot \pi}$$

$$\varphi = 190{,}89°$$

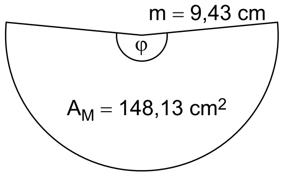
oder:

$$\varphi = \frac{r}{m} \cdot 360°$$

$$\varphi = \frac{5\text{ cm}}{9{,}43\text{ cm}} \cdot 360°$$

$$\varphi = 190{,}88°$$

Abwicklung der Mantelfläche:



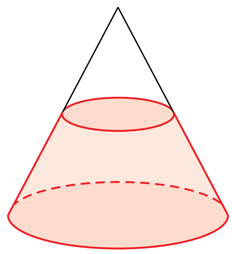
Aufgaben

95 Ein Kegel hat die Mantellinie m = 5 cm und den Radius r = 2,5 cm.

a) Zeige, dass die Abwicklung der Mantelfläche ein Halbkreis ist.

b) Zeige allgemein, dass die Mantelfläche immer ein Halbkreis ist, wenn der Axialschnitt ein gleichseitiges Dreieck ergibt.

96 Ein Kegel mit Radius r = 5 cm und Höhe h = 8 cm wird von einer zur Grundfläche parallelen Ebene in einem Abstand von 3 cm geschnitten. Dabei entsteht ein 3 cm hoher Kegelstumpf.
Berechne Volumen und Mantelfläche des entstandenen Kegelstumpfes.



Tipp Differenz zweier Kegel

Funktionale Abhängigkeiten und Extremwertberechnungen – Schnitt durch einen Kegel

Beispiel

Ein Kegel hat einen Radius von 3 cm und eine Höhe von 12 cm. Dieser Kegel wird durch eine zur Grundfläche parallele Ebene in einem Abstand von x cm zum Mittelpunkt M der Grundfläche geschnitten. Die Schnittfläche ist ein Kreis mit Radius r_K. Mit der Spitze S bildet dieser Kreis wieder neue Kegel mit dem Axialschnitt A_nB_nS.

a) Zeichne den Axialschnitt A_1B_1S des Kegels für $x = 5$ cm.

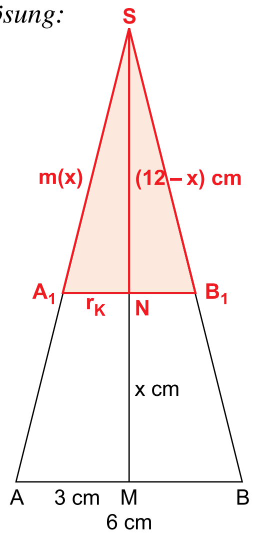
b) Berechne den Radius r_K der abgeschnittenen Kegel in Abhängigkeit von x.

c) Berechne die Mantelfläche der abgeschnittenen Kegel in Abhängigkeit von x.

d) Berechne den x-Wert, für den die Mantelfläche des abgeschnittenen Kegels 2π cm^2 beträgt.

Lösung:

a)



(Zeichnung im Maßstab 1 : 2)

b) Strahlensatz mit Zentrum S:

$$\frac{r_K}{|\overline{AM}|} = \frac{|\overline{SN}|}{|\overline{SM}|} \qquad |\cdot|\overline{AM}|$$

$$r_K = \frac{|\overline{SN}|}{|\overline{SM}|} \cdot |\overline{AM}|$$

$$r_K(x) = \frac{(12 - x)\text{ cm}}{12\text{ cm}} \cdot 3\text{ cm}$$

$$r_K(x) = \frac{(12 - x)}{4}\text{ cm}$$

$$r_K(x) = \left(3 - \frac{1}{4}x\right)\text{ cm}$$

c) Bestimme zunächst die Mantellinie $|\overline{SA_n}| = m(x)$.
Strahlensatz mit Zentrum S:

$$\frac{m}{|\overline{SA}|} = \frac{|\overline{SN}|}{|\overline{SM}|} \qquad |\cdot|\overline{SA}|$$

$$m = \frac{|\overline{SN}|}{|\overline{SM}|} \cdot |\overline{SA}|$$

$$m(x) = \frac{(12 - x)\text{ cm}}{12\text{ cm}} \cdot |\overline{SA}|$$

Bestimme $|\overline{SA}|$ im rechtwinkligen Dreieck AMS.

$$m(x) = \frac{12-x}{12} \cdot \sqrt{|\overline{AM}|^2 + |\overline{MS}|^2}$$

$$m(x) = \left(1 - \frac{1}{12}x\right) \cdot \sqrt{3^2 + 12^2}\ \text{cm}$$

$$m(x) = (12{,}37 - 1{,}03x)\ \text{cm}$$

Mantelfläche der abgeschnittenen Kegel:

$$A_M = r_K(x) \cdot \pi \cdot m(x)$$

$$A_M(x) = \left(3 - \frac{1}{4}x\right) \cdot \pi \cdot (12{,}37 - 1{,}03x)\ \text{cm}^2$$

$$A_M(x) = (37{,}11 - 3{,}09x - 3{,}09x + 0{,}26x^2) \cdot \pi\ \text{cm}^2$$

$$A_M(x) = (0{,}26x^2 - 6{,}18x + 37{,}11) \cdot \pi\ \text{cm}^2$$

d) $\begin{array}{|ll} & A_M(x) = (0{,}26x^2 - 6{,}18x + 37{,}11) \cdot \pi\ \text{cm}^2 \\ \wedge & A_M = 2\pi\ \text{cm}^2 \\ \hline \end{array}$

$\Rightarrow\ (0{,}26x^2 - 6{,}18x + 37{,}11) \cdot \pi = 2\pi \quad (\text{I} = \text{II}) \quad |:\pi$ — π lässt sich durch Division beseitigen.

$\Leftrightarrow\ 0{,}26x^2 - 6{,}18x + 37{,}11 = 2 \quad |-2$

$\Leftrightarrow\ 0{,}26x^2 - 6{,}18x + 35{,}11 = 0$ — Allgemeine Form der quadratischen Gleichung

$D = (-6{,}18)^2 - 4 \cdot 0{,}26 \cdot 35{,}11 = 1{,}678$ — Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

$\Leftrightarrow\ x_{1/2} = \dfrac{6{,}18 \pm \sqrt{1{,}678}}{2 \cdot 0{,}26}$

$(x_1 = 14{,}38) \ \vee\ x_2 = 9{,}39$

x_1 ist keine Lösung, da der Kegel nur 12 cm hoch ist und er daher im Abstand von 14,38 cm von der Grundfläche nicht von einer Ebene geschnitten werden kann.

$L = \{9{,}39\}$

Für $x = 9{,}39$ beträgt die Mantelfläche $2\pi\ \text{cm}^2$.

Aufgaben

97 a – d

Einem Kegel mit Radius 4 cm und Höhe 10 cm sind Zylinder mit Radius x cm einbeschrieben.

a) Zeichne den Axialschnitt des Kegels und des einbeschriebenen Zylinders für $x = 2$ ein.
b) Berechne die Höhe der Zylinder in Abhängigkeit von x.
c) Berechne die Mantelfläche der Zylinder in Abhängigkeit von x.
d) Berechne den x-Wert, für den der Zylinder mit der größten Mantelfläche entsteht.
e) Prüfe rechnerisch, ob es einen Zylinder gibt, dessen Mantelfläche halb so groß ist wie die Mantelfläche des Kegels.

98 a – c

Ein Kegel hat eine Höhe von 10 cm. Der Radius beträgt 2 cm. Die Höhe wird um x cm verkürzt und der Radius um x cm verlängert.

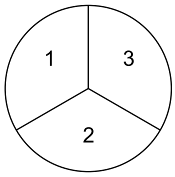
a) Zeichne den Axialschnitt ABS des Kegels und den Axialschnitt $A_1B_1S_1$ des veränderten Kegels für $x = 2$.
b) Berechne die Länge der Mantellinie m der veränderten Kegel mit Axialschnitt $A_nB_nS_n$ in Abhängigkeit von x.
c) Berechne, für welchen x-Wert man die kürzeste Mantellinie erhält.
d) Berechne, für welchen x-Wert die Mantellinie 9 cm lang ist.

Musterprüfung
Bayern – Realschule – Mathematik I

Teil A – ohne Taschenrechner

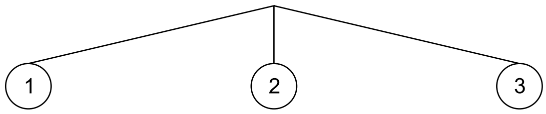
Aufgabe A 1

A 1.0 Ein Glücksrad besteht aus drei kongruenten Sektoren, die mit den Zahlen von 1 bis 3 beschriftet sind. Es wird dreimal am Glücksrad gedreht.



1 Punkt A 1.1 Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass genau dreimal die Zahl 1 gedreht wird.

2 Punkte A 1.2 Ergänzen Sie das Baumdiagramm mit allen Pfaden, die sich von der Zahl 2 aus ergeben.



2 Punkte A 1.3 Man erhält einen Gewinn, wenn man bei den drei Drehungen Zahlen erhält, deren Summenwert genau 8 ist.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man diesen Gewinn erhält.

Aufgabe A 2

A 2.0 Gegeben sind Fünfecke $A_nB_nSD_nE_n$ mit $\overline{A_nE_n} \parallel \overline{B_nS}$. Der Punkt C ist der Fußpunkt der Lote von den Punkten D_n auf die Strecken $\overline{B_nS}$.

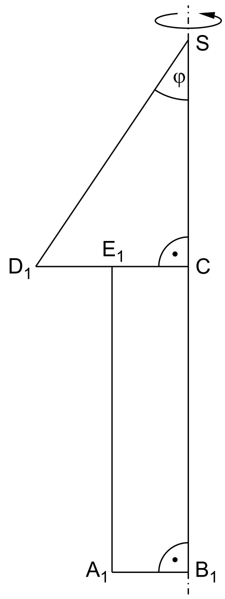
Die Punkte E_n sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{CD_n}$.

Die Winkel D_nSC haben das Maß φ mit $\varphi \in \,]0°; 90°[$.

Es gilt:

$\left|\overline{CS}\right| = 3\text{ cm}$; $\left|\overline{CB_n}\right| = 2 \cdot \left|\overline{CD_n}\right|$; $\sphericalangle CB_nA_n = 90°$.

Die Zeichnung zeigt das Fünfeck $A_1B_1SD_1E_1$ für $\varphi = 34°$.



1 Punkt A 2.1 Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $\overline{CD_n}$ in Abhängigkeit von φ gilt:

$\left|\overline{CD_n}\right|(\varphi) = 3 \cdot \tan\varphi\text{ cm}$.

3 Punkte A 2.2 Die Fünfecke $A_nB_nSD_nE_n$ rotieren um die Achse B_nS.

Berechnen Sie das Volumen V der entstehenden Rotationskörper in Abhängigkeit von φ.

Aufgabe A 3

2 Punkte

A 3.0 Die nebenstehende Skizze zeigt das rechtwinklige Dreieck WKR.

Es gilt:
$|\overline{KR}| = 134$ km;
$\sphericalangle WRK = 60°$;
$\sphericalangle RKW = 90°$.

Die Luftlinie
Würzburg (W) – Rosenheim (R)
wird durch die Strecke $\overline{WR}$ dargestellt.

Berechnen Sie deren Länge.