2024

Realschule

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Bayern

Mathematik I

+ Offizielle Musteraufgaben

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Hinweise

Übungsaufgaben

Teil A – ohne Taschenrechner

Teil B – mit Taschenrechner

Aufgaben im Stil der Prüfung

Beispielaufgaben

Abschlussprüfungsaufgaben

Abschlussprüfung 2023 . . . . **www.stark-verlag.de/mystark**
Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Digitales Übungsmaterial zu diesem Buch

Zu den folgenden Themen bietet dir das Buch **Lernvideos** und **GeoGebra-Anwendungen**:

- Dreisatz
- Winkel an Geradenkreuzungen und Winkelsummen
- Strahlensätze
- Lineare Funktionen (Geraden)
- Verschobene Normalparabel
- Gestreckte/Gestauchte Parabel
- Bestimmung von Nullstellen bei quadratischen Funktionen
- Baumdiagramm

Mit einem **Smartphone/Tablet** kannst du den abgebildeten **QR-Code** scannen und so die Lernvideos starten.

Am PC kannst du die Lernvideos über folgenden Link öffnen:

https://www.stark-verlag.de/qrcode/lernvideos_0910nk

Autor

Übungsaufgaben (inkl. Lösungen) sowie Lösungen der Beispielaufgaben, Musterprüfung und der Abschlussprüfungsaufgaben: RSD Alois Einhauser

Daten und Zufall

1.0 Amira, Karl und Stefan besitzen baugleiche Zahlenschlösser. Ein Zahlenschloss besteht aus vier Ringen, auf denen jeweils die Ziffern von 1 bis 6 stehen.

1.1 Bestimmen Sie, wie viele verschiedene Zahlenkombinationen bei einem solchen Zahlenschloss insgesamt möglich sind.

1.2 In Amiras Kombination sind die Ziffern alle verschieden.

Bestimmen Sie, wie viele verschiedene Zahlenkombinationen dafür infrage kommen.

1.3 Karl erinnert sich, dass seine Kombination vorwärts und rückwärts gelesen gleich war (z. B. 1661).

Bestimmen Sie, wie viele mögliche Kombinationen es dafür gibt.

1.4 Stefan behauptet, dass in seiner Kombination nur die Ziffern 3 und 5 vorkommen.

Bestimmen Sie, wie viele verschiedene Kombinationen hierfür möglich sind.

2 Zur Darstellung eines Bits benutzt man die Ziffern 1 oder 0. Ein Byte besteht aus acht Bit, also z. B. „0110 1001“.

Bestimmen Sie, wie viele Kombinationen man mit einem Byte darstellen kann.

3.1 Ermitteln Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Buchstaben von „WORT“ unterschiedlich anzuordnen.

3.2 Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Buchstaben von „PAPA“ unterschiedlich anzuordnen.

Geben Sie alle Möglichkeiten in einem Baumdiagramm an.

3.3 Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten es gibt, die Buchstaben von „HALLO“ unterschiedlich anzuordnen.

4.0 Das lateinische Alphabet besteht aus insgesamt 26 Buchstaben. Es sollen zweisilbige „Wörter“ aus je genau einem Vokal (V) und genau einem Konsonanten (K) gebildet werden. Dabei sollen nur folgende Anordnungen erlaubt sein:
KVKV, VKVK und VKKV

4.1 Der Vokal ist ein E und der Konsonant ein L.

Geben Sie alle erlaubten „Wörter“ an.

4.2 Ermitteln Sie, wie viele mögliche „Wörter“ es ohne die Einschränkung aus Teilaufgabe 4.1 insgesamt gibt.

5 Bei einer Verlosung wird mit dem Slogan „Jedes zweite Los gewinnt“ geworben.

Kreuzen Sie die Aussagen an, die gleichbedeutend sind.

- ☐ Die Gewinnchance ist fifty-fifty.
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beträgt 50 %.
- ☐ Das Verhältnis von Gewinnlosen zu Nieten ist 1 : 1.
- ☐ Die Gewinnchance ist $\frac{1}{3}$.

6 Bei einer Verlosung wird mit dem Slogan „Jedes fünfte Los gewinnt“ geworben.

Kreuzen Sie die Aussagen an, die gleichbedeutend sind.

- ☐ Die Gewinnchance ist 1 : 5.
- ☐ Die Gewinnchance ist 1 : 4.
- ☐ Auf einen Gewinn fallen vier Nieten.
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beträgt 25 %.
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beträgt 20 %.
- ☐ Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beträgt 5 %.

7.0 Es wird dreimal mit einem Spielwürfel, der die Augenzahlen „1“ bis „6“ besitzt, gewürfelt.

7.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal die „6“ erscheint.

7.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal die gleiche Zahl gewürfelt wird.

7.3 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nur unterschiedliche Zahlen erscheinen.

Lösungsvorschlag

1.1 Man hat für jeden der 4 Ringe 6 Möglichkeiten.

Es gibt also $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$ Möglichkeiten.

> **TIPP**
>
> $$\begin{array}{r} 36 \cdot 36 \\ \hline 108 \\ 216 \\ \hline 1296 \end{array}$$

1.2 Da die Kombination aus 4 unterschiedlichen Ziffern besteht, hat man für den ersten Ring 6 Möglichkeiten, für den zweiten 5, für den dritten 4 und für den vierten 3.

Es gibt also $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ Möglichkeiten.

1.3 Durch Ring 1 ist Ring 4 festgelegt und durch Ring 2 ist Ring 3 festgelegt.

Es gibt also $6 \cdot 6 = 36$ mögliche Kombinationen.

1.4 Es gibt je Ring nun nur noch 2 mögliche Ziffern.

Somit gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ Möglichkeiten.

2 Je Stelle gibt es 2 Möglichkeiten.

Für ein Byte gibt es also $2^8 = 256$ Möglichkeiten.

3.1 „WORT“ besteht aus 4 unterschiedlichen Buchstaben. Somit hat man für den ersten Buchstaben 4 Möglichkeiten, für den zweiten 3, für den dritten 2 und für den vierten 1.

Es gibt also $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten.

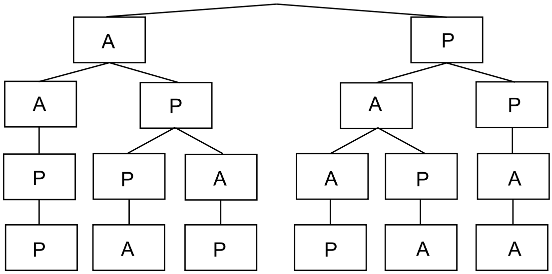
3.2 Würde man die Buchstaben auf Karten schreiben und von 1 bis 4 nummerieren (z. B. P_1, A_2, P_3, A_4), hätte man wie bei Teilaufgabe 3.1 insgesamt 24 Möglichkeiten, die 4 unterschiedlichen Karten anzuordnen.

Da es aber egal ist, ob Karte A_2 oder A_4 für den Buchstaben A gelegt wird, hat man nur noch halb so viele, also 12 Möglichkeiten.

Da es weiter egal ist, ob Karte P_1 oder P_3 für den Buchstaben P gelegt wird, halbiert sich die Anzahl an Möglichkeiten noch einmal.

Es gibt somit insgesamt 6 Möglichkeiten.

Baumdiagramm für die 6 Möglichkeiten:



TIPP Da in diesem Fall (anders als in Teilaufgabe 3.3) die Anzahl der Möglichkeiten gering ist, können diese vollständig mit einem Baumdiagramm dargestellt werden. Die Bestimmung der Anzahl wäre hier also auch direkt mit dem Baumdiagramm möglich.

3.3 Würde man die Buchstaben auf Karten schreiben und von 1 bis 5 nummerieren (z. B. H_1, A_2, L_3, L_4, O_5), hätte man insgesamt
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten.

Da es aber egal ist, ob L_3 oder L_4 bei L erscheint, halbiert sich die Anzahl an Möglichkeiten.

Es gibt somit insgesamt 60 Möglichkeiten.

4.1 LELE; ELEL; ELLE

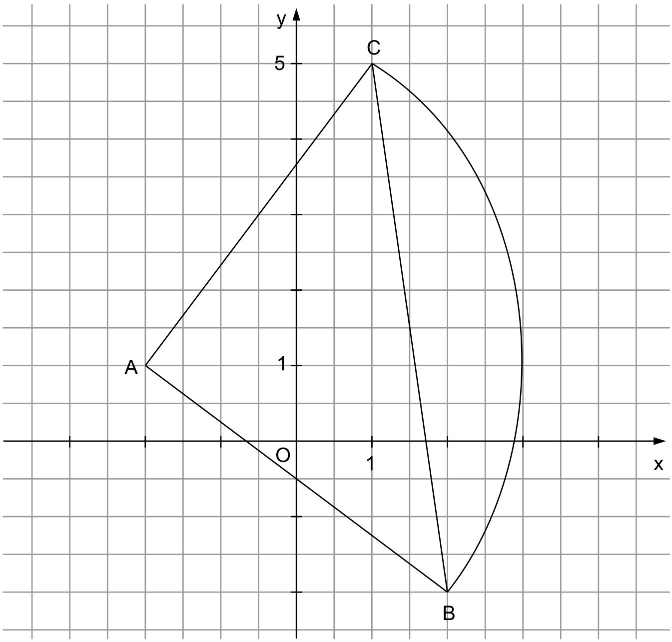
4.2 Es gibt 5 Vokale (A, E, I, O, U). Die restlichen 21 Buchstaben sind Konsonanten. Da jeweils 3 Kombinationen (KVKV, VKVK und VKKV) erlaubt sind, gibt es $5 \cdot 21 \cdot 3 = 315$ mögliche „Wörter“.

5
- ☒ Die Gewinnchance ist fifty-fifty.
- ☒ Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beträgt 50 %.
- ☒ Das Verhältnis von Gewinnlosen zu Nieten ist 1 : 1.

6
- ☒ Die Gewinnchance ist 1 : 4.
- ☒ Auf einen Gewinn fallen vier Nieten.
- ☒ Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beträgt 20 %.

BE

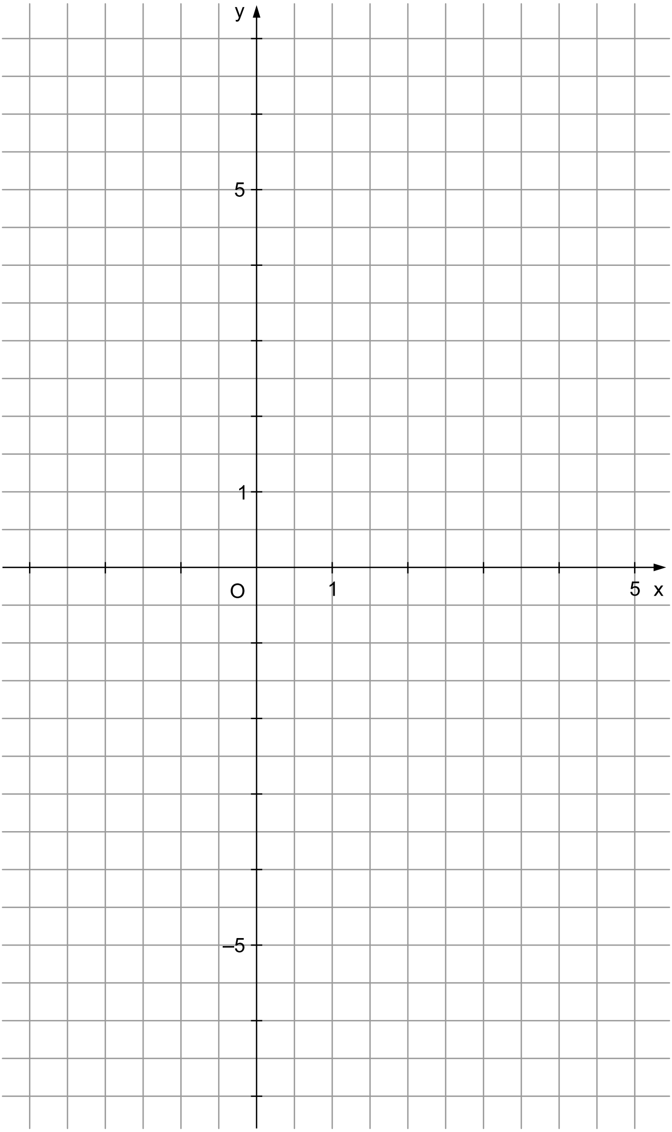
A 1.0 Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC.
Es gilt: $A(-2|1)$; $B(2|-2)$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.



A 1.1 Begründen Sie rechnerisch, weshalb das Dreieck ABC rechtwinklig ist. 2

A 1.2 Der Kreis um A mit dem Radius 5 LE schneidet die Strecke $\overline{BC}$ in den Punkten B und C.
Berechnen Sie den Flächeninhalt $A_{Segment}$ des Kreissegments, das durch die Strecke $\overline{BC}$ und den Kreisbogen $\overset{\frown}{BC}$ begrenzt wird. Geben Sie das exakte Ergebnis an. 2

A 2 Zeichnen Sie die Parabel p mit der Gleichung $y = -0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 2$ ($x, y \in \mathbb{R}$) für $x \in [-3; 5]$ in das Koordinatensystem ein. 1,5



Lösungsvorschlag

A 1.1

> **TIPP** Mithilfe der Steigungen m_{AB} und m_{AC} der Geraden AB und AC zeigt man, dass diese zueinander senkrecht verlaufen.

Berechnung des Vektors $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-2) \\ -2-1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Mit $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (vgl. Angabe) ergeben sich die Steigungen:

$$m_{AB} = -\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad m_{AC} = \frac{4}{3}$$

Somit gilt:

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$$

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

Folglich gilt $AB \perp AC$.

Also ist das Dreieck ABC rechtwinklig.

A 1.2

> **TIPP** Man zieht vom Flächeninhalt des Kreissektors ABC den Flächeninhalt des Dreiecks ABC ab.
>
> Das Dreieck ABC ist rechtwinklig bei A. Somit handelt es sich beim Kreissektor ABC um einen Viertelkreis. Die Längen der Dreiecksseiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ entsprechen dem Radius des Viertelkreises:
>
> $|\overline{AB}| = 5\,\text{LE}$ und $|\overline{AC}| = 5\,\text{LE}$

$$A_{\text{Segment}} = A_{\text{Sektor ABC}} - A_{\Delta ABC}$$

$$A_{\text{Segment}} = \frac{1}{4} \cdot |\overline{AB}|^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|$$

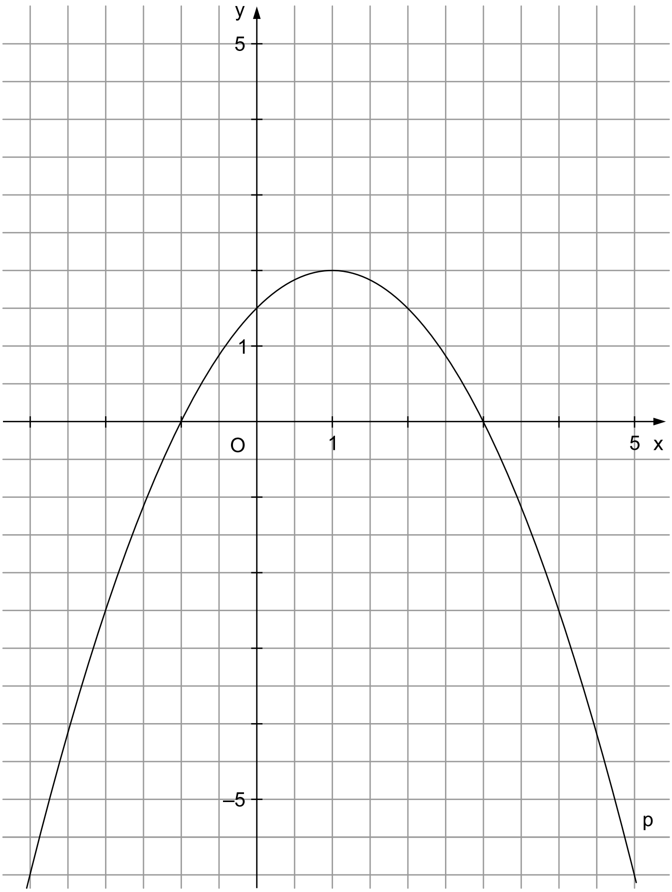
$$A_{\text{Segment}} = \left(\frac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot 5^2\right) \text{FE}$$

$$A_{\text{Segment}} = \left(\frac{25}{4} \cdot \pi - \frac{25}{2}\right) \text{FE}$$

$$A_{\text{Segment}} = (6{,}25 \cdot \pi - 12{,}5)\ \text{FE}$$

A 2 TIPP Die Parabel p hat den Scheitel S(1 | 2), ist nach unten geöffnet und mit dem Faktor 0,5 gestaucht.

- Von S geht man um 1 LE nach links bzw. rechts und um $0{,}5 \cdot 1^2$ LE $= 0{,}5$ LE nach unten.
- Von S geht man um 2 LE nach links bzw. rechts und um $0{,}5 \cdot 2^2$ LE $= 2$ LE nach unten.
- Von S geht man um 3 LE nach links bzw. rechts und um $0{,}5 \cdot 3^2$ LE $= 4{,}5$ LE nach unten …



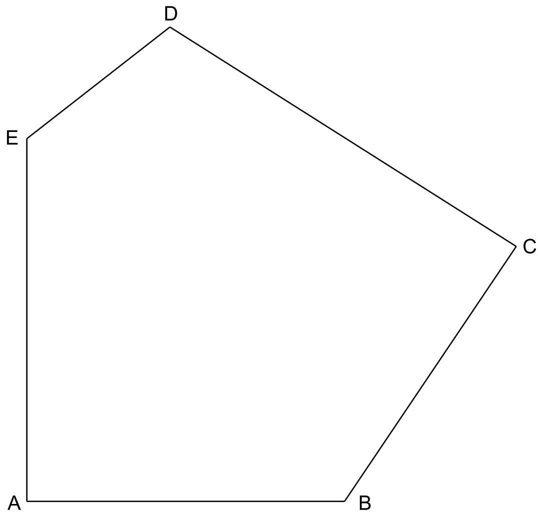
Aufgabe B 1

BE

B 1.0 Die nebenstehende Skizze zeigt das Fünfeck ABCDE.

Es gilt:
$\overline{AB} = 7$ cm;
$\overline{AE} = 8$ cm;
$\overline{DE} = 4$ cm;
$\overline{CE} = 11$ cm;
$\overline{CD} = 9$ cm;
$\sphericalangle BAE = 90°$;
$\sphericalangle AED = 128°$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 1.1 Zeichnen Sie das Fünfeck ABCDE sowie die Strecken [BE] und [CE]. Berechnen Sie sodann die Länge der Strecke [BE] und das Maß des Winkels AEB.
[Teilergebnisse: $\overline{BE} = 10{,}63$ cm; $\sphericalangle AEB = 41{,}19°$] 4

B 1.2 Ermitteln Sie durch Rechnung den Flächeninhalt des Vierecks ABCE.
[Zwischenergebnis: $\sphericalangle BEC = 36{,}33°$] 4

B 1.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Länge der Strecke [BC] und das Maß des Winkels ECB gilt: $\overline{BC} = 6{,}75$ cm; $\sphericalangle ECB = 68{,}90°$. 2

B 1.4 Die Punkte $F \in [CE]$ und $G \in [BE]$ legen die Strecke [FG] fest, wobei gilt: $[FG] \parallel [BC]$ und $\overline{CF} = 3$ cm.
Ergänzen Sie die Strecke [FG] in der Zeichnung zu B 1.1 und berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks BCFG. 4

B 1.5 Ein Kreis mit dem Mittelpunkt A berührt die Strecke [BE] im Punkt R. Er schneidet die Strecke [AB] im Punkt Q und die Strecke [AE] im Punkt S.

Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{QS}$ und den Punkt R in die Zeichnung zu B 1.1 ein.

Ermitteln Sie sodann rechnerisch den Flächeninhalt des Sektors, der von den Strecken [AQ] und [AS] sowie dem Kreisbogen $\overset{\frown}{QS}$ begrenzt wird.

[Zwischenergebnis: $\overline{AR} = 5,27$ cm] 3

Aufgabe B 2

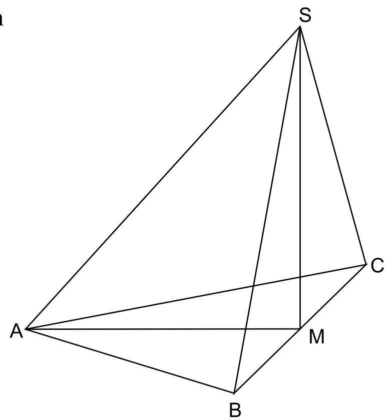
B 2.0 Die nebenstehende Skizze zeigt ein Schrägbild der Pyramide ABCS mit der Höhe [MS], deren Grundfläche das gleichschenklige Dreieck ABC ist. M ist der Mittelpunkt der Basis [BC].

Es gilt:

$\overline{AM} = 9$ cm; $\overline{BC} = 12$ cm;

$\overline{MS} = 10$ cm.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.



B 2.1 Zeichnen Sie das Schrägbild der Pyramide ABCS, wobei die Strecke [AM] auf der Schrägbildachse und der Punkt A links vom Punkt M liegen soll.

Für die Zeichnung gilt: $q = \frac{1}{2}$; $\omega = 45°$. 2

B 2.2 Berechnen Sie die Länge der Strecke [AS], das Maß des Winkels MAS sowie das Volumen der Pyramide ABCS.

[Ergebnisse: $\overline{AS} = 13,45$ cm; $\sphericalangle MAS = 48,01°$; $V_{ABCS} = 180 \text{ cm}^3$] 3

B 2.3 Für den Punkt $D \in [AS]$ gilt: $\overline{AD} = 4$ cm.

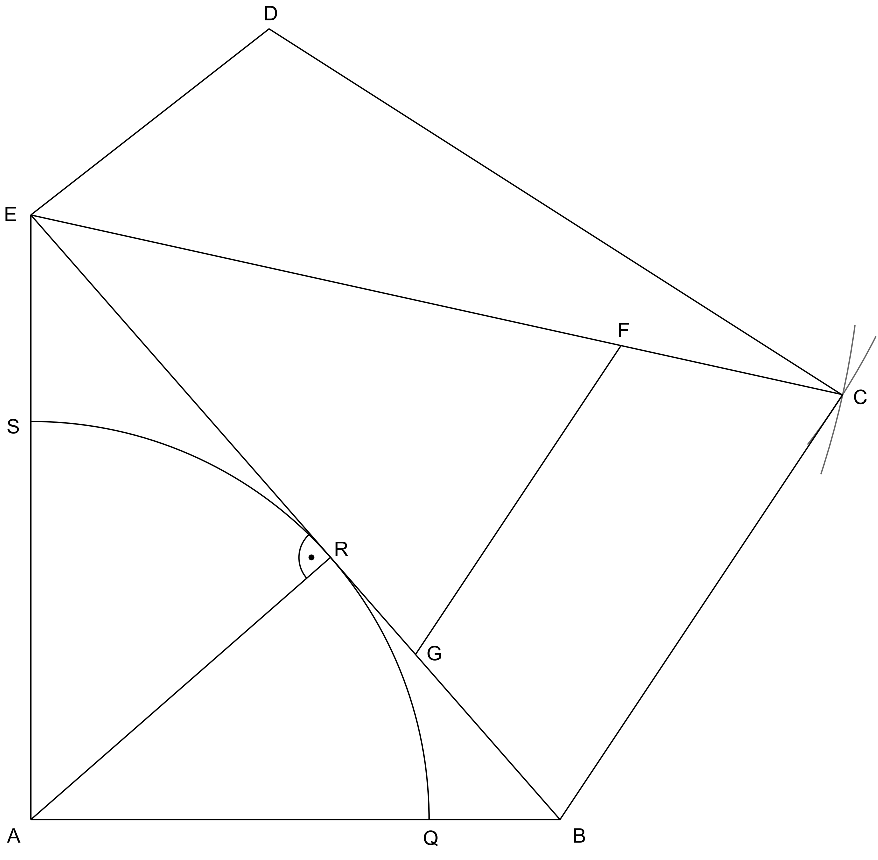
Zeichnen Sie die Strecke [DM] in das Schrägbild zu B 2.1 ein und berechnen Sie das Maß des Winkels DMA. 3

Lösungsvorschlag

B 1.1 Zeichnen des Fünfecks ABCDE sowie der Strecken [BE] und [CE]

TIPP

- Zunächst zeichnet man [AB] mit $\overline{AB} = 7$ cm.
- Es gilt $\sphericalangle BAE = 90°$ und $\overline{AE} = 8$ cm. Hiermit erhält man den Punkt E.
- Es gilt $\sphericalangle AED = 128°$ und $\overline{DE} = 4$ cm. Hiermit erhält man den Punkt D.
- Es gilt $\overline{CE} = 11$ cm und $\overline{CD} = 9$ cm. C ist somit einer der Schnittpunkte des Kreises um E mit dem Radius 11 cm und des Kreises um D mit dem Radius 9 cm.



Berechnung von $\overline{BE}$ mithilfe des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ABE:

$$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2 \qquad |\sqrt{}$$

$$\overline{BE} = \sqrt{7^2 + 8^2}\ \text{cm}$$

$$\overline{BE} = 10{,}63\ \text{cm}$$

Bestimmung von $\sphericalangle AEB$ im rechtwinkligen Dreieck ABE:

$$\tan \sphericalangle AEB = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$$

$$\tan \sphericalangle AEB = \frac{7}{8}$$

$$\sphericalangle AEB = 41{,}19°$$

TIPP $\sphericalangle$AEB kann auch mithilfe des sin bzw. cos im rechtwinkligen Dreieck ABE berechnet werden, da alle drei Seitenlängen des Dreiecks bekannt sind.

B 1.2 **TIPP** Man berechnet den Flächeninhalt des Vierecks ABCE, indem man es in zwei Dreiecke zerlegt. Es gilt:
$A_{ABCE} = A_{\Delta ABE} + A_{\Delta BCE}$
$A_{\Delta ABE}$ kann ohne Zwischenschritte berechnet werden.
Um $A_{\Delta BCE}$ zu ermitteln, benötigt man $\sphericalangle$BEC.
Hierzu ermittelt man zunächst $\sphericalangle$CED und dann mithilfe von
$\sphericalangle BEC = \sphericalangle AED - \sphericalangle AEB - \sphericalangle CED$ den benötigten Winkel.

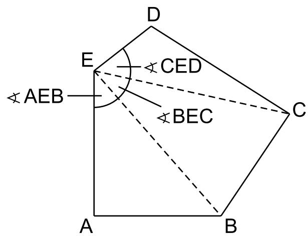
Berechnung von $\sphericalangle$CED mithilfe des Kosinussatzes im Dreieck ECD:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 - 2 \cdot \overline{CE} \cdot \overline{DE} \cdot \cos \sphericalangle CED$$

$$\cos \sphericalangle CED = \frac{\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 - \overline{CD}^2}{2 \cdot \overline{CE} \cdot \overline{DE}}$$

$$\cos \sphericalangle CED = \frac{11^2 + 4^2 - 9^2}{2 \cdot 11 \cdot 4}$$

$$\sphericalangle CED = 50{,}48°$$



Berechnung von $\sphericalangle$BEC:

$$\sphericalangle BEC = \sphericalangle AED - \sphericalangle AEB - \sphericalangle CED$$

$$\sphericalangle BEC = 128° - 41{,}19° - 50{,}48°$$

$$\sphericalangle BEC = 36{,}33°$$