

# 2024 Training

Abschlussprüfung

**MEHR  
ERFAHREN**

Realschule Bayern

**Mathematik II/III**

- + Basiswissen mit Übungen
- + Aufgaben im Stil der Prüfung

**STARK**

# Inhalt

Vorwort  
Hinweise zur Prüfung  
Hinweise des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus

## Training Grundwissen

---

<b>1</b>	<b>Grundwissen 9. Klasse</b>	
1.1	Lineare Funktionen .....	1
	Direkte Proportionalität .....	1
	Ursprungsgeraden: $y = m \cdot x$ .....	2
	Zeichnen von Ursprungsgeraden .....	3
	Geraden in beliebiger Lage – Die Normalform: $y = mx + t$ .....	4
	Berechnung der Geradengleichung mithilfe zweier Punkte .....	5
	Zeichnen von Geraden .....	6
	Parallele und orthogonale Geraden .....	8
1.2	Lineare Gleichungssysteme .....	10
	Grafisches Lösungsverfahren .....	10
	Rechnerische Lösungsverfahren .....	12
1.3	Reelle Zahlen .....	15
	Die Quadratwurzel .....	15
	Irrationale Zahlen .....	15
	Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ .....	16
	Rechnen mit Wurzeltermen .....	16
1.4	Flächeninhalt ebener Figuren .....	20
	Dreiecke .....	20
	Vierecke .....	22
	Flächenberechnung mithilfe von Vektoren im Koordinatensystem .....	24
	Funktionale Abhängigkeiten – Veränderung von ebenen Figuren .....	26
1.5	Strahlensätze .....	32
1.6	Rechtwinklige Dreiecke .....	36
	Der Satz des Pythagoras .....	36
	Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras .....	38
	Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck .....	40
1.7	Berechnungen am Kreis .....	44
	Flächeninhalt und Umfang eines Kreises .....	44
	Kreisteile – Kreissektor und Kreisbogen .....	45
	Das Kreissegment .....	47
1.8	Grundbegriffe der Statistik .....	48
	Spannweite, Modalwert, arithmetisches Mittel, Zentralwert .....	48
	Kombinatorik – Anzahl der Möglichkeiten .....	50
	Vertauschungen – Permutationen .....	50
	Absolute und relative Häufigkeit .....	51

1.9	Zufallsexperimente .....	52
	Absolute und relative Häufigkeit bei Zufallsexperimenten .....	53
	Ergebnis und Ergebnisraum .....	53
	Ereignis und Gegenereignis .....	54
	Vierfeldertafel .....	55
	Laplace-Experimente und Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten .....	57
	Wahrscheinlichkeit von Ereignis und Gegenereignis .....	59
	Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten .....	60
<b>2</b>	<b>Grundwissen 10. Klasse</b>	
2.1	Quadratische Funktionen .....	63
	Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$ .....	63
	Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^2$ .....	63
	Die Scheitelform: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ .....	65
	Von der Scheitelform zur allgemeinen Form .....	66
	Von der allgemeinen Form zur Scheitelform .....	67
	Berechnen von Parabelgleichungen .....	67
	Extremwerte .....	69
2.2	Quadratische Gleichungen .....	72
	Diskriminante und Lösungsformel .....	74
	Nullstellen von Parabeln .....	76
	Schnitt von Parabel und Gerade .....	77
	Schnitt von Parabel mit Parabel – System quadratischer Gleichungen .....	79
2.3	Exponentialfunktionen und Logarithmen .....	84
	Exponentialfunktionen .....	84
	Der Logarithmus .....	87
	Der dekadische Logarithmus .....	88
	Logarithmen mit beliebiger Basis .....	88
	Exponentialgleichungen .....	89
	Vermischte Aufgaben .....	90
2.4	Trigonometrie .....	92
	Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis .....	92
	Steigungswinkel einer Geraden .....	94
	Flächeninhalt eines Dreiecks .....	94
	Sinussatz und Kosinussatz .....	95
2.5	Raumgeometrie .....	100
	Zeichnen von Schrägbildern .....	100
	Prisma .....	102
	Pyramide .....	105
	Zylinder .....	112
	Kegel .....	114
	Kugel .....	119
2.6	Pfadregeln in Baumdiagrammen .....	123
	Pfad-Multiplikationsregel .....	123
	Pfad-Additionsregel .....	124
	Gleichungen erstellen mithilfe von Baumdiagrammen .....	127

## Aufgaben im Stil der Prüfung

---

### Beispielaufgaben

Teil A – ohne Taschenrechner .....	B-1
Teil B – mit Taschenrechner .....	B-2

### Musterprüfung

Teil A – ohne Taschenrechner .....	M-1
Teil B – mit Taschenrechner .....	M-4

## Original-Abschlussprüfung

**Abschlussprüfung 2023** ..... [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark)

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscod vgl. Umschlaginnenseite).



Mit dem **Interaktiven Training** kannst du online mit zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren (Zugangscod vgl. Umschlaginnenseite).

# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung in Mathematik vorbereiten. Das Buch ist so konzipiert, dass es sich zudem bereits ab Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Schulaufgaben eignet.

Mit dem Buch erhältst du:

► **Grundwissen 9. und 10. Klasse**

In diesen Kapiteln wird der prüfungsrelevante Stoff der 9. und der 10. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Zu jedem Themenbereich findest du zudem vielfältige Aufgaben. Diese eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. bzw. 10. Klasse als auch zur Vorbereitung auf die Abschlussprüfung.

Die Aufgaben mit einem durchgestrichenen Taschenrechnersymbol eignen sich auch zur Bearbeitung ohne Taschenrechner.



► **Aufgaben im Stil der neuen Prüfung ab 2023**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bepunktet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.

► **Original-Abschlussprüfung 2023**

Die Abschlussprüfung dient dazu, unter Prüfungsbedingungen anhand einer echten Abschlussprüfung zu üben. Versuche, die Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

Zu allen Aufgaben der einzelnen Kapitel gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Lösungsbuch (Bestell-Nr. D0910NL)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden, und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen!

Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Viel Erfolg in der Prüfung!

Markus Hochholzer

Markus Schmidl



## Funktionale Abhängigkeiten – Veränderung von ebenen Figuren

### Merke

Befindet sich ein Punkt auf einer Ortslinie (z. B. einer Geraden), so sind seine Koordinaten **durch die Funktionsgleichung** der Ortslinie festgelegt.

### Beispiel

Die Punkte  $C_n$  liegen auf der Geraden  $g: y = 2x + 1$ .

Die Koordinaten aller Punkte  $C_n$  auf der Geraden  $g$  lassen sich angeben:  $C_n(x | 2x + 1)$

Der Index  $n$  besagt, dass es unendlich viele solcher Punkte gibt.

Mithilfe dieser allgemeinen Koordinaten der Punkte  $C_n$  lassen sich Veränderungen von Flächeninhalten, Streckenlängen usw. in Abhängigkeit von der Lage der Punkte  $C_n$  berechnen.

### Flächenberechnung im Koordinatensystem mit Determinante

### Beispiel

Gegeben sind die Punkte  $A(2 | 1)$  und  $B(5 | -1)$  sowie die Gerade  $g: y = 0,5x + 2$ .

$A$  und  $B$  sind Eckpunkte von Dreiecken  $ABC_n$ , wobei die Punkte  $C_n$  auf der Geraden  $g$  liegen.

- Zeichne die Gerade  $g$  und das Dreieck  $ABC_1$  mit  $C_1(3 | ?)$  sowie das Dreieck  $ABC_2$  für  $C_2(6 | ?)$ .
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC_1$ .
- Stelle den Flächeninhalt der Dreiecke  $ABC_n$  in Abhängigkeit der  $x$ -Koordinate (Abszisse) des Punktes  $C_n$  dar.
- Berechne die Koordinaten des Eckpunktes  $C_3$  des Dreiecks  $ABC_3$  mit Flächeninhalt 8,25 FE.
- Bestimme, für welche  $x$ -Koordinaten Dreiecke  $ABC_n$  entstehen.

*Lösung:*

- Zeichnen der Geraden  $g$
  - Einzeichnen des Punktes  $C_1$  mit  $x$ -Koordinate 3 auf der Geraden  $g$
  - Zeichnen des Dreiecks  $ABC_1$
  - Gleiches Verfahren für das Dreieck  $ABC_2$

- Koordinaten von  $C_1$ :

$$C_1(3 | ?) \in g: y = 0,5 \cdot 3 + 2$$

$$\Leftrightarrow y = 3,5$$

$$C_1(3 | 3,5)$$

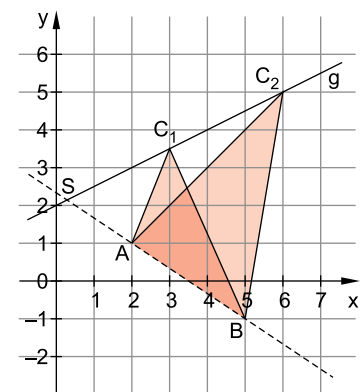
Aufspannende Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3,5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Flächeninhalt mit Determinante:

$$A_{\Delta ABC_1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2,5 \end{vmatrix} \text{ FE} = \frac{1}{2} \cdot [3 \cdot 2,5 - (-2) \cdot 1] \text{ FE} = 4,75 \text{ FE}$$



c) Die Punkte  $C_n$  auf der Geraden  $g$  besitzen folgende Koordinaten in Abhängigkeit von  $x$ :

$$g: y = 0,5x + 2 \Rightarrow C_n(x | 0,5x + 2)$$

Die y-Koordinate der Punkte  $C_n$  ist festgelegt durch die Geradengleichung  $g: y = 0,5x + 2$ .

Aufspannende Vektoren:

Man rechnet wie in Teilaufgabe b.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC_n} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ 0,5x + 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ 0,5x + 1 \end{pmatrix}$$

„Spitze minus Fuß“ mit  $C_n(x | 0,5x + 2)$   
Anstelle der speziellen Koordinaten eines Punktes  $C$  verwendet man die allgemeinen Koordinaten der Punkte  $C_n$ .

Flächeninhalt in Abhängigkeit von  $x$  mit Determinante:

$$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & x - 2 \\ -2 & 0,5x + 1 \end{vmatrix} \text{ FE}$$

$$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot [3 \cdot (0,5x + 1) - (-2) \cdot (x - 2)] \text{ FE}$$

Vorzeichen beim Ausmultiplizieren beachten

$$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot [1,5x + 3 + 2x - 4] \text{ FE}$$

Umkehrung der Vorzeichen

$$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot (3,5x - 1) \text{ FE}$$

d) 
$$\begin{cases} A(x) = \frac{1}{2} \cdot (3,5x - 1) \text{ FE} \\ \wedge A(x) = 8,25 \text{ FE} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (3,5x - 1) = 8,25 \quad (I = II) \quad | \cdot 2 \quad \text{Auflösen nach } x$$

$$\Leftrightarrow 3,5x - 1 = 16,5 \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow 3,5x = 17,5 \quad | : 3,5$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad \text{Die x-Koordinate des Punktes } C_3 \text{ ist } 5.$$

$$L = \{5\}$$

$$C_n(x | 0,5x + 2) \quad x = 5 \text{ einsetzen}$$

$$C_3(5 | 0,5 \cdot 5 + 2)$$

$$C_3(5 | 4,5)$$

e) Der Punkt  $C_n$  darf nur bis zum Schnittpunkt  $S$  wandern, denn links von  $S$  ändert sich der Umlaufsinn der Dreiecke in  $AC_nB$ . Fällt der Punkt  $C_n$  auf den Punkt  $S$ , so entsteht kein Dreieck, sondern eine Strecke.

Die x-Koordinate des Punktes  $S$  lässt sich aus dem Term für den Flächeninhalt

$$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot (3,5x - 1) \text{ FE berechnen:}$$

$$A_{\Delta ABC_n}(x) = \frac{1}{2} \cdot (3,5x - 1) \text{ FE}$$

↓

Wandert der Punkt  $C_n$  in Richtung  $S$ , wird der Flächeninhalt der Dreiecke immer kleiner. Für  $C_n = S$  ist der Flächeninhalt schließlich gleich 0.

Setze: 
$$0 = \frac{1}{2} \cdot (3,5x - 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$$

Die x-Koordinate des Punktes  $S$  ist  $\frac{2}{7}$ .

$$L = \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

Zulässige x-Werte für Dreiecke  $ABC_n$ :  $x > \frac{2}{7}$  Für x-Werte rechts von  $S$  entstehen Dreiecke  $ABC_n$ .



## Aufgaben



37

Die Eckpunkte  $D_n$  von Parallelogrammen  $ABC_nD_n$  mit  $A(1|1)$  und  $B(4|0)$  liegen auf der Geraden  $g: y = x + 3$ .

- Zeichne das Parallelogramm  $ABC_1D_1$  für  $D_1(2|?)$  und das Parallelogramm  $ABC_2D_2$  für  $D_2(3|?)$  und berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms  $ABC_1D_1$ .
- Berechne den Flächeninhalt der Parallelogramme in Abhängigkeit von der x-Koordinate der Punkte  $D_n$ .
- Berechne die Koordinaten des Punktes  $D_3$ , sodass ein Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 10 FE entsteht.
- Bestimme, für welche x-Werte Parallelogramme  $ABC_nD_n$  existieren.



38

Die Punkte  $A(1|1)$  und  $B_n(x|x+2)$  sind Eckpunkte von Dreiecken  $AB_nC_n$ , wobei

$$\overline{B_nC_n} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Zeichne die Dreiecke  $AB_1C_1$  für  $x=3$  und  $AB_2C_2$  für  $x=5$  ein.
- Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke  $AB_nC_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte  $B_n$ .
- Bestimme, für welchen x-Wert man ein Dreieck mit 4 FE Flächeninhalt erhält.
- Schwer:** Bestimme, für welche x-Werte Dreiecke  $AB_nC_n$  existieren. Löse zeichnerisch und rechnerisch.



39

Die Punkte  $A(3|4)$ ,  $C(1|0)$  und  $B_n(x|-x+1)$  legen Drachenvierecke  $AB_nCD_n$  mit Symmetrieachse AC fest.

- Zeichne das Drachenviereck  $AB_1CD_1$  für  $x=-1$  und das Drachenviereck  $AB_2CD_2$  für  $x=-2$  ein.
- Berechne den Flächeninhalt des Drachenvierecks  $AB_1CD_1$ .
- Berechne den Flächeninhalt in Abhängigkeit von x.
- Berechne die Koordinaten von  $B_3$  für das Drachenviereck  $AB_3CD_3$  mit einem Flächeninhalt von 10 FE.

## Flächenberechnung im Koordinatensystem ohne Determinante

## Merke

Besitzen zwei Punkte A und B **dieselbe Abszisse x**, so lässt sich die Länge der Strecke  $\overline{AB}$  als Differenz der y-Koordinaten der beiden Punkte berechnen:

$$|\overline{AB}| = (y_A - y_B) \text{ LE}$$

(wobei  $y_A > y_B$  gelten muss, also A über B liegen muss, da man sonst eine negative Streckenlänge erhalten würde)

## Beispiel

Die Dreiecke  $A_nB_nC_n$  sind folgendermaßen festgelegt:

Die Punkte  $A_n$  liegen auf der Geraden  $g: y = 0,25x + 4$ , die Punkte  $B_n$  auf der Geraden  $k: y = -0,5x + 1$ .

Die Punkte  $A_n$  und  $B_n$  besitzen die gleiche Abszisse x (wobei  $x > -4$ ) und  $\overline{B_nC_n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- Zeichne die Geraden g und k und die Dreiecke  $A_1B_1C_1$  für  $x=0$  und  $A_2B_2C_2$  für  $x=3,5$ .
- Berechne den Flächeninhalt der Dreiecke  $A_nB_nC_n$  in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte  $A_n$  mithilfe der Formel  $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ .



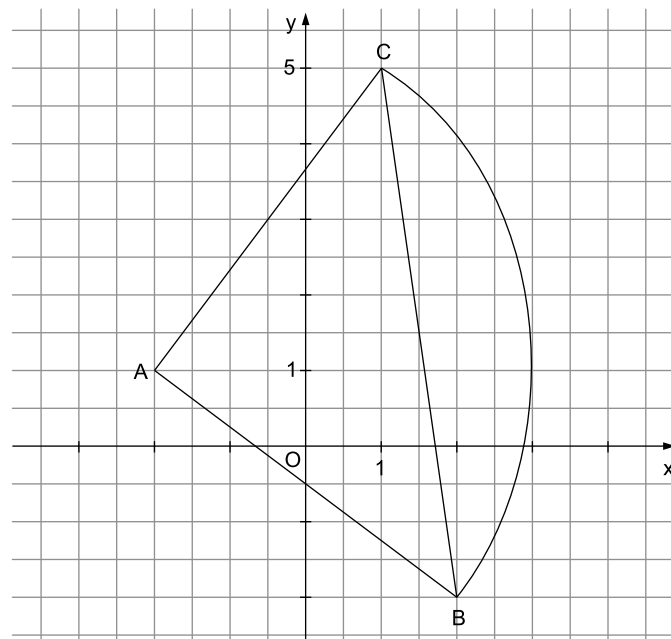
**Musterprüfung**  
**Bayern – Realschule – Mathematik II/III**

## Teil A – ohne Taschenrechner

### Aufgabe A 1

A 1.0 Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC.

Es gilt:  $A(-2|1)$ ;  $B(2|-2)$ ;  $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .



2 Punkte

A 1.1 Begründen Sie rechnerisch, weshalb das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

2 Punkte

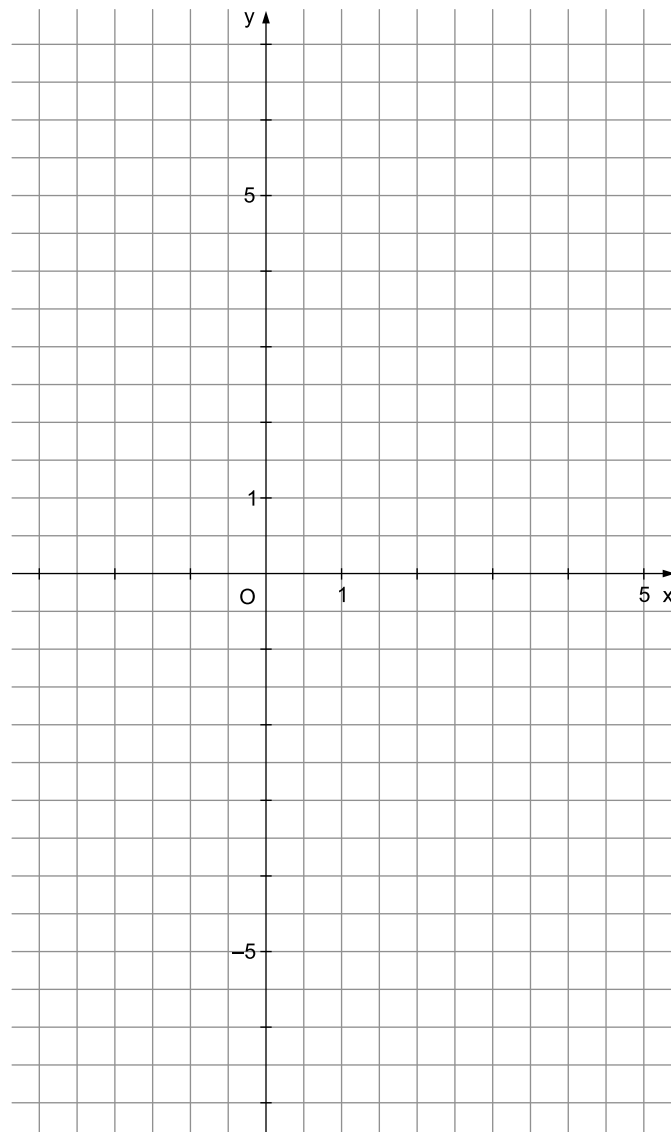
A 1.2 Der Kreis um A mit dem Radius 5 LE schneidet die Strecke  $\overline{BC}$  in den Punkten B und C.

Berechnen Sie den Flächeninhalt  $A_{\text{Segment}}$  des Kreissegments, das durch die Strecke BC und den Kreisbogen BC begrenzt wird. Geben Sie das exakte Ergebnis an.

**Aufgabe A 2**

1,5 Punkte

A 2 Zeichnen Sie die Parabel  $p$  mit der Gleichung  $y = -0,5 \cdot (x - 1)^2 + 2$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) für  $x \in [-3; 5]$  in das Koordinatensystem ein.

**Aufgabe A 3**

2 Punkte

A 3 Ermitteln Sie rechnerisch die Lösung der Gleichung  $0,5x^2 + 18 = 6x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

**STARK**