

Abit **MEHR  
ERFAHREN**

Mathematik

Gymnasium

Bayern

*Das musst du können!*

**STARK**

# Inhalt

## Analysis

<b>1</b>	<b>Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften</b>	<b>1</b>
1.1	Ganzrationale Funktion	1
1.2	Wurzelfunktion	2
1.3	Betragsfunktion	2
1.4	Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	3
1.5	Entwicklung von Funktionen	4
1.6	Vielfachheit von Nullstellen	6
1.7	Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems)	7
<b>2</b>	<b>Gebrochen-rationale Funktionen</b>	<b>8</b>
2.1	Nullstellen und Polstellen	8
2.2	Grenzwerte und Asymptoten	9
<b>3</b>	<b>Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion</b>	<b>14</b>
3.1	Eigenschaften und Rechenregeln	14
3.2	Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall	16
<b>4</b>	<b>Ableitung und Newton-Verfahren</b>	<b>17</b>
4.1	Die Ableitung	17
4.2	Newton-Verfahren	19
<b>5</b>	<b>Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung</b>	<b>20</b>
5.1	Monotonieverhalten, Extrem- und Terrassenpunkte	20
5.2	Krümmungsverhalten, Wendepunkte	23
5.3	Extremwertaufgaben	26
5.4	Umkehrfunktion	28
<b>6</b>	<b>Stammfunktion und unbestimmtes Integral</b>	<b>30</b>
6.1	Stammfunktion	30
6.2	Unbestimmtes Integral	31

<b>7</b>	<b>Bestimmtes Integral und Flächenberechnung</b>	<b>32</b>
7.1	Bestimmtes Integral	32
7.2	Flächenberechnung	33
<b>8</b>	<b>Integralfunktion</b>	<b>36</b>

## Geometrie

<b>1</b>	<b>Vektoren</b>	<b>38</b>
1.1	Rechnen mit Vektoren	38
1.2	Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	39
1.3	Skalarprodukt	40
1.4	Vektor- bzw. Kreuzprodukt	40
<b>2</b>	<b>Geraden und Ebenen</b>	<b>42</b>
2.1	Geraden	42
2.2	Parameterform einer Ebene	44
2.3	Normalenform einer Ebene	45
2.4	Umwandlung: Parameterform $\leftrightarrow$ Normalenform	46
<b>3</b>	<b>Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten</b>	<b>48</b>
3.1	Lage zweier Geraden	48
3.2	Lage einer Geraden zu einer Ebene	49
3.3	Lage zweier Ebenen	50
3.4	Schnittwinkel	52
<b>4</b>	<b>Abstände zwischen geometrischen Objekten</b>	<b>53</b>
4.1	Abstand zu einer Ebene	53
4.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	54
4.3	Abstand zweier windschiefer Geraden	56
<b>5</b>	<b>Die Kugel</b>	<b>57</b>
5.1	Lage eines Punktes zu einer Kugel	57
5.2	Lage einer Ebene zu einer Kugel	58
5.3	Lage zweier Kugeln	59

# Stochastik


<b>1</b>	<b>Ereignisse</b>	<b>60</b>
<b>2</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsberechnungen</b>	<b>62</b>
2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	62
2.2	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	63
2.3	Baumdiagramme und Vierfeldertafeln	64
2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	66
<b>3</b>	<b>Urnenmodelle</b>	<b>68</b>
3.1	Anzahl der Möglichkeiten	68
3.2	Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	69
<b>4</b>	<b>Zufallsgrößen</b>	<b>71</b>
4.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	71
4.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	72
4.3	Binomialverteilte Zufallsgrößen	74
<b>5</b>	<b>Testen von Hypothesen</b>	<b>77</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>79</b>



# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- An relevanten Stellen wird auf die **Merkhilfe**, die Ihnen als Erinnerungstütze im Abitur dient, verwiesen.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Lupe  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag



## 2 Gebrochen-rationale Funktionen

### 2.1 Nullstellen und Polstellen

Eine gebrochen-rationale Funktion  $f$  ist der Quotient zweier ganz-rationaler Funktionen  $u(x)$  und  $v(x)$ :

$$f: x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{mit} \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen des Nenners } v(x)\}$$

Nullstellen des Nenners  $v(x)$  sind Definitionslücken und *mögliche* Polstellen der Funktion  $f$ .

Nullstellen des Zählers  $u(x)$  sind *mögliche* Nullstellen der Funktion  $f$ .

Eine **Nullstelle** des Zählers ist nur dann Nullstelle der Funktion  $f$ , wenn sie nicht zugleich Nullstelle des Nenners ist.

Eine Definitionslücke  $x_0$  (Nullstelle des Nenners) heißt **Polstelle**, falls

- $x_0$  keine Nullstelle des Zählers ist oder
- $x_0$  zugleich Nullstelle des Zählers und die Vielfachheit der Nullstelle im Nenner größer als die Vielfachheit der Nullstelle im Zähler ist.

Andernfalls ist  $x_0$  eine **(be)hebbare Definitionslücke**.

Analog zu Nullstellen betrachtet man Polstellen mit ihrer Vielfachheit.



Geben Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion  $f$  sowie die Art der Definitionslücken an.

$$1. \quad f(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-3)^2}$$

$$v(x) = (x+2)(x-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{oder} \quad x = 3$$

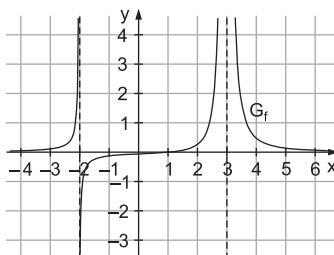
$$\Rightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$$

$$u(x) = x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Die Funktion  $f$  besitzt

- bei  $x = 1$  eine einfache Nullstelle,
- bei  $x = -2$  eine einfache Polstelle  
und
- bei  $x = 3$  eine doppelte Polstelle.





$$2. f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x - 6} = \frac{x(x-3)}{2(x-3)}$$

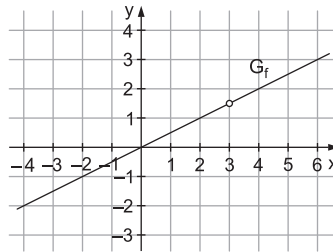
$$v(x) = 2(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$u(x) = x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = 3 (\notin \mathbb{D}_f)$$



Die Funktion  $f$  besitzt

- bei  $x=0$  eine einfache Nullstelle und
- bei  $x=3$  eine (be)hebbarke Definitionslücke.

Für  $x \neq 3$  kann man im Funktionsterm kürzen:

$$f(x) = \frac{\cancel{x(x-3)}}{2(\cancel{x-3})} = \frac{x}{2} \quad \text{für } x \neq 3$$

## 2.2 Grenzwerte und Asymptoten

Allgemein unterscheidet man zwei Arten von Grenzwerten:

- Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

- Verhalten in der Nähe einer Definitionslücke, wenn man sich von links ( $x \rightarrow x_0^-$ ) bzw. von rechts ( $x \rightarrow x_0^+$ ) nähert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x); \quad x_0 \notin \mathbb{D}_f$$

### Verhalten in der Nähe einer Polstelle, senkrechte Asymptoten

Ziel dieser Grenzwertbetrachtung ist es, das Verhalten einer Funktion in der Umgebung einer Polstelle zu untersuchen. An einer Polstelle besitzt der Graph der Funktion eine senkrechte Asymptote. Bei der Annäherung an diese Asymptote werden die Funktionswerte beliebig groß bzw. klein. Als Grenzwert ergibt sich hier also  $+\infty$  oder  $-\infty$ .



## 2 Wahrscheinlichkeitsberechnungen

### 2.1 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Den einzelnen Elementen eines Ergebnisraums lassen sich Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $A$  wird mit  $P(A)$  bezeichnet.

#### Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit

- $0 \leq P(A) \leq 1$  für jedes Ereignis  $A \subseteq \Omega$
- $P(\Omega) = 1$  und  $P(\{\}) = 0$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  (**Additionssatz**)



Bei der Produktion eines Spielzeugs für Kinder können zwei Fehler auftreten. 10 % der produzierten Spielzeuge haben einen Funktionsfehler ( $F_1$ ), 20 % haben einen Farbfehler ( $F_2$ ). 25 % aller Spielzeuge haben mindestens einen Fehler. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spielzeug beide Fehler aufweist.

Gegeben:  $P(F_1) = 0,1$     $P(F_2) = 0,2$     $P(F_1 \cup F_2) = 0,25$

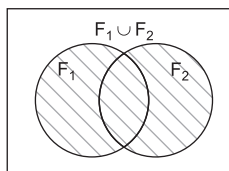
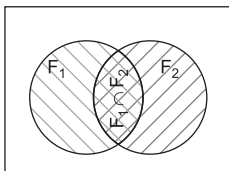
Gesucht:  $P(F_1 \cap F_2)$

Nach dem Additionssatz gilt:

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)$$

$$\Rightarrow P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cup F_2)$$

$$P(F_1 \cap F_2) = 0,1 + 0,2 - 0,25 = 0,05$$



## 2.2 Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit

Ein Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse (Elementarereignisse) aus  $\Omega$  gleich wahrscheinlich sind, heißt Laplace-Experiment.

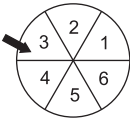
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A erhält man in diesem Fall, indem man die Mächtigkeit von A durch die Mächtigkeit von  $\Omega$  teilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$



Zwei verschiedene Glücksräder werden je einmal gedreht. Geben Sie jeweils den Ergebnisraum  $\Omega$  an und entscheiden Sie, ob ein Laplace-Experiment vorliegt. Berechnen Sie in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit, dass der Pfeil auf einer geraden Zahl stehen bleibt.

### Glücksrad 1



$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad |\Omega| = 6$$

Laplace-Experiment, da die einzelnen Sektoren des Rades gleich groß sind und damit gilt:

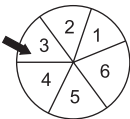
$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

A: „Der Pfeil zeigt auf eine gerade Zahl.“

$$A = \{2; 4; 6\} \quad |A| = 3$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Glücksrad 2



$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad |\Omega| = 6$$

kein Laplace-Experiment, da die einzelnen Sektoren des Rades nicht gleich groß sind



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

**STARK**