2024

Fachoberschule

Original-Prüfungsaufgaben
mit Lösungen

Hessen

Mathematik

+ Übungsaufgaben im Stil der Prüfung

MEHR ERFAHREN

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Abschlussprüfung 2019

Abschlussprüfung 2020

*Coronabedingt gab es in der Abschlussprüfung 2020 eine zusätzliche Aufgabe aus der Analysis, da Integralrechnung, Lineare Algebra und analytische Geometrie und Stochastik als prüfungsrelevante Themen gestrichen wurden und die Schülerinnen und Schüler selbst auswählen konnten, ob sie eine Aufgabe aus diesen drei Bereichen wählen oder die Ersatzaufgabe aus der Analysis.

Abschlussprüfung 2021

**Coronabedingt gab es in der Abschlussprüfung 2021 eine zusätzliche Aufgabe aus der Analysis, da Integralrechnung, Lineare Algebra und analytische Geometrie und Stochastik als prüfungsrelevante Themen gestrichen wurden.

Abschlussprüfung 2022

**Coronabedingt gab es in der Abschlussprüfung 2022 eine zusätzliche Aufgabe aus der Analysis, da Integralrechnung, Lineare Algebra und analytische Geometrie und Stochastik als prüfungsrelevante Themen gestrichen wurden.

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MyStark** finden Sie:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil der Abschlussprüfung
- **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
- **Jahrgang 2018**

Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Kostenlose **Webinare** zur Prüfungsvorbereitung finden Sie ab Mitte März 2024 unter:
www.stark-verlag.de/schule/unser-angebot/kurse/online-kurse

Autorin:
Cristina Alberti

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit diesem Buch geben wir Ihnen eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abschlussprüfung 20234** an der **Fachoberschule** in **Hessen** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zur Abschlussprüfung**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette, kommentierte Aufstellung der Operatoren für die Abschlussprüfung, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben. Sie finden dort darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf die Abschlussprüfung als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält **Übungsaufgaben** zu den **Themen der zentralen Abschlussprüfung 2024**. Die Aufgaben sind dabei auf den Stil der Prüfungsaufgaben abgestimmt, d. h., in der Abschlussprüfung werden auf Sie in Umfang, Form und Schwierigkeitsgrad vergleichbare Fragestellungen zukommen.
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band die **Original-Abschlussprüfungen 2019 bis 2023**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Zu sämtlichen Aufgaben im Buch wurden von uns **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhalten Sie zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  – **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
  – **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht
  – **Jahrgang 2018**

  Den Zugangscode zu MyStark finden Sie auf der Umschlaginnenseite.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung und bei Ihrer Abschlussprüfung!

Cristina Alberti

Hinweise und Tipps zur zentralen Abschlussprüfung

1 Ablauf der schriftlichen Abschlussprüfung

1.1 Die zentrale schriftliche Prüfung

Seit dem Schuljahr 2016/2017 gibt es im Land Hessen in der Fachoberschule zentrale schriftliche Abschlussprüfungen. Zentral geprüft werden die Fächer Deutsch, Mathematik und Englisch sowie die fachrichtungs- und schwerpunktbezogenen Fächer.

1.2 Aufbau und Dauer der Prüfung

Die Abschlussprüfung in Mathematik besteht aus drei Teilen:

Teil I der Prüfung ist der **hilfsmittelfreie Teil**. Hier werden verschiedene Aufgaben aus der Analysis behandelt, die ohne Taschenrechner und Formelsammlung bearbeitet werden müssen.

Teil II der Prüfung umfasst **zwei Vorschläge** aus der **Analysis**: Vorschlag A und Vorschlag B. Den Schülerinnen und Schülern werden beide Vorschläge ausgehändigt, von denen sie sich für einen der beiden Vorschläge entscheiden müssen. Der nicht gewählte Aufgabenvorschlag wird an die Aufsicht führende Lehrkraft zurückgegeben.

Teil III enthält je eine Aufgabe aus den schwerpunktbezogenen Themenfeldern „Integralrechnung“, „Lineare Algebra und analytische Geometrie“ und „Stochastik“. Es muss nur die Aufgabe aus dem Themenfeld gelöst werden, für das sich die Schule entschieden hat.

Anmerkung: Coronabedingt haben in den letzten Jahren die Bearbeitungszeiten und die Bewertungseinheiten der Aufgaben variiert. Zusätzlich gehörte Teil III nicht zu den prüfungsrelevanten Themen. Zum Zeitpunkt der Drucklegung dieses Buches waren die genauen Vorgaben für die Prüfung 2024 noch nicht bekannt. Diese können auf MyStark nachgelesen werden, sobald sie veröffentlicht wurden.

1.3 Zugelassene Hilfsmittel

Die folgenden Hilfsmittel sind zur Prüfung zugelassen:

- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Fremdwörterbuch
- Liste der fachspezifischen Operatoren für die Fachoberschule
- übliche Schreib- und Zeichenmaterialien
- wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR):
  Der WTR benötigt erweiterte Funktionalitäten zur numerischen Berechnung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen bis dritten Grades, der Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekannten und von Wertetabellen für elementare Funktionen.
  Für die Fachrichtung Technik, Schwerpunkt Maschinenbau werden statistische Berechnungen von 50 Werten benötigt.
- handelsübliche Formelsammlung eines Schulbuchverlages (ohne Beispielaufgaben)

2 Die Inhalte der Prüfung

Die Grundlage der Prüfung bildet der aktuelle Lehrplan. Die Schwerpunkte in der Prüfung 2024 sind im Folgenden aufgeführt.
Anmerkung: Ob es Einschränkungen in der Prüfung 2024 geben wird, war zum Zeitpunkt der Drucklegung des Buches nicht bekannt. Falls es Einschränkungen gibt, werden diese auf MyStark veröffentlicht.

2.1 Funktionen

ganzrationale Funktionen	– Darstellung funktionaler Zusammenhänge als Wertetabelle, als Graph und als Funktionsterm – Untersuchung ganzrationaler Funktionen ohne Differentialrechnung, auch unter Berücksichtigung von Formfaktoren: Satz vom Nullprodukt, Polynomdivision oder Horner-Schema, Substitution – Bestimmen von Schnittpunkten der Funktionen mit den Koordinatenachsen – Schnittpunkte von Funktionsgraphen – Symmetrieeigenschaften – Globalverhalten – Linearfaktordarstellung

Teil II: Analysis / Vorschlag B

Aufgaben BE

2 Gegeben ist eine allgemeine ganzrationale Funktion dritten Grades $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, die durch die Punkte $(0|520)$, $(1|324)$, $(2|182)$ und $(3|88)$ verläuft.

2.1.1 Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem mithilfe der gegebenen Punkte auf. Bestimmen Sie daraus den Funktionsterm f(t).
(*zur Kontrolle:* $f(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 520$) 9

2.1.2 Untersuchen Sie die Funktion f auf ihr Globalverhalten. 5

2.1.3 Begründen Sie, dass die Funktion f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung ist. 3

2.2 Ein Einkaufszentrum ist von 8:00 Uhr bis 20:00 Uhr geöffnet. Die momentane Anzahl der Besucherinnen und Besucher wird näherungsweise durch die Funktion f angegeben:
$f(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 520;\ 8 \le t \le 20$
t beschreibt dabei die Zeit in Stunden. (8:00 Uhr entspricht $t = 8$.)

2.2.1 Berechnen Sie, wie viele Besucherinnen und Besucher direkt zur Öffnung des Einkaufszentrums erscheinen und wie viele sich zwei Stunden später im Einkaufszentrum aufhalten. 5

2.2.2 Berechnen Sie, um welche Uhrzeit sich die meisten Besucherinnen und Besucher im Einkaufszentrum befinden und wie viele es sind. 9

2.2.3 Geben Sie an, in welchem Bereich die Funktion f im Intervall $8 \le t \le 20$ streng monoton steigend oder fallend ist.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 6

2.2.4 Weisen Sie nach, dass der Anstieg der Besucherzahl um 10:00 Uhr am größten ist. 8

2.2.5 Wenn sich mindestens 270 Besucherinnen und Besucher im Einkaufszentrum befinden, werden bei einer Promotion-Aktion Werbegeschenke verteilt.
Berechnen Sie, in welchem Zeitraum die Promotion-Aktion stattfindet. 10

55

TIPP **Lösungshinweise zum Teil II: Analysis / Vorschlag B**

Teilaufgabe 2.1.1

Dies ist eine Steckbrief-/Rekonstruktionsaufgabe. Setzen Sie die Koordinaten der Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung ein.

Wegen des Operators „bestimmen“ dürfen Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystems den WTR benutzen.

Teilaufgabe 2.1.2

Anhand welcher Bestandteile des Funktionsterms kann man das Globalverhalten dieser Funktion herleiten?

Betrachten Sie das Glied des Funktionsterms mit dem höchsten Exponenten.

Teilaufgabe 2.1.3

Was sind die Voraussetzungen für Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung?

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn alle Exponenten der Funktion gerade sind. Punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung sind Graphen, wenn alle Exponenten der Funktion ungerade sind und das Absolutglied null ist.

Alternativ: Berechnen Sie $f(-t)$ und untersuchen Sie, ob $f(-t) = f(t)$ oder $f(-t) = -f(t)$ erfüllt ist.

Teilaufgabe 2.2.1

Sie benötigen die Funktionswerte für $t = 8$ und $t = 10$.

Teilaufgabe 2.2.2

Die meisten Besucherinnen und Besucher bedeutet, dass Sie einen Extrempunkt (in diesem Fall einen Hochpunkt) suchen.

Welche Voraussetzungen müssen für das Vorhandensein eines Extrempunktes gegeben sein? Was ist die notwendige, was die hinreichende Bedingung?

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunktes ist $f'(t) = 0$, die hinreichende Bedingung ist $f''(t) \neq 0$ und $f''(t) > 0$ für einen Tiefpunkt und $f''(t) < 0$ für einen Hochpunkt.

Die y-Koordinate des Extrempunktes erhalten Sie, indem Sie die Extremstelle in die Funktion f einsetzen.

2.1.1 Die allgemeine Funktionsgleichung für eine ganzrationale Funktion 3. Grades lautet:
$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

Bei einer Funktion 3. Grades werden vier Wertepaare benötigt, um das entstehende lineare Gleichungssystem mit vier Variablen und vier Gleichungen lösen zu können. Diese Wertepaare werden der Aufgabenstellung entnommen:
$f(0) = 520$, $f(1) = 324$, $f(2) = 182$ und $f(3) = 88$

Einsetzen in die Funktionsgleichung liefert:
$f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 520 \quad \Rightarrow \quad d = 520$
$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 324$
$f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 182$
$f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 88$

Man erhält das lineare Gleichungssystem:
I $\quad d = 520$
II $\quad a + b + c + 520 = 324$
III $\quad 8a + 4b + 2c + 520 = 182$
IV $\quad 27a + 9b + 3c + 520 = 88$

Vereinfachen der Gleichungen führt zu:
I $\quad d = 520$
II $\quad a + b + c = -196$
III $\quad 8a + 4b + 2c = -338$
IV $\quad 27a + 9b + 3c = -432$

TIPP Das lineare Gleichungssystem kann aufgrund des Operators „bestimmen“ mit dem WTR gelöst werden.

Man erhält:
$a = -1$; $b = 30$; $c = -225$

Daraus ergibt sich der Funktionsterm:
$f(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 520$

2.1.2 Das Globalverhalten (Verhalten im Unendlichen) einer ganzrationalen Funktion lässt sich anhand des Gliedes mit der höchsten Potenz und dem dazugehörigen Koeffizienten bestimmen.
Hier ist dies $-t^3$. Es liegen also ein ungerader Exponent (3) und ein negativer Koeffizient (–1) vor.

Daraus folgt ein Verlauf des Graphen vom II. in den IV. Quadranten:
für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to -\infty$
für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$

2.1.3 *Lösungsweg 1:*
In der vorliegenden Funktion existieren sowohl gerade als auch ungerade Exponenten. Somit ist der Graph der Funktion f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Lösungsweg 2:
$f(-t) = -(-t)^3 + 30(-t)^2 - 225 \cdot (-t) + 520 = t^3 + 30t^2 + 225t + 520$
Da weder $f(-t) = f(t)$ noch $f(-t) = -f(t)$ gilt, ist die Funktion f(x) weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

2.2.1 Das Einkaufszentrum öffnet um 8:00 Uhr. Zwei Stunden später ist es 10:00 Uhr. Es müssen also die Funktionswerte an den Stellen $t = 8$ und $t = 10$ berechnet werden:
$f(8) = -8^3 + 30 \cdot 8^2 - 225 \cdot 8 + 520 = 128$
$f(10) = -10^3 + 30 \cdot 10^2 - 225 \cdot 10 + 520 = 270$
Um 8:00 Uhr erscheinen 128 Besucherinnen und Besucher im Einkaufszentrum. Zwei Stunden später befinden sich dort 270 Besucherinnen und Besucher.

2.2.2 Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunktes ist $f'(t) = 0$, die hinreichende Bedingung ist $f''(t) \neq 0$ und $f''(t) > 0$ für einen Tiefpunkt und $f''(t) < 0$ für einen Hochpunkt.

Zuerst werden die ersten beiden Ableitungen mithilfe der Potenzregel für Ableitungen ganzrationaler Funktionen gebildet:
$f'(t) = -3t^2 + 60t - 225$
$f''(t) = -6t + 60$

Es muss $f'(t) = 0$ gelten.

TIPP Der Operator ist „berechnen“. Die Gleichung muss „per Hand“ gelöst werden.

Mithilfe der pq-Formel gilt:

$$\begin{aligned}
-3t^2 + 60t - 225 &= 0 && \mid :(-3)\\
t^2 - 20t + 75 &= 0 && \mid \text{pq-Formel}\\
t_{1/2} &= 10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 75}\\
t_{1/2} &= 10 \pm \sqrt{25}\\
t_{1/2} &= 10 \pm 5\\
t_1 &= 15\\
t_2 &= 5
\end{aligned}$$

Da $t_2 = 5$ außerhalb des Definitionsbereichs liegt, wird nur die Extremstelle $t_1 = 15$ genauer betrachtet:
$f''(15) = -6 \cdot 15 + 60 = -30 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Hochpunkt

Teil II: Analysis / Vorschlag A

Aufgaben BE

2 Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Hinweis: Lösungen sind, falls nötig, auf zwei Nachkommastellen zu runden.

2.1 Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 5. Grades in der Form $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$, die einen Wendepunkt in $WP_1(3|-21{,}75)$ aufweist. Die zugehörige Wendetangente besitzt die Steigung $m = -61{,}25$.

2.1.1 Ermitteln Sie ein lineares Gleichungssystem, mit dem die ganzrationale Funktion 5. Grades bestimmt werden kann.

Hinweis: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem nicht. 8

Die zugehörige ganzrationale Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{15}{2}x^3 + 40x$$

2.1.2 Der Graph von f weist einen Tiefpunkt in $TP(4|-64)$ und einen Hochpunkt in $HP(-4|64)$ auf.
Berechnen Sie die Art und Lage der fehlenden Extrempunkte. 14

2.1.3 Ein Wendepunkt des Graphen f befindet sich in $WP_1(3|-21{,}75)$.
Geben Sie alle weiteren Wendepunkte von f an.
Begründen Sie Ihre Lösung. 6

2.1.4 Zeichnen Sie den Graphen f mithilfe einer Wertetabelle im Intervall $[-5; 5]$ in Material 2, Abbildung 2.1.

Hinweis: Eine Wertetabelle ist nicht anzugeben. 6

2.1.5 Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Wendetangente des Graphen f in $WP_1(3|-21{,}75)$.
Erklären Sie, dass deren Steigung $m = -61{,}25$ lediglich in einem weiteren Punkt des Graphen f vorkommen kann. 6

2.1.6 Der Graph von f soll derart in y-Achsenrichtung verschoben werden, dass der verschobene Graph eine berührende Nullstelle im I. Quadranten und nur noch eine schneidende Nullstelle mit negativem x-Wert aufweist.
Geben Sie die Funktionsgleichung der verschobenen Funktion an.
Begründen Sie Ihre Lösung. 4

2.2 Gegeben ist folgende ganzrationale Funktion mit Parameter:

$g_a(x) = \frac{1}{a}x^3 - x$ mit $a \neq 0$

2.2.1 Gegeben ist folgende Rechnung:

I $\quad \frac{1}{a}x^3 - x = 0$

II $\quad x \cdot \left(\frac{1}{a}x^2 - 1\right) = 0$

III $\quad x_1 = 0$ oder $\frac{1}{a}x^2 - 1 = 0$

IV $\quad \frac{1}{a}x^2 = 1$

V $\quad x^2 = a$

VI $\quad x_{2/3} = \pm\sqrt{a}$

Erklären Sie jeden der Rechenschritte I – VI.
Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen für die Fälle $a < 0$ und $a > 0$. 8

2.2.2 In Material 2, Abbildung 2.2 sind zwei mögliche Funktionsgraphen von g_a dargestellt.
Ordnen Sie auf Grundlage des Globalverhaltens die Funktionsgraphen den beiden Fällen $a < 0$ beziehungsweise $a > 0$ zu. 6

2.2.3 Untersuchen Sie, ob der Parameter a das Symmetrieverhalten von g_a beeinflusst. 2

2.3 In Material 2, Abbildung 2.3 ist der Graph h einer Funktion $h(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5$ gezeichnet.

2.3.1 Weisen Sie mittels einer Rechnung nach, dass der Graph von h die x-Achse lediglich an der Stelle $x = 2$ schneidet. 7

TIPP Lösungshinweise zum Teil II: Analysis / Vorschlag A

Teilaufgabe 2.1.1

Dies ist eine Steckbrief-/Rekonstruktionsaufgabe. Welche Bedingungen können Sie der Aufgabe entnehmen?

Die Funktionsgleichung enthält drei Parameter. Sie müssen also drei Gleichungen aus den Bedingungen aufstellen.

Laut Aufgabenstellung müssen Sie das lineare Gleichungssystem nicht lösen.

Teilaufgabe 2.1.2

Was sind die Bedingungen für das Vorliegen eines Extrempunktes?

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunktes ist $f'(x) = 0$, die hinreichende Bedingung ist $f''(x) \neq 0$ und $f''(x) > 0$ für einen Tiefpunkt und $f''(x) < 0$ für einen Hochpunkt.

Wenden Sie das Substitutionsverfahren an und lösen Sie die Gleichung mit der pq-Formel.

Vergessen Sie nicht die Resubstitution.

Die y-Koordinate wird durch Einsetzen in die Funktion f ermittelt.

Teilaufgabe 2.1.3

Welche Eigenschaft der Funktion bringt Sie auf die fehlenden Wendepunkte?

Nutzen Sie die Punktsymmetrie der Funktion f.

Beim Operator „angeben" wird keine Rechnung benötigt.

Teilaufgabe 2.1.5

Eine Tangente ist immer eine Gerade. Ihre Funktionsgleichung lautet $y = mx + b$, wobei m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt ist.

Die Steigung m der Tangente an der Wendestelle ist die gleiche, die die Funktion f an der Wendestelle $x = 3$ hat.

Das heißt, dass der Wert der Steigung der gleiche ist wie der Wert der Ableitung an der Stelle 3.

Der y-Achsenabschnitt b wird durch Einsetzen der Koordinaten des Wendepunktes und der Steigung in die Geradengleichung berechnet.

In welchen Bereichen hat der Graph negative Steigungen und in welchen Punkten ist die Steigung am steilsten?

2.1.1 Dies ist eine Steckbrief-/Rekonstruktionsaufgabe. Laut Aufgabenstellung geht es um eine Funktion 5. Grades in der Form $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$. Für die ersten beiden Ableitungen gilt:

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$
$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$$
$$f''(x) = 20ax^3 + 6bx$$

Bei der vorliegenden Funktion 5. Grades werden drei Bedingungen und somit drei Gleichungen benötigt, um ein geeignetes lineares Gleichungssystem zu erhalten (die Unbekannten sind a, b und c).

Bedingungen 1 und 2: Es gibt den Wendepunkt $WP_1(3\,|\,-21{,}75)$. Daraus folgen die Bedingungen $f(3) = -21{,}75$ (der Funktionswert an der Stelle 3) und $f''(3) = 0$ (der Wert der zweiten Ableitung ist in Wendepunkten gleich 0). Dies in f(x) und f''(x) eingesetzt ergibt:

$f(3) = 243a + 27b + 3c = -21{,}75$ und

$f''(3) = 540a + 18b = 0$

Bedingung 3: Weiterhin hat die Funktion an der Wendestelle $x = 3$ die Steigung $m = -61{,}25$. Die Tangente an der Wendestelle hat die gleiche Steigung wie die Funktion an der Wendestelle. Daraus resultiert die Bedingung $f'(3) = -61{,}25$. Eingesetzt ergibt dies:

$f'(3) = 405a + 27b + c = -61{,}25$

Daraus folgt das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 243a + 27b + 3c = -21{,}75 \\ \text{II} & 540a + 18b = 0 \\ \text{III} & 405a + 27b + c = -61{,}25 \end{array}$$

TIPP Laut Aufgabenstellung muss das lineare Gleichungssystem nicht gelöst werden.

2.1.2 Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extrempunktes ist $f'(x) = 0$, die hinreichende Bedingung ist $f''(x) \neq 0$ und $f''(x) > 0$ für einen Tiefpunkt und $f''(x) < 0$ für einen Hochpunkt. Es werden zunächst die ersten beiden Ableitungen der Funktion f gebildet:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{15}{2}x^3 + 40x$$
$$f'(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{45}{2}x^2 + 40$$
$$f''(x) = 5x^3 - 45x$$

Die erste Ableitung wird gleich null gesetzt:

$$\frac{5}{4}x^4 - \frac{45}{2}x^2 + 40 = 0$$

Um diese Gleichung zu lösen, wird substituiert: $x^2 = z$

$$\frac{5}{4}z^2 - \frac{45}{2}z + 40 = 0$$

Mit der pq-Formel folgt:

$$\frac{5}{4}z^2 - \frac{45}{2}z + 40 = 0 \qquad \Big| : \frac{5}{4}$$

$$z^2 - 18z + 32 = 0$$

$$z_{1/2} = 9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 32}$$

$$z_{1/2} = 9 \pm \sqrt{49}$$

$$z_{1/2} = 9 \pm 7$$

$$z_1 = 16$$

$$z_2 = 2$$

Nun muss resubstituiert werden: $x^2 = z \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm\sqrt{z}$

$z_1 = 16 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm\sqrt{16} \;\Rightarrow\; x_1 = 4$ und $x_2 = -4$

$z_2 = 2 \;\Rightarrow\; x_{3/4} = \pm\sqrt{2} \;\Rightarrow\; x_3 = \sqrt{2}$ und $x_4 = -\sqrt{2}$

x_1 und x_2 sind bereits bekannt, x_3 und x_4 sind die gesuchten fehlenden Extremstellen.

Nun wird die hinreichende Bedingung überprüft:

$f''(\sqrt{2}) = -35\sqrt{2} < 0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt

$f''(-\sqrt{2}) = 35\sqrt{2} < 0 \;\Rightarrow$ Tiefpunkt

Um die y-Koordinate der Extrempunkte zu berechnen, wird die x-Koordinate in die Funktion f eingesetzt:

$f(\sqrt{2}) \approx 36{,}77 \quad\Rightarrow\quad HP(\sqrt{2} \,|\, 36{,}77)$

$f(-\sqrt{2}) \approx -36{,}77 \quad\Rightarrow\quad TP(-\sqrt{2} \,|\, -36{,}77)$

2.1.3 Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 5. Grades mit nur ungeraden Exponenten, d. h., es liegt eine Punktsymmetrie zum Ursprung vor. Aufgrund dieser Symmetrie muss ein Wendepunkt im Ursprung liegen, also $WP_2(0\,|\,0)$. Der andere Wendepunkt muss drehsymmetrisch um 180° zum gegebenen Wendepunkt im II. Quadranten liegen, also $WP_3(-3\,|\,21{,}75)$.

TIPP Der Operator ist „angeben“, Sie können diese Aufgabe ohne Rechnung lösen.