2024 Mittlerer Schulabschluss

Original-Prüfungsaufgaben und Training

MEHR ERFAHREN

Realschule · Gesamtschule EK · Sekun

Nordrhein-Westfalen

Mathematik 10. Klasse

+ *Ausführliche Lösungen*
+ *Hinweise und Tipps*
+ *PDF zum Download*

LÖSUNGEN

STARK

Inhalt

Vorwort

Training Grundwissen

1 Wiederholung 5. – 9. Klasse
Kapitel 1 enthält keine Aufgaben; deshalb sind keine Lösungen zu diesem Kapitel abgedruckt.
2 Lineare Funktionen – Lineare Gleichungssysteme 1
3 Quadratische Funktionen und Gleichungen 10
4 Exponentialfunktionen und Wachstumsprozesse 23
5 Grafische Darstellungen und Diagramme 30
6 Rechtwinklige Dreiecke und Satz des Pythagoras 34
7 Trigonometrie 37
8 Kreis 46
9 Körper 49
10 Stochastik 66
11 Arbeiten mit einer Tabellenkalkulation 76

Aufgabe im Stil der Zentralen Prüfung

Prüfungsteil 1 – Variante A 77
Prüfungsteil 1 – Variante B 81
Prüfungsteil 1 – Variante C 83
Prüfungsteil 2 86

Zentrale Prüfungen

Zentrale Prüfung 2018 2018-1
Zentrale Prüfung 2019 2019-1

Wegen des Corona-Virus wurden 2020 die Zentralen Prüfungen in Klasse 10 ersetzt durch Prüfungsarbeiten, die dezentral von den Lehrkräften erstellt wurden. Für 2020 können daher keine Original-Aufgaben und Lösungen dazu abgedruckt werden.

Zentrale Prüfung 2021 2021-1
Zentrale Prüfung 2022 2022-1

Zentrale Prüfung 2023 ..... **www.stark-verlag.de/mystark**
Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, kannst du die Lösungen als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen. Den Zugangscode findest du auf der Umschlaginnenseite.

Autoren:
Training: Christoph Borr, Karl-Heinz Kuhlmann, Wolfgang Matschke,
Marc Möllers, Dietmar Steiner
Lösungen der Prüfungsaufgaben: Wolfgang Matschke, Marc Möllers

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dies ist der Lösungsband zu dem Band *Mittlerer Schulabschluss 2024, Nordrhein-Westfalen, Mathematik 10. Klasse, Realschule, Gesamtschule EK, Sekundarschule* (Best.-Nr. D05100). Er enthält zu allen Aufgaben von unseren Autoren ausgearbeitete Lösungen, die jeden Rechenschritt ausführlich erklären. Zahlreiche Skizzen zur Veranschaulichung helfen dir beim Nachvollziehen von Sachverhalten.

Versuche stets, jede Aufgabe zunächst selbstständig zu lösen und dann deine Lösung mit den Lösungen im Buch zu vergleichen. Nur was du dir selbst erarbeitet hast, bleibt im Gedächtnis und du lernst dazu. Halte dich deswegen konsequent daran, jede Aufgabe zunächst selbst zu rechnen. Hast du eine Aufgabe nicht richtig gelöst, ist es besonders wichtig, diese zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal durchzurechnen.

Durch das Üben wirst du dich sicher fühlen und kannst beruhigt in die Prüfung gehen.

Wir wünschen dir viel Erfolg!

3 Quadratische Funktionen und Gleichungen

15 Setze die Koordinaten der Punkte für x und y in die Gleichung $y = a \cdot x^2$ ein und berechne aus der so entstandenen Gleichung den Koeffizienten a.

a) $P(2|-2)$

$-2 = a \cdot 2^2$

$a = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2} \cdot x^2$

b) $Q(-5|12{,}5)$

$12{,}5 = a \cdot (-5)^2$

$a = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{2} \cdot x^2$

c) $A(-2{,}5|-18{,}75)$

$-18{,}75 = a \cdot (2{,}5)^2$

$a = -3$

$y = -3 \cdot x^2$

d) $B(2|-4)$

$-4 = a \cdot 2^2$

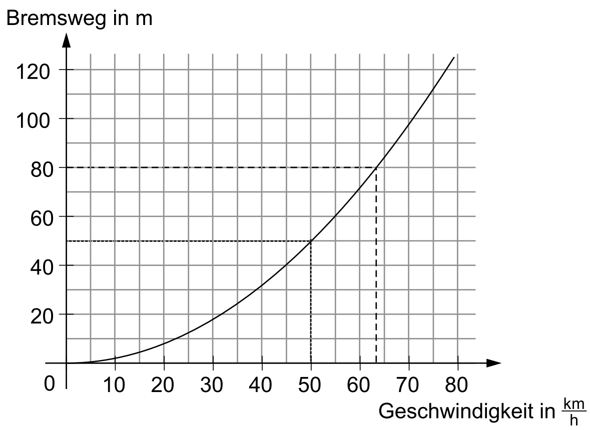
$a = -1$

$y = -x^2$

16

Faktor	Öffnung	Form der Parabel	Beispiel
$a > 1$	nach oben	schmaler als Normalparabel	$y = 2x^2$
$a = 1$	nach oben	Normalparabel	$y = x^2$
$0 < a < 1$	nach oben	breiter als Normalparabel	$y = \frac{1}{3} \cdot x^2$
$-1 < a < 0$	nach unten	breiter als Normalparabel	$y = -\frac{1}{2} \cdot x^2$
$a = -1$	nach unten	Normalparabel	$y = -x^2$
$a < -1$	nach unten	schlanker als Normalparabel	$y = -2 \cdot x^2$

17 a) Bei 50 $\frac{km}{h}$ ist der Bremsweg 50 m lang. (Ablesen aus der Grafik.)



b) Die maximale Geschwindigkeit beträgt etwa 63 $\frac{km}{h}$.

c) Man kann aus der Grafik möglichst präzise ein Wertepaar entnehmen, z. B. $(40|30)$ oder $(50|50)$, den Wert für x und y in die Funktionsgleichung einsetzen und dann nach a umformen.

$y = a \cdot x^2$

$30 = a \cdot 40^2$ *alternativ:* $50 = a \cdot 50^2$

$\frac{30}{1\,600} = a$ $\frac{50}{2\,500} = a$

$a = 0{,}01875$ $a = 0{,}02$

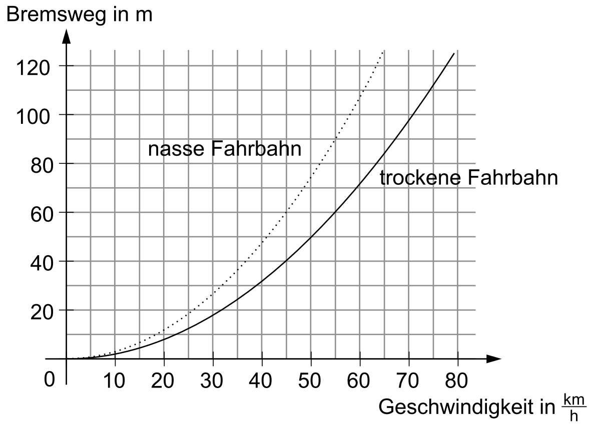
d) Es gilt: $y = 0{,}02 \cdot x^2$

Für $x = 30\ \frac{km}{h}$: $y = 0{,}02 \cdot 30^2 = 18$ m

Für $x = 80\ \frac{km}{h}$: $y = 0{,}02 \cdot 80^2 = 128$ m

Für $x = 130\ \frac{km}{h}$: $y = 0{,}02 \cdot 130^2 = 338$ m

e) Der Wert für a muss bei nasser Straße größer sein, da der Graph “steiler” verlaufen muss, das heißt, bei gleicher Geschwindigkeit muss der Bremsweg länger sein.
Möglicher Wert: $a = 0{,}03$

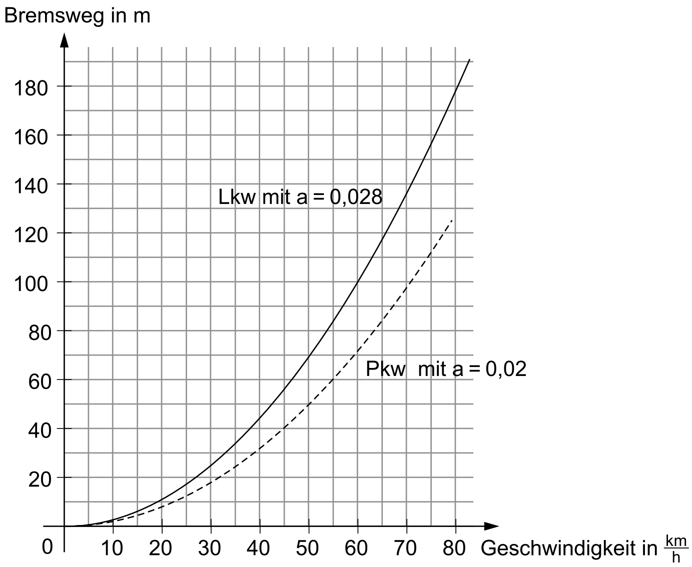


f) Für den Lkw gilt bei $x = 60$ ist $y = 100$, also:

$$y = a \cdot x^2$$
$$100 = a \cdot 60^2$$
$$\frac{100}{3\,600} = a$$
$$a = 0{,}02\overline{7} \approx 0{,}028$$

Der Bremsfaktor a beträgt etwa 0,028.

g) Darstellung im Graphen:



18

	x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
a)	$y = \frac{3}{4}x^2 - 3$	15,75	9	3,75	0	–2,25	–3	–2,25	0	3,75	9	15,75
b)	$y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$	–7,5	–3	0,5	3	4,5	5	4,5	3	0,5	–3	–7,5
c)	$y = 2x^2 - 3$	47	29	15	5	–1	–3	–1	5	15	29	47

Aufgabe im Stil der Zentralen Prüfung

Hinweise und Tipps

Prüfungsteil 1 – Variante A

Aufgabe 1

a) Mögliche Nebenrechnungen:

$0{,}025;\quad -2^{-2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4} = -0{,}25;\quad \frac{1}{25} = 0{,}04;\quad -0{,}04$

Lösung:

$-2^{-2} < -0{,}04 < 0{,}025 < \frac{1}{25}$

Wandle die Brüche in Dezimalzahlen um und beachte beim Vergleichen die Vorzeichen.

b) $83\,000\,000\,000 = 8{,}3 \cdot 10^{10}$

$0{,}0005 > 5 \cdot 10^{-5}$, denn $5 \cdot 10^{-5} = 0{,}00005$

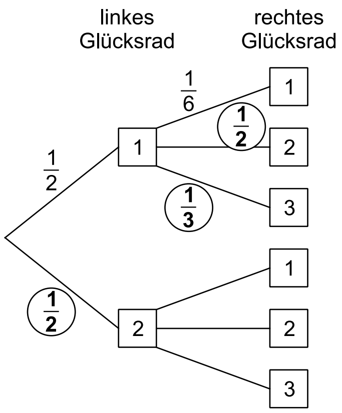
Wandle die wissenschaftliche Schreibweise um.

Aufgabe 2

a) Die größtmögliche Zahl lautet 23.

Das linke Glücksrad steht für die Zehner und das rechte Glücksrad für die Einer.

b)



Beachte, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten an einer Verzweigung immer 1 ergibt.

Beim rechten Glücksrad sind 3 von 6 Feldern mit „2“ beschriftet und 2 von 6 Feldern mit „3“:

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ und $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) $P(22) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Glücksräder die „2“ anzeigen, errechnet man mithilfe des Baumdiagramms aus Teilaufgabe b nach der Produktregel.

Aufgabe 3

a) Gegeben: Kantenlängen des Pools mit $a = 6\text{ m};\ b = 3\text{ m};\ c = 1{,}5\text{ m}$

Gesucht: Volumen des Quaders

Berechnung:

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 6\text{ m} \cdot 3\text{ m} \cdot 1{,}5\text{ m} = 27\text{ m}^3$

Gesamtkosten = Volumen · Kosten pro m^3

Gesamtkosten $= 27\text{ m}^3 \cdot \frac{4{,}50\ €}{\text{m}^3} = 121{,}50\ €$

☐ ca. 27 € ☐ ca. 80 € ☒ ca. 120 € ☐ ca. 240 €

Um die Kosten für eine Füllung abschätzen zu können, muss zunächst das Volumen des Pools (hier ein Quader) bestimmt werden.

Eine Überschlagsrechnung reicht hier aus, um das passende Ergebnis anzukreuzen.

Zentrale Prüfung 2019

✎ Hinweise und Tipps

Prüfungsteil 1

Aufgabe 1

Mögliche Nebenrechnungen:

$\frac{6}{10} = 0,6; \quad -0,626; \quad -6,26; \quad \frac{1}{6} = 0,166\ldots$

Lösung:

$-6,26 < -0,626 < \frac{1}{6} < \frac{6}{10}$

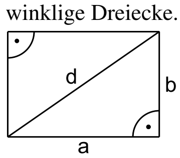
Wandle die Brüche in Dezimalzahlen um und beachte beim Vergleichen die Vorzeichen. Veranschauliche die Zahlen zur besseren Vorstellung ggf. auf einer Zahlengeraden.

Aufgabe 2

a) Nach Pythagoras gilt:

$$d^2 = a^2 + b^2$$
$$d^2 = (5\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 \quad |\sqrt{}$$
$$d = \sqrt{25\text{ cm}^2 + 9\text{ cm}^2}$$
$$d \approx 5,83\text{ cm}$$

Die Diagonale teilt das Rechteck in zwei rechtwinklige Dreiecke.



b) Für das Ausgangsrechteck gilt:

$A_{alt} = 5\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 15\text{ cm}^2$

Für das Rechteck mit doppelten Seitenlängen gilt:

$A_{neu} = (5\text{ cm} \cdot 2) \cdot (3\text{ cm} \cdot 2) = 60\text{ cm}^2$

Verhältnis der Flächeninhalte:

$\frac{A_{neu}}{A_{alt}} = \frac{60\text{ cm}^2}{15\text{ cm}^2} = 4$

Verdoppelt man die Seitenlängen a und b, dann vervierfacht sich der Flächeninhalt.

Bestimme die Fläche mit den ursprünglichen und den veränderten Seitenlängen und vergleiche.

Alternative Lösungsmöglichkeit:

$A_{alt} = a \cdot b$

$A_{neu} = 2a \cdot 2b = 4 \cdot a \cdot b = 4 \cdot A_{alt}$

Setze die verdoppelten Seitenlängen in die Formel ein und vergleiche mit der vorherigen Formel.

c) $a = 1\text{ cm}$ und $b = 24\text{ cm} \quad \rightarrow \quad A = 1\text{ cm} \cdot 24\text{ cm} = 24\text{ cm}^2$

$a = 2\text{ cm}$ und $b = 12\text{ cm} \quad \rightarrow \quad A = 2\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 24\text{ cm}^2$

Weitere Möglichkeiten:

$a = 3\text{ cm}$ und $b = 24\text{ cm}^2 : 3\text{ cm} = 8\text{ cm}$

$a = 4\text{ cm}$ und $b = 24\text{ cm}^2 : 4\text{ cm} = 6\text{ cm}$

$a = 5\text{ cm}$ und $b = 24\text{ cm}^2 : 5\text{ cm} = 4,8\text{ cm}$

usw.

Bestimme Seitenlängen a und b, deren Produkt 24 cm^2 beträgt, indem du für ein frei gewähltes a den Wert von b durch Division berechnest:

$b = 24\text{ cm}^2 : a$

Aufgabe 3

a) Der Wert von c entspricht der y-Koordinate des Scheitelpunkts der Parabel. Somit gilt $c = 3$.

Die Form der Funktionsgleichung zeigt, dass es sich um eine um den Betrag von c nach oben/unten verschobene Normalparabel handelt. Der Wert von c entspricht dabei der y-Koordinate des Scheitelpunkts.

✎ Hinweise und Tipps

Prüfungsteil 2

Aufgabe 1: Kaugummiautomat

a) Gegeben: Durchmesser: $d = 14\text{ mm} = 1{,}4\text{ cm}$
Radius: $r = d : 2 = 0{,}7\text{ cm}$

Gesucht: Volumen: V

Rechnung:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0{,}7\text{ cm})^3$$

$V = 1{,}436\ldots\text{ cm}^3$
$V \approx 1{,}44\text{ cm}^3$

Das Volumen einer Kaugummikugel beträgt ca. $1{,}44\text{ cm}^3$.

Alternative Lösungsmöglichkeit:

Gegeben: Volumen: $V = 1{,}44\text{ cm}^3$

Gesucht: Durchmesser: d

Rechnung:
Berechnung des Radius:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$1{,}44\text{ cm}^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad \Big|\cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{1{,}44\text{ cm}^3 \cdot 3}{4} = \pi \cdot r^3 \qquad |:\pi$$

$$r^3 = \frac{1{,}44\text{ cm}^3 \cdot 3}{4 \cdot \pi} \qquad |\sqrt[3]{\ }$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1{,}44\text{ cm}^3 \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$$

$$r \approx 0{,}70\text{ cm}$$

Berechnung des Durchmessers:
$d = 2 \cdot r$
$d = 2 \cdot 0{,}70\text{ cm} = 1{,}4\text{ cm} = 14\text{ mm}$

Eine Kaugummikugel mit einem Volumen von $1{,}44\text{ cm}^3$ hat einen Durchmesser von 14 mm.

Beachte, dass das Volumen in cm^3 anzugeben ist.

Bestätige durch Rechnung, dass eine Kaugummikugel mit einem Volumen von $1{,}44\text{ cm}^3$ einen Durchmesser von 14 mm hat.

b) Berechnung der Masse einer Kaugummikugel:
Gegeben: Volumen: $V = 1{,}44\text{ cm}^3$
Dichte (Masse pro Volumen): $\rho = 0{,}82\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

Gesucht: Masse: m

Rechnung:

$$m = \rho \cdot V = 0{,}82\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1{,}44\text{ cm}^3 = 1{,}1808\text{ g}$$

Berechnung der Anzahl Kaugummikugeln in einer 300-Gramm-Packung:
$300\text{ g} : 1{,}1808\text{ g} = 254{,}06\ldots \approx 254$

In einer 300-Gramm-Packung sind 254 Kaugummikugeln.

Berechne zunächst die Masse einer Kaugummikugel mithilfe ihres aus Teilaufgabe a bekannten Volumens.

Die Masse eines Stoffs (hier: Kaugummi) ergibt sich aus dem Produkt der Dichte und des Volumens: Masse = Dichte · Volumen

Hier muss abgerundet werden, da nur ganze Kugeln enthalten sind.

c) Gegeben: Die Maße des Kaugummibehälters:
Breite: 16,5 cm
Tiefe: 16,5 cm
Höhe: 42,5 cm

Erklärung der Rechnung:
$(16{,}5\text{ cm} \cdot 16{,}5\text{ cm} \cdot 42{,}5\text{ cm}) : 1{,}44\text{ cm}^3 \approx 8\,035$

Steffi berechnet das Volumen des Behälters und teilt es durch das Volumen einer Kaugummikugel.

Beurteilung der Rechnung:
Steffi berücksichtigt bei ihrer Rechnung nicht die Form der Kaugummikugeln. Zwischen den Kugeln im Behälter verbleiben Zwischenräume, die nicht mit Kaugummi gefüllt sind. Also kann nicht das komplette Behältervolumen ausgeschöpft werden und die Anzahl der Kaugummikugeln, die maximal in den Behälter passen, ist kleiner als die von Steffi errechnete Anzahl.

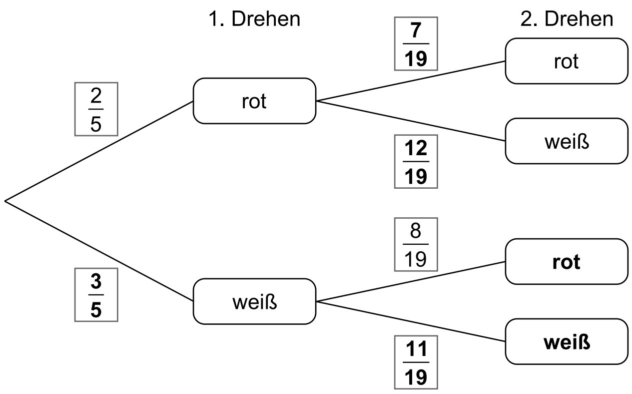
Hinweise und Tipps

Beachte den Umstand, dass sich Kugeln nicht lückenlos verpacken lassen.

d) Da 8 von 20 Kaugummikugeln rot sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Drehen eine rote Kaugummikugel zu erhalten:

$$P(\text{rot}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

e)



Wahrscheinlichkeit, beim ersten Drehen eine weiße Kaugummikugel zu erhalten:
$P(\text{weiß}) = 1 - P(\text{rot}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
Nach der ersten Drehung sind noch 19 Kugeln im Behälter. Wurde in der ersten Drehung eine rote Kugel gezogen, sind davon 7 rot und 12 weiß.
Wurde in der ersten Drehung eine weiße Kugel gezogen, sind davon 8 rot und 11 weiß.

f)
$$\begin{aligned} P(\text{verschiedenfarbig}) &= P(r;\, w) + P(w;\, r) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{19} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{19} \\ &= \frac{24}{95} + \frac{24}{95} \\ &= \frac{48}{95} \\ &\approx 0{,}5053 = 50{,}53\,\% > 50\,\% \end{aligned}$$

Steffis Bruder hat nicht recht, die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kaugummikugeln zu erhalten, ist etwas größer als 50 %.

Günstig für das Eintreten des Ereignisses „zwei verschiedenfarbige Kugeln“ sind die Ergebnisse (r; w) und (w; r).
Bestimme die Wahrscheinlichkeit mithilfe der Summenregel.