

# 2024 MSA

Mittlerer Schulabschluss

**MEHR  
ERFAHREN**

Schleswig-Holstein

## Mathematik

- + *Basiswissen mit Übungen*
- + *Lernvideos*
- + *Original-Prüfungen*

**STARK**

# Inhalt

Vorwort


## Hinweise und Tipps





---




1	Keine Angst vor dem MSA .....	I
2	Dein persönlicher Zeitplan .....	I
3	Hinweise zur Prüfung .....	II
4	Deine persönliche Generalprobe .....	III
5	Lernplaner .....	IV
6	Formelsammlung .....	VI

## Training Grundwissen

---

1	Wiederholung Grundlagen .....	1
1.1	Terme und Termumformungen .....	1
	Termumformungen .....	2
1.2	Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen .....	5
	Lineare Gleichungen .....	5
	Lineare Ungleichungen .....	6
	Textaufgaben .....	7
1.3	Proportionale und antiproportionale Zuordnungen .....	8
	Proportionale Zuordnungen .....	8
	Nicht proportionale Zuordnungen .....	8
	Lösen von proportionalen Zuordnungen  .....	9
	Antiproportionale Zuordnungen .....	10
	Lösen von antiproportionalen Zuordnungen .....	10
1.4	Prozentrechnung und Zinsrechnung .....	12
	Prozentrechnung .....	12
	Zinsrechnung .....	15
1.5	Umrechnungen von Größen .....	16
1.6	Dreiecke und Vierecke .....	18
1.7	Kreis .....	21
	Kreisring .....	22
	Kreisbogen und Kreissektor .....	23
1.8	Potenzen und Wurzeln .....	24
	Potenzen .....	24
	Wurzeln .....	27

<b>2</b>	<b>Lineare Funktionen – Lineare Gleichungssysteme</b> .....	28
2.1	Allgemeine Funktion .....	28
2.2	Lineare Funktionen .....	30
	Zeichnen von Graphen  .....	31
	Verlauf von Graphen linearer Funktionen .....	33
2.3	Lineare Gleichungssysteme .....	34
	Grafisches Lösungsverfahren .....	36
	Rechnerische Lösungsverfahren .....	37
	Lösen von Textaufgaben mit zwei Unbekannten .....	40
<b>3</b>	<b>Quadratische Funktionen und Gleichungen</b> .....	42
3.1	Quadratische Funktionen .....	42
	Die Normalparabel .....	42
	Verschiebung der Normalparabel längs der Koordinatenachsen  .....	43
	Streckung der Normalparabel  .....	44
	Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion .....	45
	Bestimmung des Scheitelpunkts einer Parabel .....	46
	Nullstellen einer quadratischen Funktion .....	49
3.2	Quadratische Gleichungen .....	50
	Reinquadratische Gleichungen $x^2 - q = 0$ .....	50
	Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px = 0$ .....	51
	Gemischt quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ .....	51
<b>4</b>	<b>Ähnlichkeit und Strahlensätze</b> .....	54
4.1	Maßstab .....	54
4.2	Vergrößern und Verkleinern von Figuren .....	55
4.3	Strahlensätze  .....	58
<b>5</b>	<b>Der Satz des Pythagoras</b> .....	61
<b>6</b>	<b>Trigonometrie</b> .....	64
6.1	Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck .....	64
6.2	Berechnungen an allgemeinen Dreiecken – Sinus- und Kosinussatz .....	69
	Sinussatz .....	69
	Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks .....	71
	Kosinussatz .....	72
	Sinussatz oder Kosinussatz – das ist die Frage .....	74
<b>7</b>	<b>Körper</b> .....	76
7.1	Darstellungen von Körpern .....	76
7.2	Massenberechnungen an Körpern .....	77
7.3	Gerade Prismen .....	77
7.4	Pyramiden .....	82
7.5	Kegel .....	84
7.6	Kugeln .....	86

<b>8</b>	<b>Daten und Zufall</b> .....	89
8.1	Statistische Grundbegriffe .....	89
	Daten erfassen .....	89
	Daten reduzieren (zusammenfassen) .....	90
	Daten darstellen  .....	91
	Grafische Darstellungen analysieren .....	93
8.2	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung .....	98
8.3	Wahrscheinlichkeit und das Gesetz der großen Zahlen .....	99
8.4	Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Zufallsexperimenten .....	100
8.5	Mehrstufige Zufallsexperimente  .....	102
<b>9</b>	<b>Wachstum und Zerfall</b> .....	106
9.1	Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall .....	106
9.2	Exponentialfunktionen  .....	108
9.3	Zinseszins .....	110
9.4	Lineares und exponentielles Wachstum im Vergleich .....	112
<b>10</b>	<b>Vermischte Aufgaben</b> .....	115

**Original-Abschlussprüfungen**


Mittlerer Schulabschluss 2020 .....	2020-1
Mittlerer Schulabschluss 2021 .....	2021-1
Mittlerer Schulabschluss 2022 .....	2022-1

**Mittlerer Schulabschluss 2023 .....** [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark)

Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2023 freigegeben sind, kannst du sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen. Den benötigten Zugangscode findest du auf der Umschlaginnenseite.



Bei **MyStark** findest du:

- **Interaktives Training** zu den wichtigsten Kompetenzbereichen
- **Lernvideos** und **GeoGebra-Dateien** zu ausgewählten Themen 
- **Jahrgang 2019** sowie **Jahrgang 2023**, sobald dieser zum Download bereit steht

Deinen Zugangscode findest du auf der **Innenseite des Umschlags** vorne im Buch.

**Autorinnen und Autoren:**

Jörg Collenburg, Doris Cremer, Heike Ohrt, Dietmar Steiner

# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch hilft dir bei der selbstständigen Vorbereitung auf die **Prüfung zum Mittleren Schulabschluss**. Das Buch ist so konzipiert, dass du es bereits zu Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Klassenarbeiten und zur langfristigen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung verwenden kannst. Gerade für alle Teilnehmer\*innen einer zentralen Prüfung ist das **Grundlagenwissen** besonders wichtig. Denn in der Prüfung geht es nicht um Spezialkenntnisse, die du gut beherrschst, sondern die Aufgaben werden auf einem möglichst breiten Grundwissen aufbauen. Es geht vor der Prüfung also um eine Gesamtwiederholung.

- ▶ Dieses Buch beginnt mit einem ausführlichen **Trainingsteil**. Im 1. Kapitel werden die wichtigsten Themen der 7. bis 9. Klasse kurz wiederholt, die Kapitel 2 bis 9 behandeln intensiv alle prüfungsrelevanten Bereiche. Zu jedem Thema findest du passende Übungsaufgaben, anhand derer du überprüfen kannst, ob du den Stoff beherrschst. Zu einigen Themen gibt es zusätzlich **Lernvideos** und **GeoGebra-Anwendungen**. An den entsprechenden Stellen im Buch befinden sich QR-Codes, die du mit einem Smartphone oder Tablet scannen kannst. Eine Zusammenstellung aller Videos und Anwendungen ist über den nebenstehenden QR-Code abrufbar. Außerdem kannst du sie von der **Plattform MyStark** herunterladen (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).
- ▶ Du kannst **selbstständig** mit dem Buch arbeiten, weil alle Themen auch anhand von Beispielaufgaben erklärt werden, die du dir auf jeden Fall anschauen solltest.
- ▶ In Kapitel 10 findest du **Vermischte Aufgaben**. Hier kannst du dein erworbenes Wissen an komplexen, themenübergreifenden Aufgaben testen.
- ▶ Am Ende des Buches findest du die schriftlichen **Original-Abschlussprüfungen zum Mittleren Schulabschluss 2020 bis 2022**.
- ▶ Um dir die **Abschlussprüfung 2023** schnellstmöglich zur Verfügung stellen zu können, bringen wir sie in digitaler Form heraus. Sobald die Prüfungsaufgaben freigegeben sind, stehen sie dir **auf MyStark zum Download** zur Verfügung.

Zu allen Aufgaben gibt es **ausführliche Lösungen** in einem separaten Buch (Bestell-Nr. D01100L), die jeden Rechenschritt genau erklären. Dabei wird besonderer Wert auf die Lösungsansätze und Vorüberlegungen gelegt. Zur Veranschaulichung und dem besseren Verständnis der Lösungen helfen dir zahlreiche Skizzen.

Versuche aber zu jeder Aufgabe zuerst selbst die Lösung zu finden, bevor du sie mit der Lösung im Buch vergleichst. Nur was du dir selbst erarbeitet hast, bleibt im Gedächtnis. Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrschst, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abschlussprüfung vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, findest du aktuelle Informationen dazu ebenfalls auf der **Plattform MyStark**.

Wir wünschen dir für die Prüfung viel Erfolg!



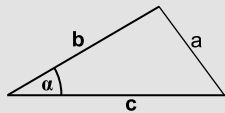


## Kosinussatz

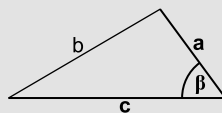
## Merke

## Kosinussatz

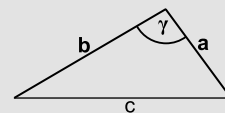
In jedem Dreieck gelten folgende Zusammenhänge:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

## Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras:

Ist der eingeschlossene Winkel  $90^\circ$ , wird der Kosinuswert 0 und man erhält:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

## Beispiele

1. Um die Länge eines Sees zu bestimmen, misst man die Strecken  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  und den Winkel  $\sphericalangle BAC$ :

$$\overline{AB} = 350 \text{ m}; \overline{AC} = 168 \text{ m}; \sphericalangle BAC = 65^\circ$$

Wie lang ist der See?

## Lösung:

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt man die Länge der dritten Seite mit dem Kosinussatz.

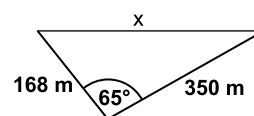
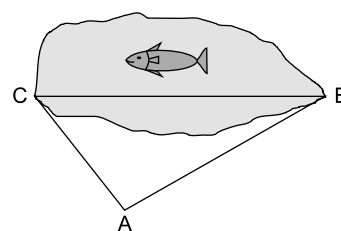
$$x^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \sphericalangle BAC \quad |\sqrt{\phantom{x}}$$

$$x = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \sphericalangle BAC}$$

$$x = \sqrt{168^2 + 350^2 - 2 \cdot 168 \cdot 350 \cdot \cos 65^\circ}$$

$$x \approx 317,84$$

Der See ist ca. 318 m lang.



2. Berechne die Winkel im Dreieck mit den Seitenlängen  $a=4,5 \text{ cm}$ ,  $b=3,5 \text{ cm}$  und  $c=4 \text{ cm}$ . Konstruiere anschließend das Dreieck und überprüfe die Werte.

## Lösung:

Bei 3 gegebenen Seiten muss man sich entscheiden, welchen der eingeschlossenen Winkel man zuerst berechnen möchte.

Berechnung von  $\alpha$  mit dem Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad | -b^2 - c^2$$

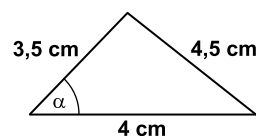
$$a^2 - b^2 - c^2 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad | :(-2 \cdot b \cdot c)$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos \alpha = \frac{4,5^2 - 3,5^2 - 4^2}{-2 \cdot 3,5 \cdot 4}$$

$$\cos \alpha = 0,2857 \dots$$

$$\alpha \approx 73,40^\circ$$



Berechnung von  $\beta$  mit dem Kosinussatz:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \quad | -a^2 - c^2$$

$$b^2 - a^2 - c^2 = -2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \quad | : (-2 \cdot a \cdot c)$$

$$\cos \beta = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos \beta = \frac{3,5^2 - 4,5^2 - 4^2}{-2 \cdot 4,5 \cdot 4}$$

$$\cos \beta = 0,6666\dots$$

$$\beta \approx 48,19^\circ$$

**oder**

Berechnung von  $\beta$  mit dem Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad | \cdot \sin \alpha \quad | \cdot \sin \beta$$

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \quad | : a$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{3,5 \cdot \sin 73,40^\circ}{4,5}$$

$$\sin \beta = 0,7453\dots$$

$$\beta \approx 48,19^\circ$$

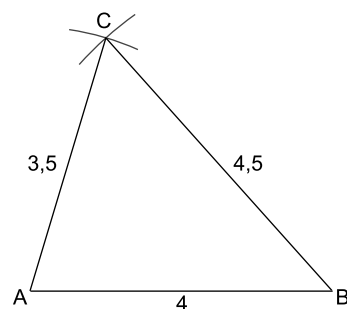
Berechnung von  $\gamma$  mit der Winkelsumme:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 73,40^\circ - 48,19^\circ$$

$$\gamma = 58,41^\circ$$

Konstruktion des Dreiecks:



Konstruktionsbeschreibung:

- $c = \overline{AB} = 4$  cm zeichnen
- Kreisbogen um A mit  $r = 3,5$  cm
- Kreisbogen um B mit  $r = 4,5$  cm
- Schnittpunkt der Kreisbögen ist C

Winkel messen:

$$\alpha = 73^\circ; \beta = 48^\circ; \gamma = 59^\circ$$

Die Winkelgrößen stimmen mit den berechneten Werten überein.



## Sinussatz oder Kosinussatz – das ist die Frage

## Merke

**Sinussatz oder Kosinussatz**

Sind von einem allgemeinen Dreieck drei Größen bekannt, sollte vor der Berechnung überlegt werden, welcher der beiden Sätze zu verwenden ist.

Der **Kosinussatz** wird verwendet, wenn folgende Größen gegeben sind:

- drei Seiten (SSS)
- zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (SWS)

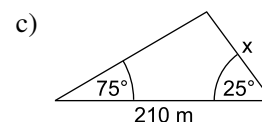
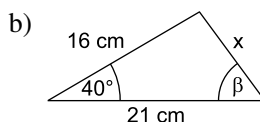
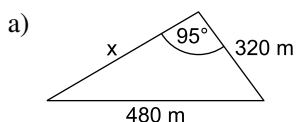
Der **Sinussatz** wird verwendet, wenn folgende Größen gegeben sind:

- zwei Seiten und einer der von den Seiten nicht eingeschlossenen Winkel (SSW)
- zwei Winkel und eine Seite (WSW); eventuell ist zuerst mithilfe der Winkelsumme der dritte Winkel zu berechnen

## Beispiel

Sinussatz oder Kosinussatz?

Welchen Satz wendest du in den folgenden Fällen für die erste Berechnung an?

**Lösung:**

a) Gegeben: SSW  $\rightarrow$  Sinussatz

$$\text{Ansatz: } \frac{480}{\sin 95^\circ} = \frac{320}{\sin \alpha}$$

Bestimme dann  $\beta$  über die Winkelsumme und  $x$  mit dem Sinus- oder Kosinussatz.  
[Ergebnisse:  $\alpha = 41,62^\circ$ ;  $\beta = 43,38^\circ$ ;  $x = 330,94$  m]

b) Gegeben: SWS  $\rightarrow$  Kosinussatz

$$\text{Ansatz: } x^2 = 16^2 + 21^2 - 2 \cdot 16 \cdot 21 \cdot \cos 40^\circ$$

Bestimme dann  $\beta$  mit dem Sinus- oder Kosinussatz.  
[Ergebnisse:  $x = 13,50$  cm;  $\beta = 49,63^\circ$ ]

c) Gegeben: WSW  $\rightarrow$  Sinussatz mithilfe der Winkelsumme

Bestimme zunächst  $\gamma$  mithilfe der Winkelsumme:

$$\gamma = 180^\circ - 75^\circ - 25^\circ = 80^\circ$$

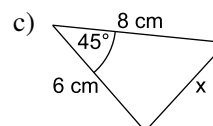
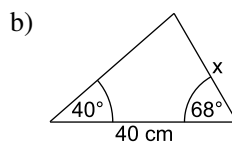
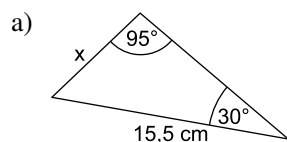
$$\text{Sinussatz: } \frac{210}{\sin 80^\circ} = \frac{x}{\sin 75^\circ}$$

[Ergebnis:  $x = 205,97$  m]

## Aufgaben

113

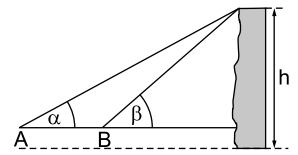
Berechne jeweils die Länge der Strecke  $x$  und den Flächeninhalt des Dreiecks.



114

Stelle den Kosinussatz schrittweise nach  $\cos \alpha$  um.

- 115** Zur Bestimmung der Höhe  $h$  einer Kletterwand werden mithilfe eines Messgeräts zwei Winkel gemessen. Das Messgerät steht dazu in 1,60 m Höhe über dem waagerechten Erdboden.  
Strecke  $\overline{AB} = 10$  m; Winkel  $\alpha = 42,4^\circ$ ;  $\beta = 65,6^\circ$



- 116** Der Grunewaldturm steht auf dem Karlsberg am Ostufer der Havel bei Berlin. Die Aussichtsplattform A auf einer Turmhöhe von 36 m liegt 100 m über dem Wasserspiegel. Von einem Segelboot aus peilt man die Turmspitze S unter einem Höhenwinkel von  $11,2^\circ$  und die Aussichtsplattform A unter einem Höhenwinkel von  $9,5^\circ$  an. Die Luftlinie zwischen dem Segelboot und der Turmspitze S beträgt 612 m.  
Fertige eine Skizze an und berechne die Höhe des Grunewaldturms. Vernachlässige dabei den Höhenunterschied vom Messpunkt im Boot zum Wasserspiegel.



- 117** Beim OstseeMan Triathlon in Glücksburg starten Jahr für Jahr im August über 1 500 Athleten auf der Langdistanz. Zur Vorbereitung hat ein Verein eine Schwimmstrecke in der Ostsee mit Bojen markiert (siehe Bild). Start und Ziel (S) befinden sich am Strand neben dem Schiffsanleger. Die Athleten müssen um die Bojen A und B außen herumschwimmen. Folgende Maße sind bekannt:  
Winkel  $\text{SBA} = 56^\circ$ ; Winkel  $\text{BAS} = 96^\circ$ ;  $\overline{BS} = 1\,600$  m  
Entspricht die Länge dieser Schwimmstrecke ( $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow S$ ) der Wettkampflänge von 3,8 km?







A5. Für die Strecke, die ein Körper im freien Fall bei Vernachlässigung des Luftwiderstands zurücklegt, gilt folgende Regel:

Quadriere die Fallzeit (in s) und multipliziere das Ergebnis mit 5, so erhältst du die Fallstrecke (in m).

Gabor hat nach dieser Regel mithilfe einer Tabellenkalkulation zu unterschiedlichen Fallzeiten die zugehörigen Fallstrecken berechnet.

	A	B	C	D	E
1	Fallzeit (s)	1	3	6	10
2	Fallstrecke (m)	5	45		
3					

2 Punkte

a) Ergänze die fehlenden Werte in den Zellen D2 und E2.

1 Punkt

b) Kreuze die Formel an, mit der der Wert in Zelle C2 berechnet werden kann.

$= C1 * C1 * 5$      
   $= B1 * (1 + C1/100)$      
   $= B2 * 5$

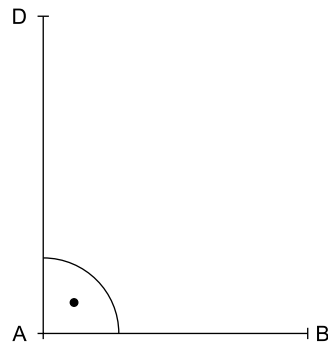
1 Punkt

A6. Julia hat die letzte Ziffer ihrer PIN für ihr Handy vergessen. Die Wahrscheinlichkeit, dass sie zweimal falsch rät, beträgt:

$\frac{9}{10}$      
   $\frac{72}{90}$      
   $\frac{81}{100}$

1 Punkt

A7. Ergänze zu einem Trapez ABCD mit dem Winkel  $\delta = 50^\circ$  und  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .



4 Punkte

A8. Entscheide jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Kreuze an.

	wahr	falsch
$14^0 = 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\frac{2}{3} = 60\%$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 10$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(2^2)^3 = 64$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

**STARK**