

VERA 8

Basiswissen und
Übungsaufgaben
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Gymnasialer Bildungsgang

Mathematik 8. Klasse

ActiveBook
Interaktives
Training

STARK

Inhalt

Vorwort	
Hinweise und Tipps	
Basiswissen mit Übungsaufgaben	1
Leitidee Variable und Funktionaler Zusammenhang	3
1 Zahlen und Terme	3
2 Termumformungen	6
3 Gleichungen	9
4 Aufstellen von Gleichungen	10
5 Prozentrechnung	13
6 Zinsrechnung	18
7 Proportionale Zuordnungen	19
8 Antiproportionale Zuordnungen	21
9 Proportionale Funktionen	23
10 Lineare Funktionen	26
11 Aufstellen von Funktionsgleichungen	28
12 Weitere Schaubilder	31
Leitidee Messen und Leitidee Raum und Form	35
1 Abstände	35
2 Messen und Größen	36
3 Dreiecke	41
4 Vierecke	43
5 Winkel	46
6 Flächeninhalt von Vielecken	49
7 Umfang von Vielecken	54
8 Kreise	56
9 Quader und Würfel	59
10 Spiegelungen und Symmetrie	61
11 Kongruenz	65
Leitidee Daten und Zufall	68
1 Arithmetisches Mittel/Mittelwert/Median	68
2 Darstellung von Häufigkeitsverteilungen	70
3 Systematisches Zählen	79
4 Berechnung von Wahrscheinlichkeiten	83
Lösungen zum Basiswissen	89
Aufgaben im Stil von VERA 8	143
Übungsarbeit 1	145
Lösungen zur Übungsarbeit 1	159
Übungsarbeit 2	169
Lösungen zur Übungsarbeit 2	187



Dein Coach zum Erfolg: Mit dem **Interaktiven Training** kannst du online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren. Am besten gleich ausprobieren!

Den Zugangscode findest du auf den **Farbseiten vorne** im Buch.

Autoren: Eberhard Endres, Dieter Gauß, Ilse Gretenkord

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

in nahezu allen Bundesländern werden in jedem Frühjahr in den achten Klassen sogenannte Vergleichsarbeiten (VERA 8 = **VERgleichsArbeiten Klasse 8**) geschrieben. Weil die einzelnen Aufgaben von einer deutschlandweiten Aufgabenkommission erarbeitet und damit weitgehend einheitlich in allen Bundesländern gestellt werden, stellen diese Vergleichsarbeiten für dich eine gute Möglichkeit dar, deine mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten objektiv zu überprüfen und zu verbessern. Hierdurch lassen sich gut eventuell noch vorhandene Wissenslücken aufdecken und beheben. Dieses Buch bietet für dich eine gute Vorbereitungsmöglichkeit für die Vergleichsarbeiten an deinem Gymnasium.

Die in diesem Übungsbuch behandelten Inhalte orientieren sich an den Vergleichsarbeiten der letzten Jahre und sind in Leitideen aus den Bereichen Algebra, Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung unterteilt. Sie decken somit alle wichtigen und auch für die höheren Klassenstufen erforderlichen Themenbereiche ab und können dir helfen, auch die nächsten Klassenstufen gut vorbereitet und erfolgreich zu bestehen.

Im ersten **Abschnitt Basiswissen** findest du kompakt beschrieben und mit Beispielen illustriert den kompletten Stoff, der zur erfolgreichen Bewältigung des VERA 8-Tests erforderlich ist. Anhand von ausführlich durchgerechneten **Beispielaufgaben** werden dabei die Inhalte veranschaulicht und exemplarisch angewandt. Im jeweils anschließenden Aufgabenteil findest du eine Vielzahl von **Aufgaben** im VERA 8-Format, sodass du dich hier bereits an die Art der Fragestellungen des Vergleichstests gewöhnen kannst. Zu allen Aufgaben kannst du ausführliche **Lösungen** mit **Hinweisen und Kommentaren** nachschlagen und damit deinen Lernerfolg fundiert überprüfen.

Im zweiten **Abschnitt Aufgaben im Stil von VERA 8** sind zwei komplette Aufgabensätze zusammengestellt, die zur Lernerfolgskontrolle am besten als Block innerhalb von jeweils ca. 80 Minuten gelöst werden und damit sowohl eine gute Rückmeldung über deinen Kenntnisstand geben als auch ein gutes Training für die Vergleichsarbeiten darstellen können. Auch zu diesen Aufgaben finden sich ausführliche und mit zahlreichen **Hinweisen und Tipps** versehene **Lösungen**.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen für deinen VERA 8-Test bekannt gegeben werden, findest du aktuelle Informationen dazu auf der Plattform **MyStark** (Zugangscode auf den Farbseiten vorne).

Ich wünsche dir viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Übungsbuch sowie viel Erfolg bei den Vergleichsarbeiten und deiner weiteren Beschäftigung mit der Mathematik!



Eberhard Endres

Hinweise und Tipps

Die Vergleichsarbeiten VERA 8 unterscheiden sich von den Klassenarbeiten, die du gewohnt bist. Eine Klassenarbeit spiegelt meist nur ein begrenztes Stoffgebiet wider, während VERA 8-Aufgaben Fragestellungen aus dem kompletten Stoff des Mathematikunterrichts bis zur achten Klasse abdecken.

In VERA 8 werden keine aufwendigen Rechnungen oder Konstruktionen verlangt, sondern eher Verständnis, Grundwissen und Kombinationsgabe gefordert. Viele Aufgaben enthalten einen einführenden Text, der gewissenhaft gelesen und verstanden werden muss, um die Aufgaben zu lösen. Andere Aufgaben enthalten Tabellen, Zeitungsausschnitte oder Diagramme und lassen sich oft auch kreativ mit gesundem Menschenverstand bearbeiten.

Die Antworten zu den Aufgaben werden häufig im Rahmen von Multiple-Choice-Fragen gegeben; manchmal sind aber auch Begründungen gefragt. Außerdem sind die Aufgaben **nicht** nach Schwierigkeitsgrad geordnet.

Als **Hilfsmittel** darfst du neben dem Geodreieck und dem Zirkel auch einen Taschenrechner verwenden. Das Nutzen einer Formelsammlung ist allerdings **nicht erlaubt**.

Für die Arbeit mit diesem Buch und dem ActiveBook bieten sich dir **zwei optimale Vorgehensweisen** an:

- Wenn du eher das Gefühl hast, Stoff nachlernen zu müssen, arbeite zunächst das Basiswissen durch und löse die dort angegebenen Aufgaben. Zur Überprüfung, ob du dir das Basiswissen erfolgreich angeeignet hast, kannst du anschließend im zweiten Abschnitt eine der beiden Übungsarbeiten im Stil von VERA 8 in ca. 80 Minuten lösen. Nach der Korrektur der Aufgaben anhand der Lösungshinweise besteht die Möglichkeit, noch vorhandene Lücken im Basisteil nachzuarbeiten und danach die zweite Übungsarbeit zur abschließenden Kontrolle zu bearbeiten.
- Wenn du der Meinung bist, den Stoff der vergangenen Schuljahre bereits zu beherrschen, kannst du dich gleich an eine der beiden Übungsarbeiten im Stil von VERA 8 wagen und die Aufgaben in ca. 80 Minuten lösen. Nach der Korrektur deiner Lösungen lassen sich entdeckte Lücken oder Fehler anhand des Basisteils leicht noch nacharbeiten. Ob du alle Lücken schließen konntest, lässt sich mit der Bearbeitung der anderen Übungsarbeit nachprüfen.

Bei den Übungsarbeiten im Stil von VERA 8 gilt darüber hinaus aber dasselbe wie bei normalen Klassenarbeiten auch:

- **Beginne** mit den Aufgaben, bei denen du dich **sicher fühlst**. Wenn du bei einer Aufgabe nicht weiterkommst, stelle sie zurück und wende dich einer anderen Aufgabe zu.
- **Lies die Aufgabe gewissenhaft durch**; suche die gegebenen und gesuchten Größen; notiere Formeln, die zur Lösung des Problems hilfreich sein könnten.
- **Fertige Skizzen, Tabellen oder Planfiguren an**, die dir helfen, Ordnung in die gegebenen Informationen zu bringen.
- **Schätze das Ergebnis in einer Überschlagsrechnung ab**, um Rechenfehler zu entdecken. Achte dabei auf korrekte Einheiten.

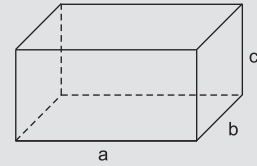
Viel Erfolg bei VERA 8!

9 Quader und Würfel

Quader und Würfel sind geometrische Körper, die uns im Alltag in Form von Schachteln, Büchern oder Koffern häufig begegnen.

Das musst du wissen!

- Das **Volumen** eines **Quaders** beträgt:
 $V = a \cdot b \cdot c$
- Die **Oberfläche** besteht aus sechs Rechtecken: $O = 2ab + 2bc + 2ac$
- Ein Quader besitzt insgesamt 12 Kanten, von denen jeweils vier gleich lang sind. Die Summe der **Kantenlängen** ist $K = 4a + 4b + 4c$.
- Das **Netz** eines Quaders ist eine Figur, bestehend aus sechs Rechtecken, aus der man überdeckungsfrei einen Quader falten kann.



Beispiel

Ein quaderförmiges Schwimmbecken ist 12 m lang und 4 m breit.

- Wie tief ist es, wenn insgesamt $105,6 \text{ m}^3$ Wasser eingefüllt werden können?
- Das Schwimmbecken soll am Boden und den Wänden gefliest werden. Welche Kosten sind hierfür zu erwarten, wenn 1 m^2 Fliesen 25 € und die Verlegung eines Quadratmeters 35 € kosten?

Lösung:

- Das Becken hat die Länge $a = 12 \text{ m}$, die Breite $b = 4 \text{ m}$ und die Tiefe c . Für das Volumen des Beckens gilt:

$$V = a \cdot b \cdot c \Leftrightarrow 105,6 \text{ m}^3 = 12 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} \cdot c$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{105,6}{12 \cdot 4} \text{ m} = 2,2 \text{ m}$$

Das Becken ist 2,20 m tief.

- Fläche des Bodens: $A_1 = a \cdot b = 12 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} = 48 \text{ m}^2$
Je zwei Wände mit: $A_2 = a \cdot c = 12 \text{ m} \cdot 2,2 \text{ m} = 26,4 \text{ m}^2$ bzw.
 $A_3 = b \cdot c = 4 \text{ m} \cdot 2,2 \text{ m} = 8,8 \text{ m}^2$

Insgesamt muss eine Fläche gefliest werden von:

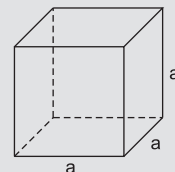
$$A = A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 = 118,4 \text{ m}^2$$

Die Kosten hierfür betragen $118,4 \cdot (25 \text{ €} + 35 \text{ €}) = 7\,104 \text{ €}$.

Der Würfel ist ein Quader, dessen Seiten alle gleich lang sind.

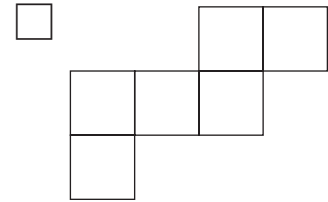
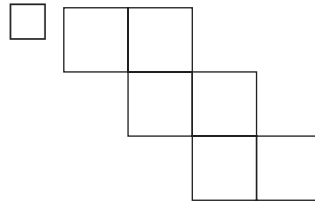
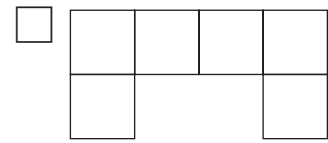
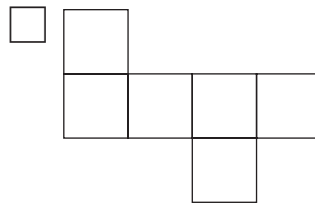
Das musst du wissen!

- Das **Volumen** eines **Würfels** beträgt:
 $V = a \cdot a \cdot a = a^3$
- Die **Oberfläche** besteht aus sechs Quadraten: $O = 6 \cdot a^2$
- Ein Würfel hat insgesamt 12 gleich lange Kanten. Die Summe der **Kantenlängen** eines Würfels beträgt $K = 12a$.
- Das **Netz** eines Würfels besteht aus sechs Quadraten.



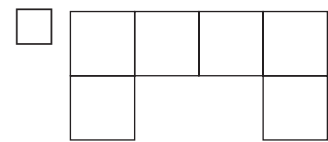
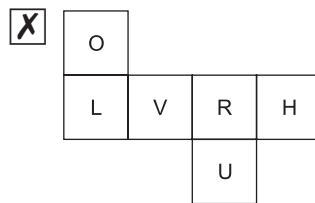
Beispiel

Kreuze an, aus welchen der nachfolgenden Figuren man einen Würfel falten kann:

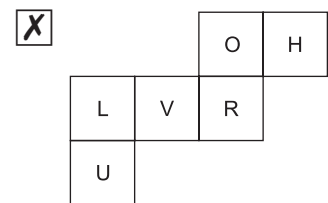
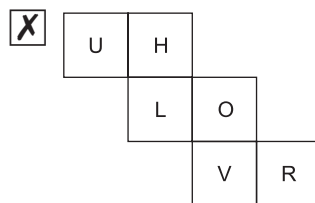


Lösung:

Die Würfel­flächen können so gewählt werden (O=Oben, L=Links, V=Vorne, R=Rechts, H=Hinten, U=Unten):



Die beiden unteren Quadrate würden dieselbe Würfel­seite bedecken; Würfel nicht möglich.



Aufgaben

109. Ein Quader hat eine Länge von $a=2$ cm. Die Breite b soll doppelt so lang sein wie a und die Höhe c noch einmal doppelt so lang wie b .
Berechne den Oberflächeninhalt des Quaders.

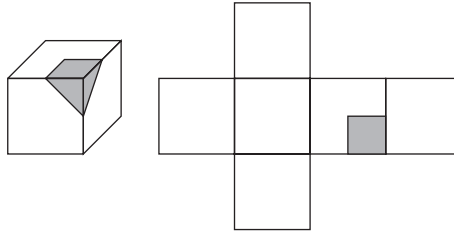
110. Kreuze die richtigen Antworten an:

Wenn man die Kantenlänge a eines Quaders vervierfacht und gleichzeitig die Kantenlänge c des Quaders halbiert, dann ...

- verdoppelt sich das Volumen des Quaders.
- verdoppelt sich die Summe der Kantenlängen des Quaders.
- verdoppelt sich die Oberfläche des Quaders.
- wird die Summe der Kantenlängen auf jeden Fall größer.

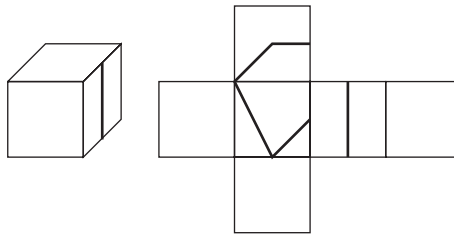
111. Karin hat insgesamt 2,40 m Draht zur Verfügung und möchte ein Kantenmodell eines Quaders herstellen, dessen Seitenlängen sich wie $a : b : c = 1 : 2 : 3$ verhalten. Welche Abmessungen wird der Quader haben?

112. Im Bild siehst du einen Würfel, der an einer Ecke farbig angestrichen wurde.



Ergänze im obenstehenden Netz die zugehörige Farbfläche.

113. Ergänze im Schrägbild des Würfels die im Würfelnetz eingezeichneten Linien:



114. Wie groß ist ungefähr das Volumen des Würfels? Kreuze an.

- 25 dm³
 100 dm³
 1 500 dm³



10 Spiegelungen und Symmetrie

Das musst du wissen!

Viele Objekte in der Natur, z. B. Blumen, weisen Regelmäßigkeiten auf, die vom Betrachter als angenehm und schön empfunden werden. Solche Regelmäßigkeiten wie Symmetrien lassen sich auch mathematisch bearbeiten.

• Achsenspiegelung

Bei einer Achsenspiegelung wird jeder Punkt an einer Geraden (Achse) so gespiegelt, dass

- die Verbindungsstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt senkrecht auf der Achse steht und
- die Achse die Strecke zwischen Punkt und Bildpunkt halbiert.

• Achsensymmetrie

Eine Figur bezeichnet man als achsensymmetrisch zu einer Geraden, wenn sie durch Spiegelung an dieser Geraden auf sich selbst abgebildet wird.

Aufgabe 109

$$\begin{aligned}
 a &= 2 \text{ cm}; & b &= 2a = 2 \cdot 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}; & c &= 2b = 2 \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm} \\
 O &= 2ab + 2ac + 2bc \\
 &= 2 \cdot 2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} + 2 \cdot 2 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} + 2 \cdot 4 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm} \\
 &= 16 \text{ cm}^2 + 32 \text{ cm}^2 + 64 \text{ cm}^2 \\
 &= 112 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Berechne b aus a; berechne c aus b.

Ergebnis: Der Oberflächeninhalt beträgt 112 cm^2 .

Aufgabe 110

- verdoppelt sich das Volumen des Quaders.
richtig; der Quader hat dann das doppelte Volumen
- verdoppelt sich die Summe der Kantenlängen des Quaders.
falsch; kann höchstens zufällig so sein
- verdoppelt sich die Oberfläche des Quaders.
falsch; kann höchstens zufällig so sein
- wird die Summe der Kantenlängen auf jeden Fall größer.
falsch; für $a=1 \text{ cm}$, $b=5 \text{ cm}$ und $c=10 \text{ cm}$ hat der neue Quader die Seitenlängen $a_{\text{neu}}=4 \text{ cm}$ und $c_{\text{neu}}=5 \text{ cm}$.
Die alte Kantensumme von $4 \cdot 1 \text{ cm} + 4 \cdot 5 \text{ cm} + 4 \cdot 10 \text{ cm} = 64 \text{ cm}$ reduziert sich dann auf $4 \cdot 4 \text{ cm} + 4 \cdot 5 \text{ cm} + 4 \cdot 5 \text{ cm} = 56 \text{ cm}$.

Das neue Volumen ist $V = 4a \cdot b \cdot \frac{c}{2} = 2 \cdot a \cdot b \cdot c$.

Summe der Kantenlängen wird zu:
 $4 \cdot 4a + 4 \cdot b + 4 \cdot \frac{c}{2} = 16a + 4b + 2c \neq 8a + 8b + 8c$

Die Oberfläche wird zu:
 $O = 2 \cdot 4a \cdot b + 2 \cdot b \cdot \frac{c}{2} + 2 \cdot 4a \cdot \frac{c}{2} = 8ab + bc + 4ac$
 $\neq 4ab + 4bc + 4ac$

Suche hier ein Gegenbeispiel.

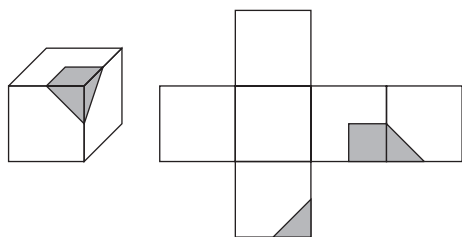
Wenn c recht groß ist, nimmt die Halbierung mehr von der Kantenlänge weg, als durch eine Vervielfachung der relativ kleinen Seite a hinzukommt.

Aufgabe 111

Die Kantenlänge für $a=x$, $b=2x$, $c=3x$ ist
 $K = 4 \cdot a + 4 \cdot b + 4 \cdot c = 4 \cdot x + 4 \cdot 2x + 4 \cdot 3x = 24x$.
 Aus $24x = 240 \text{ cm}$ folgt $x = 10 \text{ cm}$ und somit für den Quader:
 $a = 10 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $c = 30 \text{ cm}$

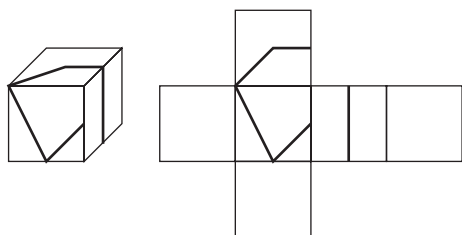
Wenn die Seite $a = x \text{ cm}$ lang ist, dann muss $b = 2x \text{ cm}$ und $c = 3x \text{ cm}$ lang sein, damit das Seitenverhältnis korrekt ist.

Aufgabe 112



Das rechte Quadrat wird nach unten geklappt und bildet die rechte Seite des Würfels; das untere Quadrat bildet nach dem Falten die Vorderseite des Würfels, bei der die rechte obere Ecke markiert ist.

Aufgabe 113



Das obere Quadrat bildet die obere Würfelseite, das darunterliegende Quadrat dann die Vorderseite; hierdurch kann man die markierte Linie einfach einzeichnen.

▣ Hinweise und Tipps

Aufgabe 114

- 25 dm³
- 100 dm³
- 1 500 dm³

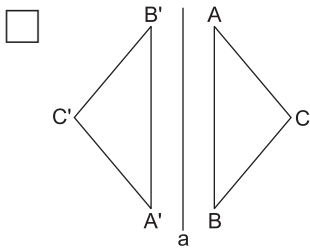
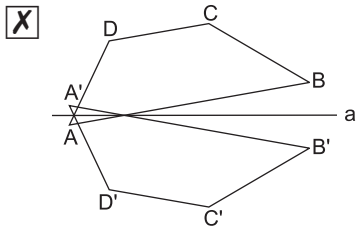
Die Kantenlänge a des Würfels ist ungefähr so lang wie das Schienbein des Jungen.
Nimmt man $a = 50 \text{ cm}$ an, folgt:

$$V = a^3 = (50 \text{ cm})^3 = 125\,000 \text{ cm}^3$$

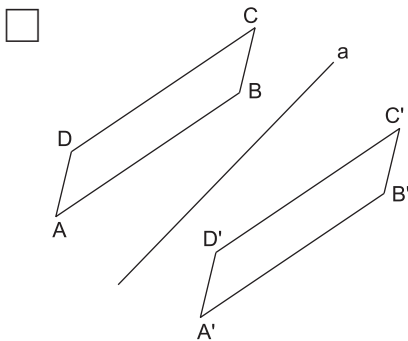
$$= 125 \text{ dm}^3$$

$$\approx 100 \text{ dm}^3$$

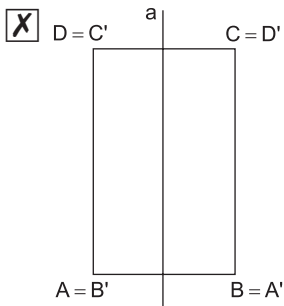
Aufgabe 115



Die Bezeichnung der Bildpunkte der Punkte A und B gehört vertauscht.

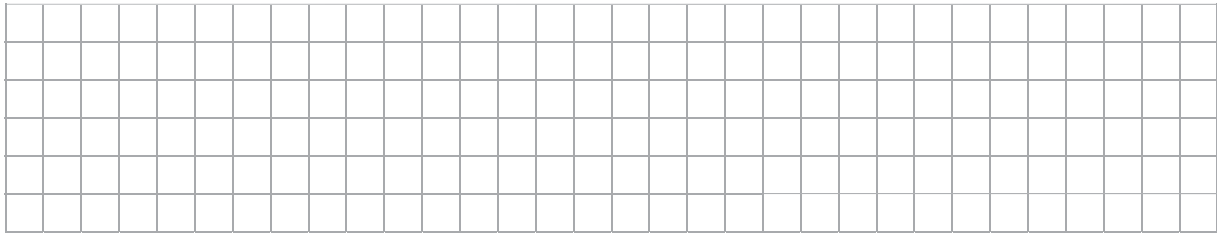


Die Figur wurde nur parallel verschoben, nicht gespiegelt.



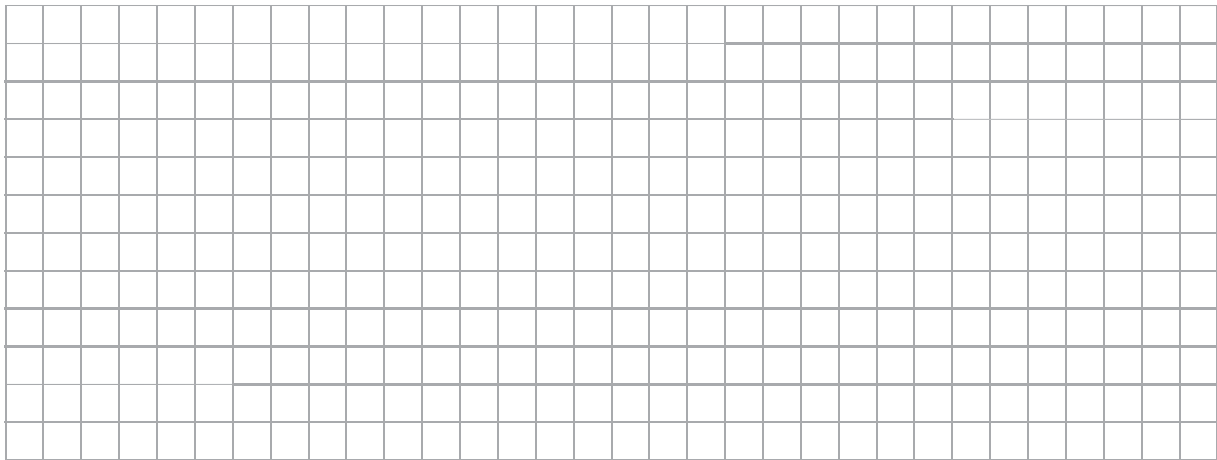
Diese Figur wird durch die Spiegelung auf sich selbst abgebildet.

- a) Prüfe rechnerisch nach, ob die Befolgung obiger Anweisungen mit der gedachten Zahl 29 auch wirklich auf das Ergebnis 116 führt.



- b) Setze für die von Chrissy gedachte Zahl die Variable n und führe Peters Rechenanweisungen mit dieser Variablen durch.

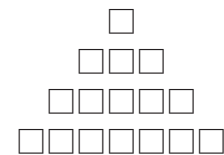
Wie kann Peter demzufolge schnell von der Antwort „das Ergebnis lautet 48“ auf die jetzt gedachte Zahl schließen?



Aufgabe 4

Zahlen, die sich aus der Summe aufeinanderfolgender ungerader Zahlen ergeben, wollen wir als Quaddi-Zahlen bezeichnen.

Quaddi-Zahlen lassen sich durch nebenstehendes Bild veranschaulichen. Die Abbildung zeigt die vierte Quaddi-Zahl 16, denn hierfür benötigt man insgesamt $1+3+5+7=16$ Kästchen.



- a) Vervollständige die Tabelle.

1. Quaddi-Zahl Q_1	2. Quaddi-Zahl Q_2	3. Quaddi-Zahl Q_3	4. Quaddi-Zahl Q_4	5. Quaddi-Zahl Q_5
□		□ □□□ □□□□□	□ □□□ □□□□□ □□□□□□□	
1		9	16	

Übungsarbeit 2 – Lösungen

Aufgabe 1

a) Sie hat hierfür $2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ Möglichkeiten.

b) $24 : 2 = 12$

Sie könnte also

- 12 Herzanhänger und 1 sonstigen Anhänger oder
- 6 Herzanhänger und 2 sonstige Anhänger oder
- 4 Herzanhänger und 3 sonstige Anhänger oder
- 3 Herzanhänger und 4 sonstige Anhänger oder
- 2 Herzanhänger und 6 sonstige Anhänger oder
- 1 Herzanhänger und 12 sonstige Anhänger besitzen.

Hinweise und Tipps

Für jede der beiden Halsketten hat sie jeweils 5 Möglichkeiten, ein Herz auszuwählen.

Zu jeder dieser $2 \cdot 5 = 10$ Möglichkeiten hat sie jeweils 4 Möglichkeiten, einen anderen Anhänger hinzuzufügen. Somit hat sie insgesamt $10 \cdot 4 = 40$ Kombinationsmöglichkeiten.

Für jede der beiden Kettenbänder hat sie 12 Kombinationsmöglichkeiten zur Verfügung.

Für die Zahl 12 sind folgende Konstellationen möglich:

$12 \cdot 1$
 $6 \cdot 2$
 $4 \cdot 3$
 $3 \cdot 4$
 $2 \cdot 6$
 $1 \cdot 12$

Aufgabe 2

a) $89,90 \text{ €} \cdot 0,8 = 71,92 \text{ €}$

Die reduzierte Jacke kostete am Samstag noch 71,92 €.

$71,92 \text{ €} \cdot 0,9 = 64,728 \text{ €} \approx 64,73 \text{ €}$

$71,92 \text{ €} - 64,73 \text{ €} = 7,19 \text{ €}$

Wenn er die Jacke am Sonntag gekauft hätte, hätte er 7,19 € zusätzlich sparen können.

b) ja nein

Da die zusätzlichen 10 % von einem geringeren Preis abgezogen werden, beträgt der Sonntagsrabatt in Wirklichkeit etwas weniger als 30 % des ursprünglichen Preises.

Bei 20 % Rabatt muss er noch 80 % des ursprünglichen Kaufpreises bezahlen.

Am Sonntag erhält er auf den reduzierten Kaufpreis nochmals 10 %, muss also nur noch 90 % von 71,92 € bezahlen.

Die Ersparnis kann auch direkt über $71,92 \text{ €} \cdot 0,1 \approx 7,19 \text{ €}$ berechnet werden.

Du kannst auch mithilfe einer Rechnung begründen:
 $0,7 \cdot 89,90 \text{ €} = 62,93 \text{ €} < 64,73 \text{ €}$

Aufgabe 3

a) Gedachte Zahl: 29

Vorgänger: 28

Nachfolger: 30

$30^2 - 28^2 = 900 - 784 = 116$

b) Gedachte Zahl: n

Vorgänger: n - 1

Nachfolger: n + 1

$$\begin{aligned}
 (n+1)^2 - (n-1)^2 &= (n^2 + 2n + 1) - (n^2 - 2n + 1) \\
 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 \\
 &= 2n + 2n \\
 &= 4n
 \end{aligned}$$

Als Ergebnis ergibt sich 4n; das ist genau das Vierfache der gedachten Zahl.

Peter muss also nur das Ergebnis durch 4 dividieren, um die gedachte Zahl zu erhalten.

Binomische Formeln!

Vorzeichen beim Klammern auflösen beachten!



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK