2024

Zentrale P...

Original-Prüfu...
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium · Gesamts...

Mathematik 1...

+ Übungsaufgaben
+ Hinweise zum Ablauf der Prüf...

PDF

STARK

Inhaltsverzeichnis

Original-Prüfungsaufgaben

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode auf der Umschlaginnenseite).

Bei **MyStark** findest du:
- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil
- **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht

Den Zugangscode zu MyStark findest du auf der Umschlaginnenseite.

Autor der Übungsaufgaben, Tipps und Lösungen:
Udo Mühlenfeld

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch erhältst du eine optimale Hilfestellung zur Vorbereitung auf die ZP10 an Gymnasien mit G9.

- Im ersten Teil des Buches findest du viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Zentrale Prüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2024 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Du findest darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die dir sowohl bei der Vorbereitung auf die ZP10 als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben** im Stil der Zentralen Prüfung sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Prüfungsaufgaben 2019 und 2021 bis 2023**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unserem Autor **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die dir das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem erhältst du zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  – **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil A
  – **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht

  Den Zugangscode zu MyStark findest du auf der Umschlaginnenseite.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Zentralen Prüfung 2024 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, findest du aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Der Stark Verlag und ich wünschen dir viel Erfolg bei der Abiturvorbereitung und bei deiner Prüfung!

Udo Mühlenfeld

Hinweise und Tipps zur Zentralen Prüfung

1 Ablauf der Prüfung

1.1 Die Zentrale Prüfung

In Nordrhein-Westfalen wird an Gymnasien mit G9 der Mittlere Schulabschluss (MSA) am Ende der Klasse 10 erworben. Dafür legen die Schülerinnen und Schüler schriftliche Prüfungen in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik ab.
Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Prüfung sind die Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans in der aktuell gültigen Fassung.

1.2 Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die zentrale Prüfung in Mathematik besteht aus zwei Prüfungsteilen:

- Prüfungsteil A besteht aus einzelnen, nicht aufeinander aufbauenden Teilaufgaben, mit denen grundlegende Kompetenzen aus den folgenden Inhaltsbereichen überprüft werden:
  - Arithmetik/Algebra
  - Funktionen
  - Geometrie
  - Stochastik

  Damit durch die Aufgaben auch Grundideen und Grundvorstellungen erfasst werden, können diese auch Teile enthalten, bei denen Argumentationen und Darstellungswechsel im Vordergrund stehen.
  Außer Zirkel und Geodreieck (sowie Papier und Stift) sind keine Hilfsmittel zugelassen.

- Im Prüfungsteil B werden drei komplexere Aufgaben gestellt, die innerhalb eines Kontextes mehrere Teilaufgaben beinhalten. Hier werden die oben genannten Inhaltsbereiche (Gegenstände) mit den folgenden Kompetenzbereichen (Prozessen) verknüpft:
  - Operieren
  - Modellieren
  - Problemlösen
  - Argumentieren
  - Kommunizieren

  Zur Bearbeitung der Aufgaben können auch Kompetenzen erforderlich sein, die die Schülerinnen und Schüler in früheren Jahrgangsstufen erworben haben. Zugelassene Hilfsmittel sind Zirkel, Geodreieck, Formelsammlung und Taschenrechner (mit oder ohne Grafikfähigkeit).

Bis 2022 waren im Prüfungsteil I (entspricht Prüfungsteil A) Hilfsmittel zugelassen. Dennoch eignen sich die meisten Aufgaben aus den Prüfungen bis 2022 zum Üben, um sich über die verwendeten Aufgabenformate sowie die Höhe und den Umfang der Anforderungen zu informieren.
In den Jahren 2021 und 2022 gab es coronabedingt im Prüfungsteil I (entspricht Prüfungsteil A) zwei Wahlmöglichkeiten. Hier konnten die Lehrerinnen und Lehrer wählen, welche Aufgaben ihre Schülerinnen und Schüler bearbeiten sollen.

1.3 Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen den Schülerinnen und Schülern insgesamt 130 Minuten zur Verfügung. Dabei entfallen 30 Minuten auf Prüfungsteil A und 90 Minuten auf den Prüfungsteil B. Zusätzlich gibt es eine Bonuszeit von 10 Minuten auf den Prüfungsteil A **oder** den Prüfungsteil B.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2024

2.1 Prüfungsteil A (Mathematik ohne Hilfsmittel)

Für die anfangs genannten Inhaltsbereiche werden mögliche Schwerpunkte genannt:
- Arithmetik/Algebra
  - Umgang mit Größen und Maßeinheiten
  - grundlegende algebraische Operationen
  - Bruch-, Prozent-, Dezimal-, Wurzel- und Potenzschreibweise anwenden
  - Lösungsverfahren und Algorithmen nutzen
- Funktionen
  - erweiterte Grundvorstellungen, Darstellungswechsel (Text, Term, Tabelle, Graph)
  - Einfluss von Parametern
  - lineare, quadratische und exponentielle Funktionen

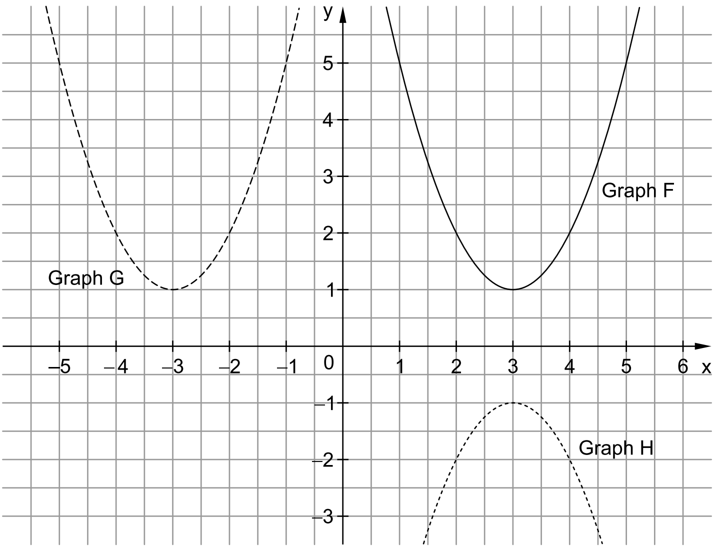
Prüfung 1 im Stil der ZP10 ▪ NRW Mathematik

Gymnasium

Prüfungsteil I

Aufgabe 1

Die Abbildung zeigt den Graphen F einer quadratischen Funktion f sowie die Graphen G und H, die dadurch entstehen, dass der Graph F an der y- bzw. x-Achse gespiegelt wird.



a) Kreuze die zur Funktion f gehörigen Gleichungen an (mehrere Lösungen möglich):

☐ $f(x) = x^2 - 6x + 10$

☐ $f(x) = (x+1)^2 + 3$

☐ $f(x) = (x-3)^2 + 1$

☐ $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$

b) Gib die zu den Funktionen g bzw. h gehörigen Gleichungen an.

c) Begründe, warum der Punkt $P(0\,|\,10)$ sowohl auf dem Graphen F als auch auf dem Graphen G liegt.

Aufgabe 2

a) Gib die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen an:

(1) $(x-3)(x+5)=0$

(2) $(x-4)^2=0$

(3) $x^2+6=0$

(4) $x^2+8x+16=0$

b) Gib zu den folgenden Lösungen jeweils eine passende quadratische Gleichung an:

(1) $x=7 \vee x=-3$

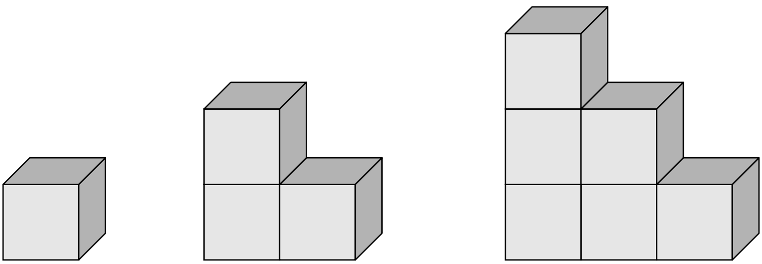
(2) $x=\sqrt{8} \vee x=-\sqrt{8}$

(3) $x=5$

Aufgabe 3

Frauke baut aus Würfeln, deren Volumen 1 cm^3 beträgt, stufenförmige Bauwerke.

Bauwerk 1 Bauwerk 2 Bauwerk 3



Ergänze die folgende Tabelle:

Bauwerk Nr. n	1	2	3	4
Volumen in cm^3				
Gesamte Oberfläche in cm^2				
Anzahl der benötigten Würfel für die ersten n Bauwerke				

TIPP **Lösungshinweise zum Prüfungsteil I**

Teilaufgabe 1 a

Überprüfe, ob es sich bei dem Graphen F um eine verschobene Normalparabel handelt.

Stelle dann die Funktionsgleichung auf und überprüfe, zu welchen gegebenen Gleichungen diese äquivalent ist.

Umgekehrt kannst du überlegen, wie die Graphen der vier gegebenen Funktionen aussehen, und diese mit dem Graphen F vergleichen.

Teilaufgabe 1 b

Überlege, durch welche geometrischen Abbildungen die Graphen G und H aus dem Graphen F hervorgehen.

Untersuche die Auswirkungen dieser Abbildungen auf die Punkte des Graphen, insbesondere auf den Scheitelpunkt.

Teilaufgabe 1 c

Dieser Nachweis kann rechnerisch erfolgen.

Ein Teil der Rechnung kann durch Symmetrieüberlegungen oder Eigenschaften der Normalparabel ersetzt werden.

Teilaufgabe 2 a

Vorteilhaft ist stets die Produktdarstellung: Ein Produkt ist gleich null, wenn einer der beiden Faktoren gleich null ist.

Du kannst dazu auch die binomischen Formeln verwenden.

Teilaufgabe 2 b

Nutze wieder die Produktdarstellung für die quadratischen Gleichungen.

Es gibt keine eindeutige Lösung, da du stets die Gleichung mit einer reellen Zahl ungleich Null multiplizieren kannst. Beschränke dich auf die einfachste Lösung.

Aufgabe 3

Überlege zunächst, wie du vorgehst, um das nächste Bauwerk zu bauen.

„Gesamte Oberfläche“ bedeutet, dass nicht nur die in der Abbildung sichtbare Oberfläche betrachtet werden soll.

Achte genau auf den Text. Es ist nach der Summe der Würfel gefragt.

Teilaufgabe 4 a

Dem Text kannst du die Farben und die jeweilige Anzahl der Kugeln zu Beginn entnehmen.

Prüfe, ob es sich um ein Ziehen mit oder ohne Zurücklegen handelt.

Lösungsvorschlag zum Prüfungsteil I

Aufgabe 1

a) ☒ $f(x) = x^2 - 6x + 10$

☐ $f(x) = (x+1)^2 + 3$

☒ $f(x) = (x-3)^2 + 1$

☐ $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$

TIPP Wird der x-Wert vom Scheitelpunkt aus gesehen um 1 erhöht oder erniedrigt, nimmt der y-Wert um 1 zu. Die Parabel hat also die Form einer Normalparabel. Sie wird um drei Einheiten nach rechts und eine Einheit nach oben verschoben. Somit gilt:

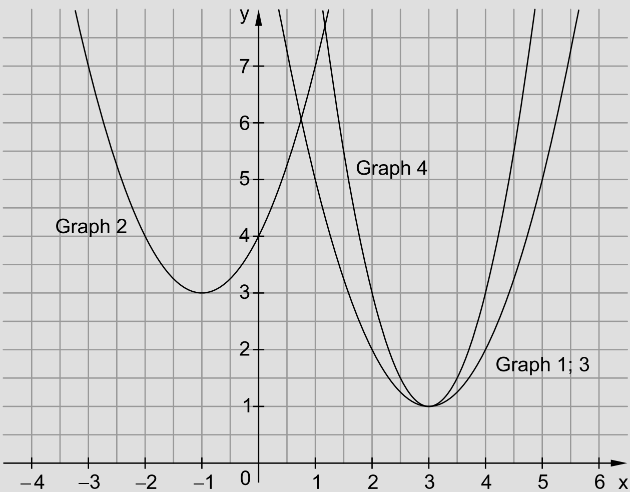
$f(x) = (x-3)^2 + 1 = x^2 - 6x + 10$

Umgekehrte Überlegung:
Für die erste Funktion gilt:
$f(2) = 2$; $f(3) = 1$; $f(4) = 2$

Für die zweite Funktion gilt:
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten (–1 | 3).

Für die dritte Funktion gilt:
Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten (3 | 1).

Für die vierte Funktion gilt:
Wegen des Faktors 2 ist die Parabel enger als eine Normalparabel.



b) $g(x) = (x+3)^2 + 1$
$h(x) = -(x-3)^2 - 1$

TIPP G entsteht aus F durch Spiegelung an der y-Achse. Beim Scheitelpunkt ändert sich nur das Vorzeichen des x-Wertes.
H entsteht aus F durch Spiegelung an der x-Achse. Bei allen Punkten ändert sich das Vorzeichen des y-Wertes, es gilt also $h(x) = -f(x)$.

c) $f(x) = (x-3)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f(0) = 10$
$g(x) = (x+3)^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 10$

Alternative Lösung:
Es gilt $f(0) = 10$. G entsteht aus F durch Spiegelung an der y-Achse. Der Punkt $(0\,|\,10)$ liegt auf der Symmetrieachse und gehört somit auch zu G.

Alternative Lösung:
G und F sind verschobene Normalparabeln. Wird der x-Wert des Scheitelpunktes von F um 3 erniedrigt bzw. der x-Wert des Scheitelpunktes von G um 3 erhöht, steigt der y-Wert jeweils um $3^2 = 9$ von 1 auf 10.

Aufgabe 2

a) Es ergeben sich folgende Lösungen:
(1) $(x-3)(x+5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \vee x = -5$
(2) $(x-4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$
(3) $x^2 + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -6$ hat keine Lösung
(4) $x^2 + 8x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$

TIPP Die Angaben der Lösungen genügen.

b) Folgende Gleichungen sind möglich:
(1) $(x-7)(x+3) = 0$
(2) $(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8}) = 0$
(3) $(x-5)^2 = 0$

Aufgabe 2: Wassermelonen

Für ein Schulprojekt beschäftigt sich Sinja mit der Form und dem Wachstum von Wassermelonen.
Sinja hat eine nahezu kugelförmige Wassermelone gekauft, die einen Durchmesser von ca. 25 cm hat (Abbildung 1).

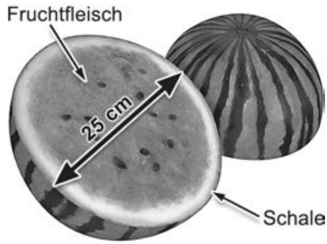


Abbildung 1: aufgeschnittene Wassermelone

a) Zeige rechnerisch, dass diese Wassermelone ein Volumen von $V \approx 8\,200\ \text{cm}^3$ hat.

b) Die Schale der Wassermelone hat eine Dicke von 1,5 cm (Abbildung 1).
Berechne den prozentualen Anteil des Fruchtfleisches an der ganzen Wassermelone.

Sinja entdeckt würfelförmige Wassermelonen, die in Japan verkauft werden (Abbildung 2).

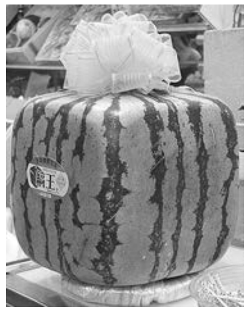


Abbildung 2: würfelförmige Wassermelone

c) Eine würfelförmige Wassermelone hat ebenfalls ein Volumen von $V = 8\,200\ \text{cm}^3$.
Bestätige durch eine Rechnung, dass diese Wassermelone eine Kantenlänge von ca. 20,2 cm hat.

d) Entscheide durch eine Rechnung, ob die kugelförmige oder die würfelförmige Wassermelone eine größere Oberfläche hat.

Wassermelonen verdoppeln ihr Gewicht pro Woche unter idealen Wachstumsbedingungen. Sinja überlegt, wie sich das Gewicht einer 400 g schweren Wassermelone unter idealen Bedingungen voraussichtlich entwickelt. Sie erstellt dazu eine Tabelle.

Beobachtungswoche	0	1	2	…
Gewicht in g	400	800	1 600	…

e) Berechne das Gewicht der Wassermelone nach 4 Wochen.

f) Sinja behauptet: „Der Graph in Abbildung 3 beschreibt das Wachstum dieser Wassermelone."
Hat Sinja recht? Begründe deine Entscheidung.

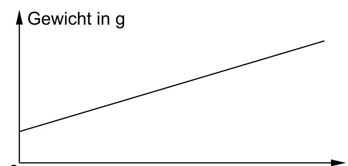


Abbildung 3: Graph zum Wachstum der Wassermelone

Teilaufgabe 2 a

Die Formel für das Volumen einer Kugel findest du in der Formelsammlung.

Im Text ist der Durchmesser angegeben. Den Radius musst du noch berechnen.

Teilaufgabe 2 b

Das Innere der Wassermelone mit dem Fruchtfleisch kann ebenso als kugelförmig angesehen werden.

Berechne zunächst den zugehörigen Radius.

Die ganze Wassermelone stellt den Grundwert dar, das Fruchtfleisch den Prozentwert.

Teilaufgabe 2 c

Die Formel für das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a musst du nach a auflösen.

Das Würfelvolumen V ist in der Aufgabe gegeben.

Teilaufgabe 2 d

Die Formelsammlung informiert über die zugehörigen Formeln zur Berechnung der Oberfläche.

Achte bei der kugelförmigen Wassermelone auf den richtigen Radius.

Vergiss nicht, die beiden Rechenergebnisse miteinander zu vergleichen.

Teilaufgabe 2 e

Die Entwicklung des Gewichts ist im Text beschrieben und wird zudem in der Tabelle deutlich.

Du sollst das Gewicht nach 4 Wochen berechnen, das entspricht nicht der nächsten Tabellenspalte, sondern der übernächsten.

Teilaufgabe 2 f

Überlege, welche Art von Wachstum durch den Graphen in Abbildung 3 beschrieben wird.

Überprüfe anhand der Tabelle, ob dieses Wachstum hier vorliegt.

Teilaufgabe 3 a

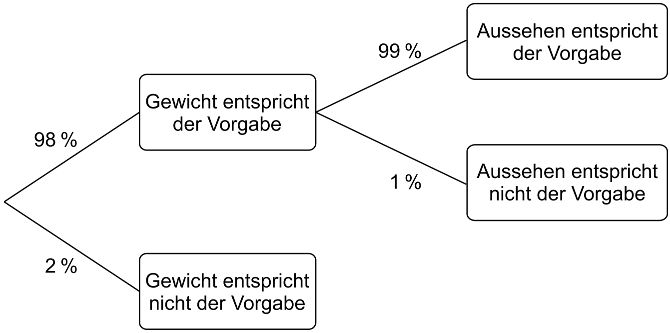
Du musst überprüfen, ob zum x-Wert 3 der Funktionswert 1 gehört.

Die Funktionsgleichung ist angegeben.

Teilaufgabe 3 b

Nutze die Symmetrieeigenschaften der Parabel, die in der Abbildung 1 deutlich werden.

d) Alle Rösti, die das Gewicht nicht erfüllen, werden direkt aussortiert. Rösti, die das Gewicht nicht erfüllen, werden also nicht mehr auf ihr Aussehen untersucht.



e) Ein Rösti wird aussortiert, wenn das Gewicht nicht der Vorgabe entspricht (2 %) bzw. das Gewicht, aber nicht das Aussehen der Vorgabe entspricht ($98\,\% \cdot 1\,\% = 0{,}98 \cdot 0{,}01 = 0{,}0098$).

Mit der 2. Pfadregel ergibt sich:
P(Ein Rösti wird aussortiert) $= 0{,}02 + 0{,}0098 = 0{,}0298$

Berechnung der Anzahl n der kontrollierten Röstis:

$$n \cdot 0{,}0298 = 447 \quad \big| : 0{,}0298$$
$$n = 15\,000$$

Es wurden vermutlich 15 000 Rösti kontrolliert.

Aufgabe 2

a) Für das Volumen V einer Kugel mit dem Radius r gilt:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Wenn die Wassermelone einen Durchmesser von etwa 25 cm hat, beträgt der Radius etwa 12,5 cm. Damit ergibt sich für das Volumen der Wassermelone:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (12{,}5\text{ cm})^3 = 8\,181{,}23\ldots\text{ cm}^3 \approx 8\,200\text{ cm}^3$$

b) Das Innere der Wassermelone hat einen Durchmesser von $25\text{ cm} - 2 \cdot 1{,}5\text{ cm} = 22\text{ cm}$ und somit einen Radius von 11 cm.

Für das Volumen V_{innen} des Fruchtfleisches gilt also:

$$V_{innen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (11\text{ cm})^3 \approx 5\,575\text{ cm}^3$$

Der prozentuale Anteil an der ganzen Wassermelone beträgt:

$$\frac{V_{innen}}{V} = \frac{5\,575\text{ cm}^3}{8\,200\text{ cm}^3} \approx 0{,}68 = 68\,\%$$

c) Für das Volumen V eines Würfels mit der Kantenlänge a gilt:
$V = a^3$

Einsetzen und Auflösen nach a ergibt:
$8\,200\text{ cm}^3 = a^3$
$$a = \sqrt[3]{8\,200\text{ cm}^3} \approx 20{,}2\text{ cm}$$

d) Für die kugelförmige Wassermelone mit dem Radius $r = 12{,}5$ cm gilt:
$O_{\text{Kugel}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (12{,}5\text{ cm})^2 \approx 1\,963\text{ cm}^2$

Für die würfelförmige Wassermelone mit der Kantenlänge $a = 20{,}2$ cm gilt:
$O_{\text{Würfel}} = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot (20{,}2\text{ cm})^2 \approx 2\,448\text{ cm}^2$

Der Vergleich der beiden Werte ergibt:
$1\,963\text{ cm}^2 < 2\,448\text{ cm}^2$
Also hat die würfelförmige Wassermelone bei gleichem Volumen eine größere Oberfläche.

e) Nach 2 Wochen beträgt das Gewicht 1 600 g. Nach 4 Wochen hat sich das Gewicht zweimal verdoppelt:
$1\,600\text{ g} \cdot 2 \cdot 2 = 6\,400\text{ g}$
Nach 4 Wochen hat die Wassermelone ein Gewicht von 6 400 g.

Alternative Lösung:
Das Gewicht kann auch schrittweise berechnet werden:
Nach 3 Wochen: $1\,600\text{ g} \cdot 2 = 3\,200\text{ g}$
Nach 4 Wochen: $3\,200\text{ g} \cdot 2 = 6\,400\text{ g}$

f) Der Graph in Abbildung 3 stellt ein lineares Wachstum dar. Das bedeutet, dass sich in gleichen Zeiträumen das Gewicht gleichmäßig erhöht.
Das ist hier aber nicht der Fall. Das Gewicht verdoppelt sich von Woche zu Woche. Die Tabelle sagt aus, dass das Gewicht in der ersten Woche von 400 g auf 800 g steigt, also um 400 g zunimmt. In der zweiten Woche nimmt es von 800 g auf 1 600 g zu, also um 800 g. Somit ist das Wachstum nicht linear.

Aufgabe 3

a) Der Wert $x = 3$ wird in die Funktionsgleichung eingesetzt:
$y = f(3) = -0{,}5 \cdot 3^2 + 5{,}5 = -4{,}5 + 5{,}5 = 1$
Der berechnete Funktionswert stimmt mit dem gegebenen überein, also liegt A_1 auf der Parabel.