Abit

MEHR
ERFAHREN

Mathemati

Gymnasium

Bayern

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Analysis

Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- An relevanten Stellen wird auf die **Merkhilfe**, die Ihnen als Erinnerungsstütze im Abitur dient, verwiesen.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Lupe gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

2 Gebrochen-rationale Funktionen

2.1 Nullstellen und Polstellen

Eine gebrochen-rationale Funktion f ist der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen u(x) und v(x):

$f\colon x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen des Nenners } v(x)\}$

Nullstellen des Nenners v(x) sind Definitionslücken und *mögliche* Polstellen der Funktion f.
Nullstellen des Zählers u(x) sind *mögliche* Nullstellen der Funktion f.

Eine **Nullstelle** des Zählers ist nur dann Nullstelle der Funktion f, wenn sie nicht zugleich Nullstelle des Nenners ist.

Eine Definitionslücke x_0 (Nullstelle des Nenners) heißt **Polstelle**, falls
- x_0 keine Nullstelle des Zählers ist oder
- x_0 zugleich Nullstelle des Zählers und die Vielfachheit der Nullstelle im Nenner größer als die Vielfachheit der Nullstelle im Zähler ist.

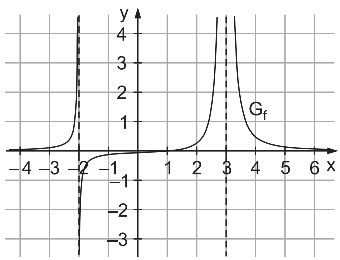
Andernfalls ist x_0 eine **(be)hebbare Definitionslücke**.
Analog zu Nullstellen betrachtet man Polstellen mit ihrer Vielfachheit.

Geben Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f sowie die Art der Definitionslücken an.

1. $f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)^2}$

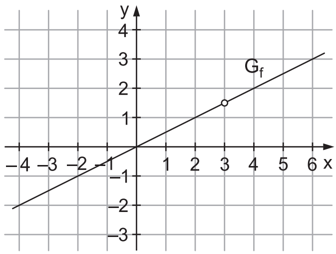
$v(x) = (x+2)(x-3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = -2 \text{ oder } x = 3$
$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$

$u(x) = x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = 1$



Die Funktion f besitzt
- bei $x = 1$ eine einfache Nullstelle,
- bei $x = -2$ eine einfache Polstelle und
- bei $x = 3$ eine doppelte Polstelle.

2. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x - 6} = \frac{x(x-3)}{2(x-3)}$



$v(x) = 2(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 3$

$\Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$u(x) = x(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \;$ oder $\; x = 3 \; (\notin \mathbb{D}_f)$

Die Funktion f besitzt

- bei $x = 0$ eine einfache Nullstelle und
- bei $x = 3$ eine (be)hebbare Definitionslücke.

Für $x \neq 3$ kann man im Funktionsterm kürzen:

$$f(x) = \frac{x\,\cancel{(x-3)}}{2\,\cancel{(x-3)}} = \frac{x}{2} \quad \text{für } x \neq 3$$

2.2 Grenzwerte und Asymptoten

Allgemein unterscheidet man zwei Arten von Grenzwerten:

- Verhalten im Unendlichen
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$
- Verhalten in der Nähe einer Definitionslücke, wenn man sich von links ($x \to x_0^-$) bzw. von rechts ($x \to x_0^+$) nähert
  $\lim\limits_{x \to x_0} f(x); \quad x_0 \notin \mathbb{D}_f$

Verhalten in der Nähe einer Polstelle, senkrechte Asymptoten

Ziel dieser Grenzwertbetrachtung ist es, das Verhalten einer Funktion in der Umgebung einer Polstelle zu untersuchen. An einer Polstelle besitzt der Graph der Funktion eine senkrechte Asymptote. Bei der Annäherung an diese Asymptote werden die Funktionswerte beliebig groß bzw. klein. Als Grenzwert ergibt sich hier also $+\infty$ oder $-\infty$.

2 Wahrscheinlichkeitsberechnungen

2.1 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Den einzelnen Elementen eines Ergebnisraums lassen sich Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird mit P(A) bezeichnet.

Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

- $0 \leq P(A) \leq 1$ für jedes Ereignis $A \subseteq \Omega$
- $P(\Omega) = 1$ und $P(\{\}) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (**Additionssatz**)

Bei der Produktion eines Spielzeugs für Kinder können zwei Fehler auftreten. 10 % der produzierten Spielzeuge haben einen Funktionsfehler (F_1), 20 % haben einen Farbfehler (F_2). 25 % aller Spielzeuge haben mindestens einen Fehler. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spielzeug beide Fehler aufweist.

Gegeben: $P(F_1) = 0{,}1 \quad P(F_2) = 0{,}2 \quad P(F_1 \cup F_2) = 0{,}25$

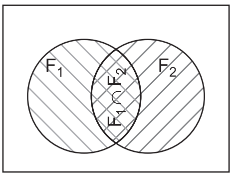
Gesucht: $P(F_1 \cap F_2)$

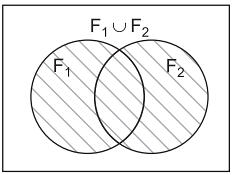
Nach dem Additionssatz gilt:

$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)$

$\Rightarrow \quad P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cup F_2)$

$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}25 = 0{,}05$



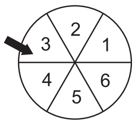


2.2 Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse (Elementarereignisse) aus Ω gleich wahrscheinlich sind, heißt Laplace-Experiment.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A erhält man in diesem Fall, indem man die Mächtigkeit von A durch die Mächtigkeit von Ω teilt:
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

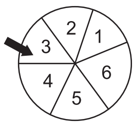
Zwei verschiedene Glücksräder werden je einmal gedreht. Geben Sie jeweils den Ergebnisraum Ω an und entscheiden Sie, ob ein Laplace-Experiment vorliegt. Berechnen Sie in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, dass der Pfeil auf einer geraden Zahl stehen bleibt.

Glücksrad 1



$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \qquad |\Omega| = 6$
Laplace-Experiment, da die einzelnen Sektoren des Rades gleich groß sind und damit gilt:
$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$
A: „Der Pfeil zeigt auf eine gerade Zahl."
$A = \{2; 4; 6\} \qquad |A| = 3$
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Glücksrad 2



$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \qquad |\Omega| = 6$
kein Laplace-Experiment, da die einzelnen Sektoren des Rades nicht gleich groß sind

© STARK Verlag

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.