2024 MSA

Mittlerer Schulabschluss

MEHR ERFAHREN

Hamburg

Mathematik

+ *Ausführliche Lösungen*
+ *Hinweise und Tipps*

LÖSUNGEN

STARK

Inhalt

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, können die dazugehörigen Lösungen als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dies ist das Lösungsbuch zu dem Band **Mittlerer Schulabschluss Mathematik Hamburg** mit interaktivem Training (Best.-Nr. D02100).
Es enthält zu allen Aufgaben von erfahrenen Lehrerinnen und Lehrern ausgearbeitete Lösungen, die jeden Rechenschritt ausführlich erklären. Dabei wird besonderer Wert auf die Lösungsansätze und Vorüberlegungen gelegt. Zur Veranschaulichung und zum besseren Verständnis der Lösungen helfen dir zahlreiche Skizzen.

Versuche stets, jede Aufgabe zunächst selbstständig zu lösen, und dann deine Lösung mit den Lösungen im Buch zu vergleichen. Nur was du dir selbst erarbeitet hast, bleibt im Gedächtnis und du lernst dazu. Halte dich deswegen konsequent daran, jede Aufgabe zunächst selbst zu rechnen. Hast du eine Aufgabe nicht richtig gelöst, ist es ganz wichtig, diese zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal durchzurechnen.

Durch das Üben wirst du dich sicher fühlen und kannst beruhigt in die Prüfung gehen.

Wir wünschen dir viel Erfolg!

Autorinnen und Autoren:
Peter Stählin, Christoph Borr, Olaf Klärner, Kerstin Lenz, Dietmar Steiner

Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

73 Setze die Koordinaten des Punktes für x und y in die Gleichung $y = ax^2$ ein und berechne aus der so entstandenen Gleichung den Faktor a.

a) $P(2\,|-2)$:
$-2 = a \cdot 2^2$
$-2 = a \cdot 4$
$a = -\frac{1}{2}$
Funktionsgleichung: $y = -\frac{1}{2}x^2$

b) $Q(-5\,|\,12{,}5)$:
$12{,}5 = a \cdot (-5)^2$
$12{,}5 = a \cdot 25$
$a = \frac{1}{2}$
Funktionsgleichung: $y = \frac{1}{2}x^2$

c) $A(-2{,}5\,|-18{,}75)$:
$-18{,}75 = a \cdot (-2{,}5)^2$
$-18{,}75 = a \cdot 6{,}25$
$a = -3$
Funktionsgleichung: $y = -3x^2$

d) $B(2\,|-4)$:
$-4 = a \cdot 2^2$
$-4 = a \cdot 4$
$a = -1$
Funktionsgleichung: $y = -x^2$

74

Faktor	Öffnung	Form der Parabel	Beispiel
$a > 1$	nach oben	schmaler als Normalparabel	$y = 2x^2$
$a = 1$	nach oben	Normalparabel	$y = x^2$
$0 < a < 1$	nach oben	breiter als Normalparabel	$y = \frac{1}{3}x^2$
$-1 < a < 0$	nach unten	breiter als Normalparabel	$y = -\frac{1}{2}x^2$
$a = -1$	nach unten	Normalparabel	$y = -x^2$
$a < -1$	nach unten	schmaler als Normalparabel	$y = -2x^2$

75 $s = a \cdot v^2$ (s in m und v in $\frac{km}{h}$)

a) Setze die gegebenen Werte für v und s in die Gleichung $s = a \cdot v^2$ ein und berechne den Faktor a.

$v = 90\,\frac{km}{h};\;\; s = 81\text{ m}$

$81\text{ m} = a \cdot \left(90\,\frac{km}{h}\right)^2$

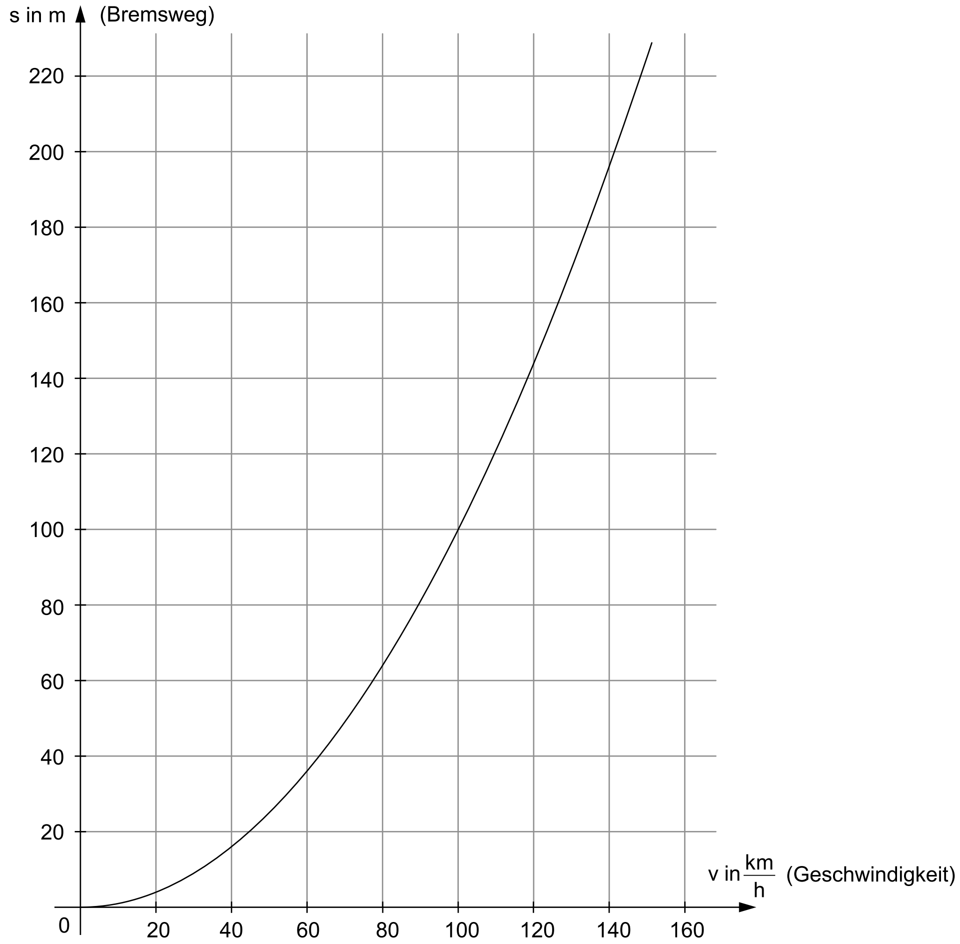
$81\text{ m} = a \cdot 90^2\,\frac{km^2}{h^2} \qquad \Big|:90^2\,\frac{km^2}{h^2}$

$a = 0{,}01\,\frac{m \cdot h^2}{km^2}$

b) $s = 0{,}01 \cdot v^2$

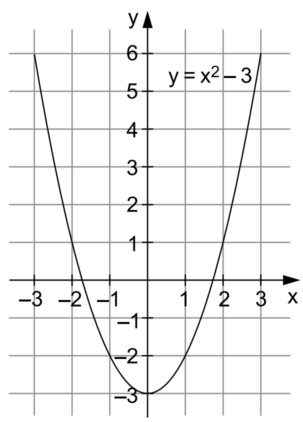
v in $\frac{km}{h}$	50	60	80	100	130
s in m	25	36	64	100	169

c)



76 a) $f: y = x^2 - 3$

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	22	13	6	1	–2	–3	–2	1	6	13	22



Abschlussprüfung 2021

Aufgabe I – ohne Taschenrechner und Formelblatt

✐ Hinweise und Tipps

Aufgabe 1

a) $348{,}32 : 100 = 3{,}4832$
Lösung A

Beim Teilen durch 100 wird lediglich das Komma um 2 Stellen nach links verschoben.

b) $0{,}17\ \text{t} = 170\ \text{kg}$
Lösung C

$1\ \text{t} = 1\,000\ \text{kg}$
Das Komma wird also um 3 Stellen nach rechts verschoben.

c) Der Abstand von –18 °C bis 21 °C beträgt 39 °C.
Lösung D

$21 - (-18) = 21 + 18 = 39$

d) $\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0{,}125$
Lösung A

Dies kann durch schriftliche Division berechnet werden. Oder man macht sich klar, dass $1 : 8$ bedeutet, die Hälfte von der Hälfte von der Hälfte zu nehmen. Also: Die Hälfte von 1 ist 0,5. Davon wieder die Hälfte ist 0,25. Davon erneut die Hälfte ist 0,125.

e) *Möglichkeit 1: Prozentformel*

$$p = \frac{20}{25} \cdot 100 = 80 \quad \Rightarrow \quad p\,\% = 80\,\%$$

$p = \frac{P}{G} \cdot 100$

p = Prozentsatz; P = Prozentwert; G = Grundwert

Möglichkeit 2: Dreisatz

	Anzahl Stimmen	%	
: 25	25	100	: 25
· 20	1	4	· 20
	20	80	

Lösung D

f) Die Winkelsumme im Viereck beträgt immer 360°.
Lösung B

Aussage A trifft nur auf Parallelogramme zu.
Aussage C ist falsch: Man kann auch Vierecke ohne rechten Winkel konstruieren.
Aussage D ist auch falsch: Das trifft nur auf Rechtecke zu.

g)
$$\begin{aligned} &\frac{2 \cdot (5+4)^2}{4} && \mid \text{Klammer ausrechnen} \\ &= \frac{2 \cdot 9^2}{4} && \mid \text{Quadrat berechnen} \\ &= \frac{2 \cdot 81}{4} && \mid \text{Zähler ausrechnen} \\ &= \frac{162}{4} && \mid \text{Exaktes Ergebnis bestimmen} \\ &= 162 : 4 = 40{,}5 \end{aligned}$$

Lösung B

Wenn man zuerst die 2 im Zähler mit der 4 im Nenner kürzt, vereinfacht sich die Aufgabe. Dann wäre die letzte Rechnung $81 : 2 = 40{,}5$.

✎ Hinweise und Tipps

h) Dreisatz:

	%	€	
: 100	100	90	: 100
· 5	1	0,9	· 5
	5	4,5	

Hava muss also 4,50 € weniger bezahlen.
Es ergibt sich 90 € – 4,50 € = 85,50 €.

Lösung C

Zunächst wird berechnet, wie viel Hava weniger bezahlen muss. Dieser Betrag muss dann vom ursprünglichen Preis abgezogen werden.

i) $0,3^3 = 0,027$

Lösung A

$0,3^3 = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,09 \cdot 0,3 = 0,027$

j) Cola hat bei allen vier Diagrammen die höchste Säule. So weit passen alle und dies spielt bei der weiteren Betrachtung keine Rolle mehr.
Wenn von den restlichen befragten Kindern $\frac{1}{4}$ Milch nennt, müssen $\frac{3}{4}$ etwas anderes genannt haben.
Also muss S dreimal so groß wie M sein.

Diagramm A passt: 6 sagen S und nur 2 sagen M. Also ist S dreimal so groß wie M.

Lösung A

Bei Diagramm B sagen 5 Kinder S und 3 Kinder M, das passt nicht.
Bei Diagramm C sagen 7 Kinder S und 4 Kinder M, das passt auch nicht.
Bei Diagramm D ist M größer als S, das passt also erst recht nicht.

k) Es gilt: $a^2 = b^2 + c^2$
Umgestellt nach c^2 ergibt sich: $c^2 = a^2 - b^2$
Das Ziehen der Wurzel ergibt: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Lösung C

Für das rechtwinklige Dreieck gilt der Satz des Pythagoras. Achtung: Die Hypotenuse ist a.

l) Der Punkt $A(-2|3)$ wird zu $A'(-2|-3)$ gespiegelt.

Lösung A

Wird ein Punkt an der x-Achse gespiegelt, verändert sich der x-Wert nicht. Lediglich das Vorzeichen des y-Wertes verändert sich.

m) $\frac{1}{8} : \frac{3}{4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

Lösung D

Brüche werden dividiert, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird.

n) Für den Winkel α in dem Dreieck ist a = Gegenkathete, b = Ankathete und c = Hypotenuse.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

Lösung B

Für den Kosinus würde gelten:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

Diese Möglichkeit besteht nicht.
Also ist B die einzige richtige Aussage.

o) $\frac{10^5}{10^7} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100} = 0,01$

Lösung D

Durch Kürzen fallen im Zähler und im Nenner jeweils fünf 10er weg.

✐ Hinweise und Tipps

p) $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 3$

A: $1{,}5 = -\frac{1}{2} \cdot (-3) + 3 = 1{,}5 + 3 = 4{,}5$ Aussage falsch

B: $4{,}5 = -\frac{1}{2} \cdot (-3) + 3 = 1{,}5 + 3 = 4{,}5$ Aussage richtig

C: $-1{,}5 = -\frac{1}{2} \cdot (-3) + 3 = 1{,}5 + 3 = 4{,}5$ Aussage falsch

D: $4{,}5 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + 3 = -1{,}5 + 3 = 1{,}5$ Aussage falsch

Lösung B

Die Punkte können in die Funktionsgleichung eingesetzt werden, wobei g(x) dem y-Wert entspricht.

q) Die Strecke von der Mitte der Pyramide zur Seitenkante entspricht genau $\frac{a}{2}$. Dann gilt:

$h_b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

Das Ziehen der Wurzel ergibt: $h_b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

Lösung D

Hier wird der Satz des Pythagoras benutzt. h, h_b und die Strecke von der Mitte der Pyramide zur rechten Seitenkante bilden ein rechtwinkliges Dreieck.

r) *Möglichkeit 1: Bestimmung der Nullstellen*

$2x^2 - 4x = 0 \quad |:2$

$x^2 - 2x = 0$

$x \cdot (x-2) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = 2$

Die Mitte ist 1, der x-Wert des Scheitelpunktes ist also 1.
Durch Einsetzen bestimmt man den y-Wert:

$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 2 - 4 = -2$

Der Scheitelpunkt liegt bei $(1|-2)$.

Um den Scheitelpunkt zu bestimmen, gibt es verschiedene Ansätze. Beispielsweise liegt der Scheitelpunkt genau zwischen den beiden Nullstellen.

Möglichkeit 2: Scheitelpunktform

$f(x) = 2 \cdot [x^2 - 2x]$

$f(x) = 2 \cdot [x^2 - 2x + 1^2 - 1^2]$

$f(x) = 2 \cdot [(x-1)^2 - 1^2]$

$f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 - 2$

Der Scheitelpunkt liegt bei $(1|-2)$.

Alternativ kann die Funktionsgleichung mithilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform umgewandelt werden.

Möglichkeit 3:
Von den vier gegebenen Punkten liegt nur $(1|-2)$ auf der Parabel, also kann auch nur dieser der Scheitelpunkt sein.

Lösung B

Man kann prüfen, welcher der Punkte überhaupt auf der Parabel liegt, indem die einzelnen Punkte in die Gleichung eingesetzt werden. Sollten zwei Punkte auf der Parabel liegen, funktioniert diese Methode jedoch nicht.

s) Nur Aussage A gilt für jedes Parallelogramm.

Lösung A

Die Definition eines Trapezes besagt, dass in einem Viereck mindestens zwei der vier Seiten parallel sein müssen. Bei einem Parallelogramm müssen sogar jeweils die beiden gegenüberliegenden Seiten parallel sein. Damit übererfüllt ein Parallelogramm die Anforderungen an ein Trapez. Es ist aber damit trotzdem ein Trapez.
Ein Parallelogramm ist nur dann eine Raute, wenn zusätzlich zu den Bedingungen eines Parallelogramms auch alle Seiten gleich lang sind. Bei einem Rechteck müsste das Parallelogramm zusätzlich noch vier rechte Winkel haben. Bei einem Quadrat muss alles zusammenkommen: ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln und alle Seiten sind gleich lang.

Hinweise und Tipps

t) $$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \left| \cdot 3 \quad \left(\text{entspricht} : \frac{1}{3}\right)\right.$$
$$3 \cdot V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad |: \pi$$
$$\frac{3 \cdot V}{\pi} = r^2 \cdot h \quad |: h$$
$$\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h} = r^2 \quad |\sqrt{}$$
$$\sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}} = r$$

Lösung B

Die Gleichung für das Kegelvolumen muss nach r umgestellt werden.

Aufgabe 2

Der Winkel des Kreissegments für „weiblich" entspricht 140°.

Jetzt erfolgt der Ansatz über den Dreisatz:

	Winkel	Mitglieder	
: 360	360	180	: 360
· 140	1	0,5	· 140
	140	70	

Wenn es 70 weibliche Mitglieder gibt, muss es $180 - 70 = 110$ männliche Mitglieder geben.

Achtung: Hier muss genau gemessen werden. Eine grobe Schätzung von „ca. $\frac{1}{3}$ der Mitglieder sind weiblich und $\frac{2}{3}$ sind männlich" reicht hier nicht. Es muss der genaue Winkel bestimmt werden.

Aufgabe 3

Quader 1 hat folgende Abmessungen: $a = 2$ cm, $b = 4$ cm und $c = 6$ cm
$V_1 = a \cdot b \cdot c = 2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 48\text{ cm}^3$
Quader 1 hat ein Volumen von 48 cm^3.

Quader 2 hat folgende Abmessungen: $a = 2$ cm, $b = 4$ cm und $c = 4$ cm
$V_2 = a \cdot b \cdot c = 2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 32\text{ cm}^3$
Quader 2 hat ein Volumen von 32 cm^3.

Zusammen hat der Körper ein Volumen von $V_1 + V_2 = 80\text{ cm}^3$.

Die Volumina der beiden Quader werden getrennt berechnet.
Für das Volumen eines Quaders gilt: $V = a \cdot b \cdot c$

Aufgabe II – Leitidee Raum und Form, Leitidee Messen

Hinweise und Tipps

Segelfliegen

a) Für die Fläche gilt: $60\,000\ m^2 = 1\,200\ m \cdot$ Breite
Für die Breite gilt also: $60\,000\ m^2 : 1\,200\ m = 50\ m$
Die Start- und Landebahn hat eine Breite von 50 m.

Die Fläche eines Rechtecks ergibt sich aus „Länge mal Breite".
1,2 km entsprechen 1 200 m.

b) Berechnet wird zunächst der Mantel eines Zylinders und dieser Wert wird dann halbiert.
Der Radius kann mit $r = 7{,}50\ m$ dem Bild entnommen werden.
Die Höhe des Zylinders beträgt $h = 26\ m$.
In die Formel eingesetzt ergibt sich:
$M_{Zyl} = 2 \cdot \pi \cdot 7{,}5\ m \cdot 26\ m \approx 1\,225{,}22\ m^2$
Davon die Hälfte ergibt $M_{Halbzylinder} \approx 612{,}61\ m^2$.
Jeder Quadratmeter verursacht Kosten von 45 €.
Die Kosten betragen also ca. $612{,}61 \cdot 45\ € = 27\,567{,}45\ €$.

Berechnet werden muss der Mantel eines Halbzylinders. Achtung: Es ist nicht der halbe Oberflächeninhalt gesucht, da der Hangar offen ist, also weder Boden noch Deckel hat.
Die Fläche des Mantels eines Zylinders ergibt sich zu $M_{Zyl} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$.

c)
- $A(0\,|\,1{,}5)$ und $B(50\,|\,0{,}5)$
- Das Flugzeug hat auf einer ebenen Strecke 50 km zurückgelegt (1. Kathete). Dabei hat es 1 km an Höhe verloren (2. Kathete). Es ergibt sich:
  $\overline{AB} = \sqrt{50^2 + 1^2} = 50{,}0099\ldots$
  Das Flugzeug hat eine Strecke von ca. 50,01 km zurückgelegt.

Die Punkte können direkt abgelesen werden.

Berechnet werden muss von einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse. Dies erfolgt über den Satz des Pythagoras. Die Längen der beiden Katheten ergeben sich aus den Differenzen der x-Werte und der y-Werte von A und B.

d) Gesucht wird die Gegenkathete h bei einer Hypotenuse $s = 400\ m$ und dem Winkel $\alpha = 70°$. Es gilt also:

$$\sin 70° = \frac{h}{400\ m} \quad \Big| \cdot 400\ m$$

$$h = \sin 70° \cdot 400\ m = 375{,}8770\ldots\ m$$

Die Höhe h beträgt etwa 375,88 m.

Es handelt sich hier um ein rechtwinkliges Dreieck.
$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

e) *Möglichkeit 1: Sinussatz*
Es gilt: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

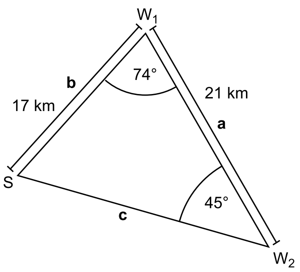
$$\Rightarrow \quad c = \frac{b}{\sin\beta} \cdot \sin\gamma = \frac{17}{\sin 45°} \cdot \sin 74° \approx 23{,}1$$

Möglichkeit 2: Kosinussatz
Es gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma} = \sqrt{21^2 + 17^2 - 2 \cdot 21 \cdot 17 \cdot \cos 74°} \approx 23{,}1$$

Die gesamte Flugstrecke beträgt etwa:
$21\ km + 17\ km + 23{,}1\ km = 61{,}1\ km$

Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, fehlt die Länge einer Seite (hier mit c bezeichnet). Diese kann über den Sinussatz oder den Kosinussatz bestimmt werden.



Anschließend müssen die Strecken a, b und c addiert werden.

f) Maßstab = „Länge in der Abbildung" : „Länge in der Wirklichkeit"
Um dieses Verhältnis ausrechnen zu können, müssen beide Werte in der gleichen Einheit angegeben werden. Hier empfiehlt sich als gemeinsame Einheit 1 m:
$21\ km = 21\,000\ m$ und $7\ cm = 0{,}07\ m$
Maßstab $= 0{,}07 : 21\,000 = 1 : 300\,000$

Der Maßstab gibt immer das Verhältnis zwischen den Längen in der Abbildung (z. B. auf einer Landkarte) und in der Wirklichkeit an.