Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Rheinland-Pfalz

Mathematik

+ *Übungsaufgaben*

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Original-Abituraufgaben

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autorinnen und Autoren

Marcel Gruner:
Tipps und Lösungen zur Abiturprüfung 2019, 2020 und 2021 (jeweils WTR); Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Die Tipps und Lösungen zur Abiturprüfung 2019, 2020, 2021 (jeweils CAS) und 2022 (CAS und WTR) wurden von der Redaktion erstellt.

Die Übungsaufgaben wurden von Georg Breitenfeld (Aufgabe 8), Viola Dengler (Aufgabe 9), Herbert Kompernaß (Aufgaben 1, 4), Dr. Jürgen Leitz (Aufgabe 7), Werner Neidhardt (Aufgaben 3, 6, 10) und Ulrich Rauch (Aufgaben 2, 5) erstellt.

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie werden das Abitur im Fach Mathematik ablegen. Seit 2017 wird ein Aufgabenblock (Analysis) der schriftlichen Abituraufgaben in Mathematik einheitlich für alle Schülerinnen und Schüler in Rheinland-Pfalz zentral vom Ministerium für Bildung gestellt. Die Aufgaben der anderen beiden Blöcke werden weiterhin dezentral erstellt.

Der vorliegende Band soll Ihnen dabei helfen, sich optimal auf die schriftliche Prüfung in Mathematik vorzubereiten. Das einführende Kapitel „**Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung**" informiert Sie über die offiziellen Rahmenvorgaben, macht Sie mit den Arbeitsanweisungen (Operatoren) vertraut und erläutert, wie Sie einzelne Aufgaben und die Abiturprüfung im Allgemeinen am besten angehen.

Die sich anschließenden zahlreichen **Übungsaufgaben** basieren auf den abiturrelevanten Unterrichtsthemen und ermöglichen Ihnen die Wiederholung des Prüfungsstoffs und eine optimale Vorbereitung auf die Abiturprüfung. Im letzten Teil des Buches finden Sie **offizielle, zentral gestellte Abiturprüfungsaufgaben der Jahre 2019 bis 2022** (für WTR und CAS). Anhand der Original-Prüfungen können Sie sich ein gutes Bild zum Analysisteil Ihrer Abschlussprüfung machen. Außerdem erhalten Sie zusätzliche Hinweise zu den entsprechenden GTR-Versionen.

Zu jedem Aufgabenblock finden Sie einen ausführlichen **Lösungsvorschlag**, mit dem Sie Ihre eigenen Ausarbeitungen vergleichen können. Den Lösungsvorschlägen vorangestellt sind **Lösungshinweise**, die Ihnen bei der Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben helfen.

Kostenlose **Webinare** zur Vorbereitung auf die G8-Prüfung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung vom Ministerium für Bildung bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu unter **www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell**.

Das Autorenteam und der Verlag wünschen Ihnen eine gute Vorbereitungsphase und viel Erfolg in der Abiturprüfung!

5.1 Vorbereitung

Beginnen Sie frühzeitig und langfristig mit der Vorbereitung! Eine regelmäßige Wiederholung sorgt zudem für eine bessere Festigung des Stoffes als ein kurzfristiges Lernen vor der Prüfung.

- Die beste Vorbereitung ist: im Unterricht aufpassen, mitarbeiten, Hausaufgaben machen.
- Nutzen Sie schon ab der 11. Klasse jeweils die Ferien nicht nur zum nötigen Entspannen, sondern auch, um Zusammenfassungen in Ihren Prüfungsfächern zu schreiben. Dann haben Sie in der Endphase mehr Zeit.
- Fertigen Sie eine Übersicht über den prüfungsrelevanten Stoff an und teilen Sie die Inhalte in sinnvolle Teilbereiche ein. Machen Sie sich einen Zeitplan, bis wann Sie welche Inhalte wiederholt haben möchten.
- Bedenken Sie, dass Sie für Stoff, den Sie nicht so gut können, mehr Zeit benötigen als für Stoff, den Sie schon relativ sicher beherrschen.
- Nutzen Sie auch eine Ich-kann-Liste zur Selbsteinschätzung, um sich immer wieder vor Augen zu führen, was Sie bereits alles können (oder was Sie ggf. noch mal wiederholen sollten). Erstellen Sie dazu eine Tabelle, in denen alle prüfungsrelevanten Punkte aus dem aufgelistet sind, und ordnen Sie jeden Punkt einer der Kategorien „kann ich sicher", „kann ich relativ sicher" und „muss ich noch üben" zu.
- Bilden Sie Lerngruppen mit Mitschülern. Am meisten lernt man, indem man Zusammenhänge und Aufgaben anderen erklärt. Außerdem können die Mitschüler Ihnen Ihre Fragen beantworten.
- Nehmen Sie sich noch einmal alte Kursarbeiten und Hausaufgabenüberprüfungen vor. Die Aufgaben darin entsprechen dem Stil Ihres Fachlehrers und somit dem Stil der (dezentralen) Aufgaben. Lassen Sie sich ggf. auch Kursarbeiten aus den Parallelkursen geben (besonders, wenn diese Kurse die Abiturprüfung gemeinsam schreiben). Das ist – neben dem Aufpassen (siehe oben) – die zweitbeste Vorbereitung.
- Schauen Sie sich Ihre Fehler (sowohl aus alten Kursarbeiten als auch nun bei Übungsaufgaben) genau an. Überlegen Sie sich, warum die Lösung falsch war, und korrigieren Sie die Fehler. Auch aus Fehlern können und sollten Sie lernen!
- Nutzen Sie unbedingt Ihre Unterrichtsaufzeichnungen und Ihr Lehrbuch zur Vorbereitung.
- Bewahren Sie Ihre korrigierten und mit Anmerkungen (was hat Ihnen Schwierigkeiten bereitet, wozu hatten Sie Fragen o. Ä.) versehenen Unterlagen vom Lernen übersichtlich auf. Das erleichtert spätere Wiederholungen.

5.6 Tipps zum Umgang mit dem Buch

- Wie Sie wissen, werden zwei der drei Aufgabenblöcke, die Sie in der Prüfung bearbeiten müssen, von der jeweiligen Fachlehrkraft und somit **nicht zentral** erstellt. Bei der Erstellung wird Ihre Lehrkraft darauf achten, dass diese Aufgaben der gewählten **Schwerpunktsetzung** im Unterricht entsprechen. Folglich kann es sein, dass in den Übungsaufgaben Themengebiete abgedeckt sind, die in Ihrem Unterricht gar nicht oder nur am Rande behandelt wurden. Sollte dies der Fall sein, können Sie selbstverständlich die entsprechenden (Teil-)Aufgaben überspringen.
- In diesem Übungsbuch sind die zentral gestellten Originalprüfungen mit Tipps und Lösungen nur in den Versionen für WTR und CAS komplett abgedruckt. Die **GTR-Versionen** wurden jeweils in Anlehnung an eine der beiden anderen Versionen erstellt, wobei es sich bei den Abweichungen in der Regel nur um wenige Teilaufgaben handelt. Jeweils nach dem Lösungsteil derjenigen Version, auf deren Grundlage die GTR-Version erstellt wurde, sind die abweichenden Teilaufgaben der GTR-Version angegeben und durch Hinweise zur Lösung ergänzt.
- Auch wenn Sie eine **G8-Schule** besuchen, können Sie die Originalprüfungen des G9-Abiturs zur Vorbereitung nutzen, da sich die Vorgaben für prüfungsrelevante Themengebiete nicht unterscheiden.
- Da der Zeitfaktor in der Prüfung eine wichtige Rolle spielt, ist es nützlich, die **Prüfungssituation** so gut es geht zu **simulieren**. Suchen Sie sich drei passende Aufgabenblöcke dieses Buches (typisch in der Kombination Analysis – Lineare Algebra/Analytische Geometrie – Stochastik) aus und bearbeiten Sie diese in einem Durchlauf und ohne Rückgriff auf die Musterlösungen in 270 Minuten. Suchen Sie sich dafür einen ruhigen Arbeitsplatz, an dem Sie nicht gestört werden.
- Wenn Sie in einer Aufgabe nicht weiterwissen, nutzen Sie zunächst stets die **Lösungshinweise und Tipps**, die sich zwischen Aufgabenstellung und Lösungsvorschlag befinden und durch graue Kästen gekennzeichnet sind. Erst wenn Sie trotz dieser Hilfestellungen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung einer Aufgabe haben, sollten Sie die Musterlösungen zurate ziehen. Versuchen Sie in diesem Fall, die angebotene Lösung (und insbesondere die Lösungswege) Schritt für Schritt zu verstehen und nachzuvollziehen.

BE

Für einen industriellen Produktionsprozess wird ein Behälter verwendet. Im Laufe des Produktionsprozesses enthält der Behälter unterschiedliche Mengen einer Flüssigkeit. Die Füllhöhe der Flüssigkeit im Behälter in Zentimetern wird mit h bezeichnet.

Aufgabe 1

Die Funktionenschar $M_{a;\,b}$ mit $M_{a;\,b}(h) = a \cdot e^{b \cdot h}$ beschreibt die Abhängigkeit einer Messgröße von h.

a) Abbildung 1 zeigt die Messwerte der Messreihe 1.
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass durch die Funktion $M_{a;\,b}$ diese Messwerte beschrieben werden.

h [cm]	$M_{a;\,b}(h)$
20	55
40	30
60	17
80	9
100	5

Abb. 1 4

b) Verwenden Sie nun die Funktion $M_{100;\,-0{,}03}$ mit
$M_{100;\,-0{,}03}(h) = 100 \cdot e^{-0{,}03 \cdot h}$.
Berechnen Sie die Füllhöhe h, bei der die lokale Änderungsrate von M mit der mittleren Änderungsrate im Intervall [0; 100] übereinstimmt. 4

c) Das Ergebnis der Messreihe 2 zeigt das in Abbildung 2 dargestellte Diagramm, bei dem auf der x-Achse h und auf der y-Achse $\ln(M_{a;\,b}(h))$ abgetragen ist.

Ermitteln Sie mithilfe der Steigung der abgebildeten Geraden sowie des Schnittpunktes dieser Geraden mit der y-Achse die passenden Werte der Parameter a und b. 5

Aufgabe 2

Der betrachtete Behälter ist kugelförmig und hat einen Innendurchmesser von 100 cm. Das Füllvolumen der Flüssigkeit im Behälter in Litern kann in Abhängigkeit von der Füllhöhe h mit dem Term

$$V(h) = \frac{1}{1000} \cdot \int_0^h \pi \cdot \left(50^2 - (50 - x)^2\right) dx$$

berechnet werden.

a) Die Abbildung 3 zeigt einen vertikalen Schnitt durch den Mittelpunkt des Behälters.
Geben Sie die Bedeutung des Terms
$\pi \cdot \left(50^2 - (50 - x)^2\right)$
im Sachzusammenhang an und begründen Sie Ihre Angabe mithilfe der Abbildung 3.
Beschreiben Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{1000}$ im Term V(h) im Sachzusammenhang.

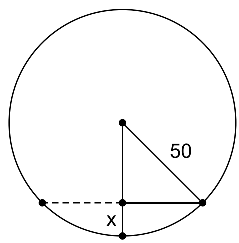


Abb. 3

6

b) Begründen Sie, dass es im Sachzusammenhang sinnvoll ist, die Definitionsmenge der Funktion $h \mapsto V(h)$ auf das Intervall [0; 100] zu beschränken. 2

c) Bestimmen Sie einen Term für V(h), der kein Integral enthält. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion $h \mapsto V(h)$ im Intervall [0; 100]. 4

TIPP **Lösungshinweise**

Teilaufgabe 1 a

Die Parameter a und b sollen so bestimmt werden, dass sich für jeden Wert von h der Messreihe (Abb. 1) mit $M_{a;\,b}(h)$ jeweils (näherungsweise) der dazugehörige Messwert ergibt.

Es genügt, wenn Sie zwei Wertepaare der Messreihe wählen und mit ihnen die Werte der beiden Parameter bestimmen.

Teilaufgabe 1 b

Die mittlere Änderungsrate $\overline{m}$ im Intervall [0; 100] wird mit dem passenden Differenzenquotienten berechnet:

$$\overline{m} = \frac{M_{100;\,-0{,}03}(0) - M_{100;\,-0{,}03}(100)}{0-100}$$

Für die momentane Änderungsrate benötigen Sie die Funktionsgleichung der 1. Ableitung $M'_{100;\,-0{,}03}$.

Setzen Sie $M'_{100;\,-0{,}03}(h)$ mit dem berechneten Wert der mittleren Änderungsrate gleich.

Teilaufgabe 1 c

Setzen Sie den Funktionsterm von $M_{a;\,b}$ in ln $(M_{a;\,b}(h))$ ein und formen Sie den Ausdruck so um, dass ein Funktionsterm einer Geraden entsteht.

Beachten Sie die Rechenregeln beim Logarithmus. Für beliebige Werte c und d mit $c, d > 0$ gilt $\ln(c \cdot d) = \ln c + \ln d$ und $\ln c^d = d \cdot \ln c$.

Teilaufgabe 2 a

Der Faktor π deutet darauf hin, dass mit dem Term eine Kreisfläche gemäß der Formel $A = r^2\pi$ berechnet wird. Geben Sie an, um welche Kreisfläche im Sachzusammenhang es geht.

Überlegen Sie, wo der Radius in der Abbildung 3 zu sehen ist.

Gehen Sie dann darauf ein, warum der Radius in Abhängigkeit von x geschrieben werden kann, wie im gegebenen Term zu sehen. Überlegen Sie für Ihre Begründung, was das rechtwinklige Dreieck damit zu tun hat, das in der Abbildung zu sehen ist.

Der Faktor $\frac{1}{1000}$ dient der Einheitenumwandlung. Beachten Sie, in welcher Einheit die Füllhöhe angegeben wird und in welcher das Volumen berechnet werden soll.

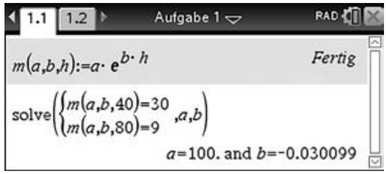
Teilaufgabe 2 b

Die entscheidende Information ist im einleitenden Aufgabentext zur Aufgabe 2 zu finden.

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) Zur Bestimmung der Werte von a und b können zwei Wertepaare der Messreihe verwendet werden, z. B.
$h = 40$ und $M_{a;\,b}(40) = 30$ sowie
$h = 80$ und $M_{a;\,b}(80) = 9$.



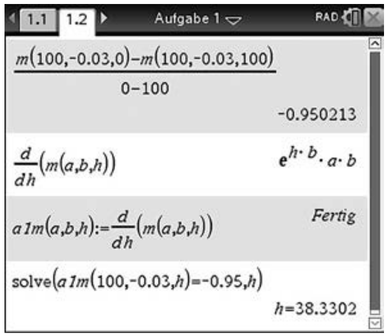
Es muss gelten:

I $\quad a \cdot e^{b \cdot 40} = 30$

II $\quad a \cdot e^{b \cdot 80} = 9$

Mit dem CAS: $a \approx 100$; $b \approx -0{,}03$

b) Die mittlere Änderungsrate im Intervall [0; 100] ergibt sich aus folgendem Differenzenquotienten:



$$\overline{m} = \frac{M_{100;\,-0{,}03}(0) - M_{100;\,-0{,}03}(100)}{0-100}$$
$$= \frac{100 \cdot e^{-0{,}03 \cdot 0} - 100 \cdot e^{-0{,}03 \cdot 100}}{0-100}$$
$$\approx -0{,}95$$

Die lokale Änderungsrate ergibt sich aus der 1. Ableitungsfunktion, für die gilt:

$M'_{100;\,-0{,}03}(h) = -3 \cdot e^{-0{,}03 \cdot h}$

Weil die lokale gleich der mittleren Änderungsrate sein soll, muss gelten:
$-3 \cdot e^{-0{,}03 \cdot h} \approx -0{,}95 \quad \Rightarrow \quad h \approx 38{,}3$

Bei einer Füllhöhe von ca. 38,3 cm stimmt die lokale mit der mittleren Änderungsrate überein.

c) Der natürliche Logarithmus des Funktionsterms von $M_{a;\,b}$ ergibt:
$\ln(M_{a;\,b}(h)) = \ln(a \cdot e^{b \cdot h}) = \ln a + \ln e^{b \cdot h} = \ln a + b \cdot h \cdot \ln e = b \cdot h + \ln a$

Folglich ist b die Steigung und $\ln a$ der y-Achsenabschnitt der Geraden, die in Abbildung 2 dargestellt ist. Durch Ablesen der entsprechenden Werte in der Abbildung folgt:

$$b = \frac{\ln(M_{a;\,b}(60)) - \ln(M_{a;\,b}(10))}{60-10} \approx \frac{1-4}{60-10} = -\frac{3}{50} = -0{,}06$$

$\ln a \approx 4{,}6 \quad \Leftrightarrow \quad a \approx e^{4{,}6} \approx 99{,}5$

Aufgabe 2

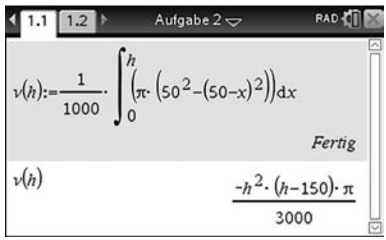
a) Mit dem angegebenen Term lässt sich der Inhalt der kreisförmigen Oberfläche der Flüssigkeit bei einer Füllhöhe x berechnen, denn: Die in Abbildung 3 fett gezeichnete Linie ist der Radius r der Kreisfläche und zugleich Kathete im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse 50 und der zweiten Kathete $50 - x$. Für den Radius kann deshalb geschrieben werden: $r^2 = 50^2 - (50 - x)^2$. Mit der Flächenformel für den Kreis folgt dann der angegebene Term.

Die Füllhöhe h wird in cm angegeben werden, mit dem bestimmten Integral wird also das Füllvolumen in cm^3 berechnet. Da mit V(h) jedoch das Volumen in Liter bzw. in dm^3 berechnet werden soll, wird der Umrechnungsfaktor $\frac{1}{1000}$ benötigt, denn es gilt $1\ dm^3 = 1\,000\ cm^3$.

b) Der Durchmesser des kugelförmigen Behälters ist 100 cm, die Füllhöhe kann somit maximal 100 cm betragen.

c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
V(h) &= \frac{1}{1000} \cdot \int_0^h \pi \cdot \left(50^2 - (50 - x)^2\right) dx \\
&= \frac{\pi}{1000} \cdot \int_0^h \left(50^2 - (50^2 - 2 \cdot 50 \cdot x + x^2)\right) dx \\
&= \frac{\pi}{1000} \cdot \int_0^h \left(100x - x^2)\right) dx \\
&= \frac{\pi}{1000} \cdot \left[100 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^h \\
&= \frac{\pi}{1000} \cdot \left(-\frac{1}{3}h^3 + 50h^2\right)
\end{aligned}$$



Skizze des Graphen: