MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Mechanik

STARK

MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Mechanik

STARK

Inhalt

Fortsetzung siehe nächste Seite

Autor: Klaus-Peter Schultze

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Band halten Sie ein **kompaktes Trainingsbuch** in Händen, das Sie bei der **Vorbereitung auf Klausuren und Prüfungen** wirksam unterstützt. Es lässt sich darüber hinaus sehr gut **unterrichtsbegleitend** einsetzen, wie es sich auch zur **Vertiefung und Wiederholung des Lehrstoffes** und damit **zum Schließen individueller Wissenslücken** eignet. Dieses Anliegen spiegelt sich auch in seinem Aufbau wider:

- Jedes der ersten 11 Kapitel gliedert sich in einen Theorieteil und einen Aufgabenteil. Im **Theorieteil** wird der wesentliche Stoff **kompakt und verständlich erklärt**. Neue Formeln und Begriffe werden in **Beispielaufgaben** veranschaulicht.

- Die **Aufgabenteile** dienen dem Überprüfen, Anwenden und Vertiefen des erworbenen Wissens.

- Die **Lösungen** aller Aufgaben stehen im 12. Kapitel. Mit den Lösungen sind Sie in der Lage, die Korrektheit und Qualität Ihrer Lösungsversuche objektiv zu beurteilen. Wegen der **ausführlichen Darstellung** der Lösungen wird es Ihnen leicht fallen, die einzelnen Lösungsschritte nachzuvollziehen.

- Alle im Theorieteil vorkommenden **Formeln sind nummeriert**. Die Formel mit der Bezeichnung (3.4) ist beispielsweise die vierte Formel aus Kapitel 3 (Energieerhaltung). Die Anwendung der Formel wird später jeweils durch Angabe der „Formelnummer“ über dem entsprechenden Gleichheitszeichen angezeigt.
  Beispiel: $W \overset{(3.1)}{=} F \cdot s$

- Um Ihnen das Nachschlagen der Formeln zu erleichtern, finden Sie im letzten Kapitel **alle in diesem Band vorkommenden Formeln zusammengefasst**.

- Das umfangreiche **Stichwortverzeichnis** ermöglicht Ihnen die gezielte Suche nach bestimmten Begriffen und Inhalten.

Viel Erfolg wünscht Ihnen

Klaus-Peter Schultze

6.6 Lineares Kraftgesetz

Für die Kraft F, mit der der schwingende Pendelkörper (Masse m) beschleunigt wird, gilt:

$$F \overset{(2.2)}{=} m \cdot a \overset{(6.4)}{=} m \cdot [-\omega^2 s_0 \sin(\omega t + \varphi_0)]$$

$$F = -m\omega^2 \cdot \underbrace{s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)}_{s} \qquad (6.5)$$

Einheiten: $[F] = N$; $[m] = kg$; $[\omega] = s^{-1}$; $[s_0] = m$; $[t] = s$; $[\varphi_0] = 1$;

mit

$$s \overset{(6.1)}{=} s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow F = -m\omega^2 \cdot s$$

Der konstante (zeitunabhängige) Faktor $m\omega^2$ wird als **Richtgröße D** bezeichnet.

Daraus folgt das **lineare Kraftgesetz**:

$$F = -D \cdot s \text{ mit } D = m\omega^2 \qquad (6.6)$$

Einheiten: $[F] = [D] = \frac{N}{m} = \frac{kg}{s^2}$; $[s] = m$; $[m] = kg$; $[\omega] = s^{-1}$

Hinweis: Die Richtgröße D beim Federpendel ist mit der Federkonstanten (Federhärte) identisch, vgl. (3.5).

Das lineare Kraftgesetz lautet in Worten:

Regel

1. Die beschleunigende Kraft F (und damit auch die Beschleunigung a) ist entgegengesetzt zur Elongation s gerichtet (Minuszeichen!).
2. Der Betrag der Kraft F (und damit auch der Betrag der Beschleunigung a) ist zum Betrag der Elongation s direkt proportional.

Folgerungen aus 1:
Die Kraft F wirkt auf den Pendelkörper immer „rücktreibend“, d. h. zum Schwingungsmittelpunkt hin.

⇒ Bewegt sich der Körper vom Schwingungsmittelpunkt weg, so wird er gebremst. Bewegt sich der Körper zum Schwingungsmittelpunkt hin, so wird er schneller.

⇒ Im Schwingungsmittelpunkt ist der Geschwindigkeitsbetrag am größten. Im höchsten und tiefsten Schwingungspunkt (Umkehrpunkte) ist die Geschwindigkeit jeweils momentan gleich null.

Folgerungen aus 2:
Je weiter der Pendelkörper vom Schwingungsmittelpunkt entfernt ist, desto größer ist der Betrag der Kraft F (und damit auch der Beschleunigung a).

$\Rightarrow$ Im höchsten und tiefsten Schwingungspunkt ($\triangleq$ maximale Entfernung vom Schwingungsmittelpunkt) ist der Betrag der Beschleunigungskraft F (und damit auch der Betrag der Beschleunigung a) maximal.
Im Schwingungsmittelpunkt (s = 0) ist die Kraft F (und damit auch die Beschleunigung a) momentan gleich null.

Weiter gilt:

$$D \overset{(6.6)}{=} m\,\omega^2 \overset{(6.2)}{=} m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \;\Rightarrow\; T^2 = (2\pi)^2\,\frac{m}{D}$$

Daraus folgt für die Schwingungsdauer der harmonischen Schwingung:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (6.7)$$

Einheiten: $[T] = s$; $[m] = kg$; $[D] = \frac{kg}{s^2}$

6.7 Schwingungsenergie

Kinetische Energie (vgl. S. 23)

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\,mv^2 \overset{(6.3)}{=} \frac{1}{2}\,mv_0{}^2\,(\cos\varphi)^2 \qquad (6.8)$$

Einheiten: $[E_{kin}] = J$; $[m] = kg$; $[v] = [v_0] = \frac{m}{s}$; $[\varphi] = [\varphi_0] = 1$; $[\omega] = s^{-1}$

Beachten Sie dabei: $\varphi = \omega t + \varphi_0$ und $v_0 = \omega s_0$

Potenzielle Energie (setzt sich zusammen aus E_h und E_{Sp}, vgl. S. 24 f.)

$$E_{pot} = \frac{1}{2}\,Ds^2 \overset{(6.1)}{=} \frac{1}{2}\,Ds_0{}^2\,(\sin\varphi)^2 \qquad (6.9)$$

Einheiten: $[E_{pot}] = J$; $[D] = \frac{kg}{s^2}$; $[s] = [s_0] = m$; $[\varphi] = [\varphi_0] = 1$; $[\omega] = s^{-1}$

Beachten Sie dabei: $\varphi = \omega t + \varphi_0$ und $D = m\omega^2$

Maximale kinetische Energie – Maximale potenzielle Energie – Gesamtenergie

Wenn der Pendelkörper durch die Gleichgewichtslage schwingt, ist die kinetische Energie maximal und die potenzielle Energie gleich null.
Wenn sich der Pendelkörper im oberen oder unteren Umkehrpunkt der Schwingung befindet, ist die potenzielle Energie maximal und die kinetische Energie gleich null.
Aus dem Energieerhaltungssatz folgt, dass die Gesamtenergie E_{ges} (Summe aus E_{kin} und E_{pot}) konstant ist.

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{\text{max. kin. Energie}} = \underbrace{\frac{1}{2} D s_0^2}_{\text{max. pot. Energie}} = \text{konstant} \tag{6.10}$$

6.8 Übersicht über die Schwingungsphasen

Phase φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Elongation s	$s = 0$ Gleichgewichts-lage	$s = s_0$ oberer (pos.) Umkehrpunkt	$s = 0$ Gleichgewichts-lage	$s = -s_0$ unterer (neg.) Umkehrpunkt
Geschwindigkeit v	$v = v_0$ max. Geschwin-digkeit nach oben (pos. Rich-tung)	$v = 0$	$v = -v_0$ max. Geschwin-digkeit nach unten (neg. Richtung)	$v = 0$
Beschleunigung a	$a = 0$	$a = -a_0$ max. Beschleu-nigung nach unten (neg. Richtung)	$a = 0$	$a = a_0$ max. Beschleu-nigung nach oben (pos. Richtung)
kinetische Energie	$E_{kin} = E_{ges}$ maximal	$E_{kin} = 0$	$E_{kin} = E_{ges}$ maximal	$E_{kin} = 0$
potenzielle Energie	$E_{pot} = 0$	$E_{pot} = E_{ges}$ maximal	$E_{pot} = 0$	$E_{pot} = E_{ges}$ maximal

Beispiel

Bestimmen Sie Elongation, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Schwingkörpers in Abhängigkeit von der Zeit t für eine harmonische Schwingung mit T = 4 s; $s_0 = \frac{3}{2}$ cm; $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ (zur Zeit t = 0: oberer Umkehrpunkt)! Stellen Sie die Funktionsgleichungen grafisch dar!

Lösung:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 \overset{(6.3)}{=} \omega \cdot s_0 = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1{,}5\,\mathrm{cm} = \underline{\underline{\frac{3}{4}\pi\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}} \approx \underline{\underline{2{,}36\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}}}$$

$$\Rightarrow \quad a_0 \overset{(6.4)}{=} \omega^2\, s_0 = \left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \cdot 1{,}5\ \mathrm{cm} = \underline{\underline{\frac{3}{8}\pi^2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}}} \approx \underline{\underline{3{,}7\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad s \overset{(6.1)}{=} s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{3}{2}\,\mathrm{cm} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v \overset{(6.3)}{=} v_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{3}{4}\pi\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a \overset{(6.4)}{=} -a_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\frac{3}{8}\pi^2\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Abb. 40 (nächste Seite) zeigt die t-s-, t-v- und t-a-Diagramme.

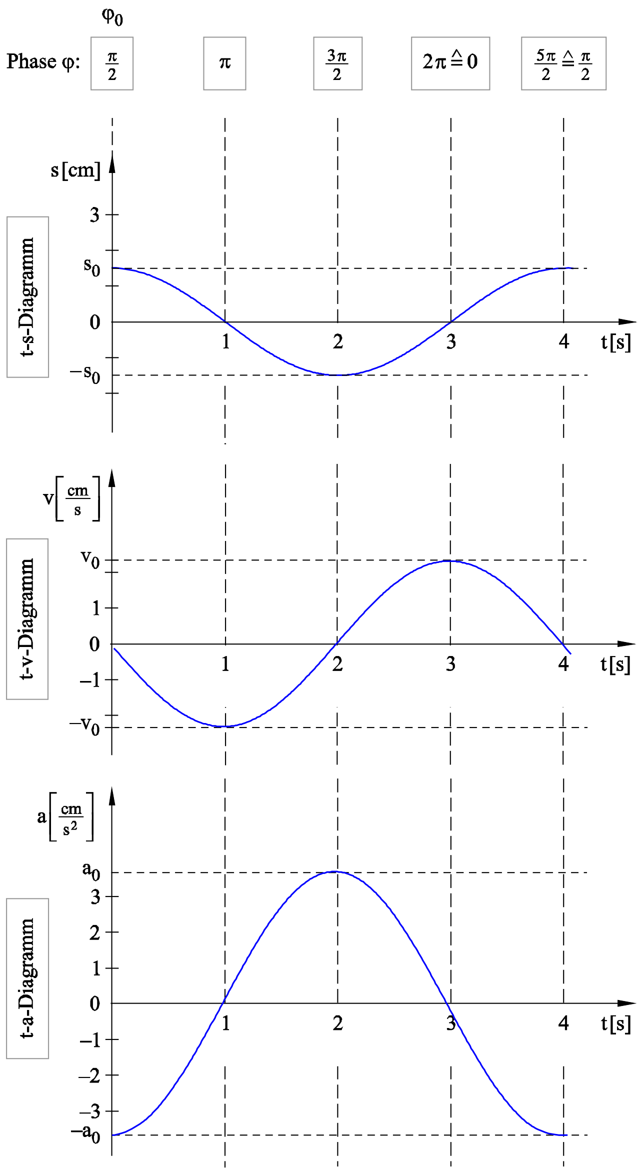

φ_0
Phase φ:
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
$2\pi \triangleq 0$
$\frac{5\pi}{2} \triangleq \frac{\pi}{2}$
t-s-Diagramm
s [cm]
3
s_0
0
$-s_0$
1
2
3
4
t[s]
t-v-Diagramm
$v\left[\frac{cm}{s}\right]$
v_0
1
0
–1
$-v_0$
1
2
3
4
t[s]
t-a-Diagramm
$a\left[\frac{cm}{s^2}\right]$
a_0
3
2
1
0
–1
–2
–3
$-a_0$
1
2
3
4
t[s]

Abb. 40

Aufgaben **38.** An einer als masselos angenommenen Schraubenfeder hängt eine Kugel ($m = 100$ g). Zieht man die Kugel aus der Gleichgewichtslage um 4 cm nach unten und lässt sie dort zur Zeit $t = 0$ s los, so entsteht eine harmonische Schwingung mit $T = 1$ s!

a) Skizzieren Sie das Zeit-Ort-Diagramm im Zeitintervall [0 s; 1,5 s]! (t-Achse: 1 cm A $\frac{1}{6}$ s; s-Achse: 1 cm A 2 cm).

b) Berechnen Sie jeweils für die Zeit $t = 0{,}9$ s die Elongation s, die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a! Geben Sie auch die Richtung dieser Größen an (d. h. nach oben oder nach unten?)!

c) Wie groß ist der maximale Geschwindigkeitsbetrag v_0? Zu welchen Zeiten und bei welchen Elongationen wird diese Geschwindigkeit jeweils erreicht?

d) Berechnen Sie den maximalen Beschleunigungsbetrag a_0 und den Betrag der maximalen Beschleunigungskraft F_0! Zu welchen Zeiten und bei welchen Elongationen werden a_0 und F_0 jeweils erreicht?

e) Bei welcher Elongation wird die Kugel mit der Kraft $F = 0{,}1$ N nach unten beschleunigt?

f) Skizzieren Sie das t-v- und das t-a-Diagramm der Schwingung!

g) Wie groß ist die Beschleunigung der Kugel 1 cm über dem Schwingungsmittelpunkt?

39. Eine unbelastete Hooke'sche Feder hat die Länge 70 cm. Hängt man an die Feder eine Kugel mit der Masse $m = 200$ g, so hat die Feder die Länge 94,8 cm (im Gleichgewichtszustand). Die Kugel wird nun aus der Gleichgewichtslage um 5 cm angehoben und dort zur Zeit $t = 0$ s losgelassen.

a) Zeigen Sie, dass die Feder eine Federkonstante von etwa $7{,}9\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$ hat!

b) Zeigen Sie, dass die Schwingungsdauer der Kugel etwa 1 s beträgt!

c) Skizzieren Sie das t-s-Diagramm der Schwingung im Zeitintervall [0 s; 2s]!
(t-Achse: 1 cm A $\frac{1}{6}$ s; s-Achse 1 cm A 2 cm)

d) Geben Sie die Elongation s als Funktion der Zeit t an!
Berechnen Sie die Elongation des Pendelkörpers zur Zeit $t = 0{,}9$ s!
Mit welcher Kraft wird der Pendelkörper zur Zeit $t = 0{,}9$ s beschleunigt?

e) Bei welcher Elongation und zu welchem Zeitpunkt ist die kinetische Energie des Federpendels erstmals maximal?
Berechnen Sie die maximale kinetische Energie des Pendels!

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}37\cdot 10^6\,\text{m}}{9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 2\pi\cdot 8{,}0581\cdot 10^2\,\text{s} = \underline{\underline{5\,063\text{ s}}}$$

$$5\,063\text{ s} = 1\text{ h}\quad 24\text{ min}\quad 23\text{ s}$$

Ein Sterntag müsste 1 h 24 min und 23 s dauern.

37. a) R: Erdradius; r: Bahnradius

Es gilt: $2\,R\pi = U \;\Rightarrow\; R = \frac{U}{2\pi} = \frac{40\,076{,}6\text{ km}}{2\pi} \approx 6\,378\text{ km}$

$$r = R + 200\text{ km} = 6\,378\text{ km} + 200\text{ km} = \underline{\underline{6\,578\text{ km}}}$$

b) Es gilt: Zentralkraft = Erdanziehungskraft

$$F_Z = G$$

$\Rightarrow$ mit (5.16) und (2.4): $m\,\omega^2 r = m\cdot g \quad |:m$

$$\omega^2 r = g$$

$$\omega^2 = \frac{g}{r}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{9{,}22\,\frac{\text{N}}{\text{kg}}}{6\,578\text{ km}}} \stackrel{(2.3)}{=} \sqrt{\frac{9{,}22\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{6{,}578\cdot 10^6\,\text{m}}} = \underline{\underline{1{,}1839\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}}}$$

$$\omega \stackrel{(5.13)}{=} \frac{2\pi}{T}\;\Big|\cdot\frac{T}{\omega} \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}1839\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}} \approx \underline{\underline{5\,307\text{ s}}}$$

c) Die Erde dreht sich von West nach Ost mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_E = 7{,}29\cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$ (vgl. Aufgabe 36 a).
Der Satellit dreht sich von Ost nach West mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_s = 1{,}1839\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$.
Da sich Erde und Satellit gegeneinander drehen, ergibt sich als relative Winkelgeschwindigkeit von Erde und Satellit die Summe von ω_E und ω_s:

$$\omega = \omega_E + \omega_s = \underline{\underline{1{,}2568\cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}}}$$

$\Rightarrow$ siehe oben: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}2568\cdot 10^{-3}}\,\text{s} \approx \underline{\underline{5\,000\text{ s}}}$

Natürlich ist die Umlaufzeit mit Berücksichtigung der Erddrehung kleiner, da die Erde dem Satelliten „entgegen kommt“.

38. a) Der tiefste Punkt der Schwingung liegt 4 cm unter der Gleichgewichtslage. Die Gleichgewichtslage wird zum Schwingungsmittelpunkt.
$\Rightarrow$ Schwingungsamplitude $s_0 = 4$ cm

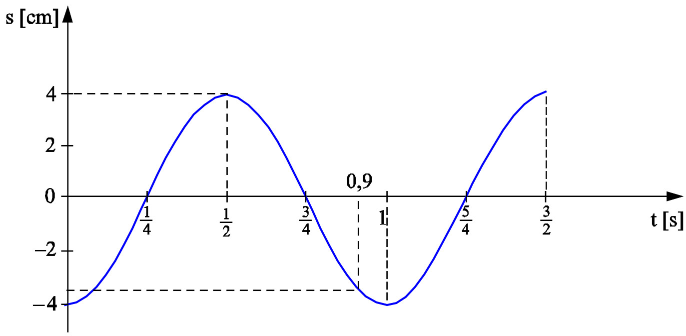


Abb. 96

b) $s_0 = 4$ cm; $t = 0{,}9$ s

$\omega \overset{(6.2)}{=} \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1\,s} = 2\pi\, s^{-1}$

$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$, da die Kugel zum Zeitpunkt $t = 0$ im tiefsten Schwingungspunkt ist (vgl. S. 53 f.).

Es gilt: $s \overset{(6.1)}{=} s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = 4\text{ cm} \cdot \sin\left(2\pi\, s^{-1} \cdot 0{,}9\, s + \frac{3\pi}{2}\right) =$

$= 4\text{ cm} \cdot \sin(3{,}3\pi) \approx \underline{\underline{-3{,}236\text{ cm}}}$ (vgl. t-s-Diagramm)

Die Kugel befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0{,}9$ s ca. 3,2 cm unter (Minuszeichen!) dem Schwingungsmittelpunkt.

Es gilt: $v \overset{(6.3)}{=} \omega\, s_0 \cos(\omega t + \varphi_0) =$

$= 2\pi\, s^{-1} \cdot 4\text{ cm} \cdot \cos\left(2\pi\, s^{-1} \cdot 0{,}9\, s + \frac{3\pi}{2}\right) =$

$= 8\pi \frac{\text{cm}}{s} \cdot \cos(3{,}3\pi) \approx \underline{\underline{-14{,}77 \frac{\text{cm}}{s}}}$

Die Kugel bewegt sich zum Zeitpunkt $t = 0{,}9$ s mit der Geschwindigkeit $14{,}77 \frac{\text{cm}}{s}$ nach unten (Minuszeichen!).

Es gilt: $a \overset{(6.4)}{=} -\omega^2\, s_0 \sin(\omega t + \varphi_0) =$

$= -(2\pi\, s^{-1})^2 \cdot 4\text{ cm} \cdot \sin\left(2\pi\, s^{-1} \cdot 0{,}9\, s + \frac{3\pi}{2}\right) =$

$= 16\pi^2 \frac{\text{cm}}{s^2} \cdot \sin(3{,}3\pi) \approx \underline{\underline{127{,}8 \frac{\text{cm}}{s^2}}} = \underline{\underline{1{,}278 \frac{m}{s^2}}}$

Die Kugel beschleunigt zum Zeitpunkt $t = 0{,}9$ s mit $1{,}278 \frac{m}{s^2}$ nach oben (positives Vorzeichen!), d. h. die Bewegung nach unten wird gebremst!

c) $v_0 \overset{(6.3)}{=} \omega\, s_0 = 2\pi\, s^{-1} \cdot 4\ \text{cm} = \underline{\underline{8\pi\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}} \approx \underline{\underline{25{,}1\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}}}$

Der Geschwindigkeitsbetrag ist jeweils im Schwingungsmittelpunkt maximal, d. h. bei der Elongation $\underline{\underline{s = 0}}$.

Zeitpunkte: $t_1 = \frac{1}{4}\text{s};\ t_2 = \frac{3}{4}\text{s};\ t_3 = \frac{5}{4}\text{s};\ t_4 = \frac{7}{4}\text{s}$ usw. (vgl. t-s-Diagramm)

d) $a_0 \overset{(6.4)}{=} \omega^2\, s_0 = (2\pi\, s^{-1})^2 \cdot 4\ \text{cm} = \underline{\underline{16\pi^2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}} \approx \underline{\underline{157{,}9\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}}} \approx \underline{\underline{1{,}58\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$

$$F_0 \overset{(2.2)}{=} m \cdot a_0 = 0{,}1\ \text{kg} \cdot 16\pi^2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 0{,}1\ \text{kg} \cdot 0{,}16\pi^2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} =$$

$$= 0{,}0167\pi^2\ \text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \overset{(2.3)}{\approx} \underline{\underline{0{,}158\ \text{N}}}$$

Die Beträge von Beschleunigung a und Beschleunigungskraft F sind jeweils in den Umkehrpunkten der Schwingung maximal, d. h. bei den Elongationen $s = \pm\, s_0 = \pm\, 4\,\text{cm}$.

Zeitpunkte: $t_1 = 0\ \text{s};\ t_2 = \frac{1}{2}\text{s};\ t_3 = 1\ \text{s};\ t_4 = \frac{3}{2}\text{s}$ usw. (vgl. t-s-Diagramm)

e) Es gilt: $F \overset{(6.6)}{=} -D \cdot s \quad\Rightarrow\quad s = -\frac{F}{D}$

mit $D \overset{(6.6)}{=} m\,\omega^2 = 0{,}1\ \text{kg} \cdot (2\pi\, s^{-1})^2 = 0{,}4\pi^2 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$

und $F = -0{,}1$ N (nach unten, deshalb mit Minuszeichen!)

$$\Rightarrow\quad s = -\frac{-0{,}1\ \text{N}}{0{,}4\pi^2\,\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}} \overset{(2.3)}{=} \frac{0{,}1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\cdot \text{s}^2}{0{,}4\pi^2\ \text{kg}} = \frac{1}{4\pi^2}\,\text{m} \approx \underline{\underline{0{,}0253\ \text{m}}}$$

Etwa 2,53 cm über (da Vorzeichen positiv) dem Schwingungsmittelpunkt wird die Kugel mit der Kraft 0,1 N nach unten beschleunigt.

f)

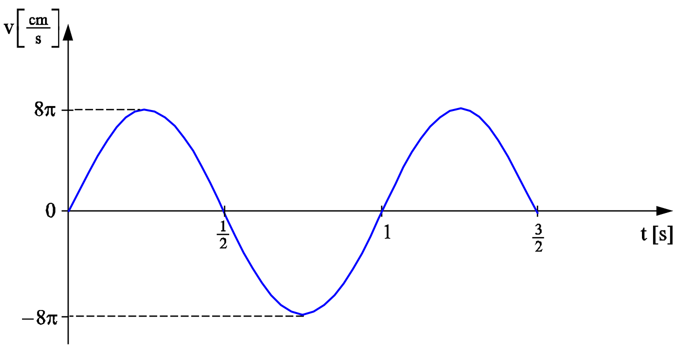


Abb. 97

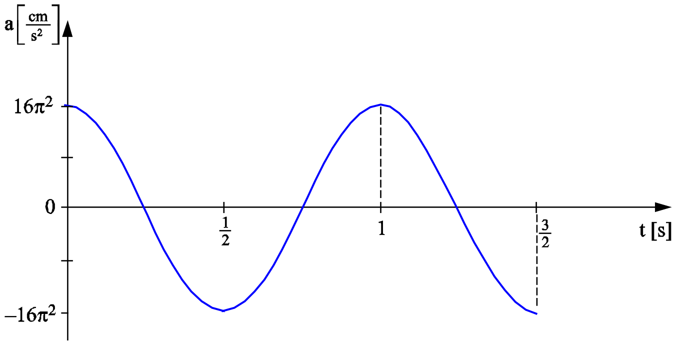


Abb. 98

g) Es gilt: $F \overset{(6.6)}{=} -D\,s$ und: $F \overset{(2.2)}{=} m \cdot a$ $\Bigg\} \Rightarrow \; m \cdot a = -D\,s \;\Rightarrow\; a = -\frac{D\,s}{m}$

$$a = -\frac{D\,s}{m} \overset{(6.6)}{=} -\frac{m\,\omega^2 \cdot s}{m} = -\omega^2 \cdot s = -(2\pi\,s^{-1})^2 \cdot 1\,cm =$$
$$= -4\pi^2\,\frac{cm}{s^2} \approx \underline{\underline{-39{,}5\,\frac{cm}{s^2}}}$$

1 cm über dem Schwingungsmittelpunkt wird die Kugel mit $39{,}5\,\frac{cm}{s^2}$ nach unten beschleunigt.

39. a) Die Dehnungskraft F ist das Gewicht der Kugel: $F = G \overset{(2.4)}{=} m \cdot g$

Für die Dehnungsstrecke s gilt: $s = 94{,}8\ cm - 70\ cm = 24{,}8\ cm$

$$\Rightarrow D \overset{(3.5)}{=} \frac{F}{s} = \frac{m \cdot g}{24{,}8\,cm} = \frac{0{,}2\,kg \cdot 9{,}81\frac{N}{kg}}{0{,}248\,m} \approx \underline{\underline{7{,}9\,\frac{N}{m}}}$$

b) $$T \overset{(6.7)}{=} 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2\,kg}{7{,}9\,\frac{N}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2\,kg\,m}{7{,}9\,N}} =$$

$$\overset{(2.3)}{=} 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2\,kg\,m}{7{,}9\,\frac{kg\,m}{s^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{7{,}9}}\,s \approx \underline{\underline{1\,s}}$$

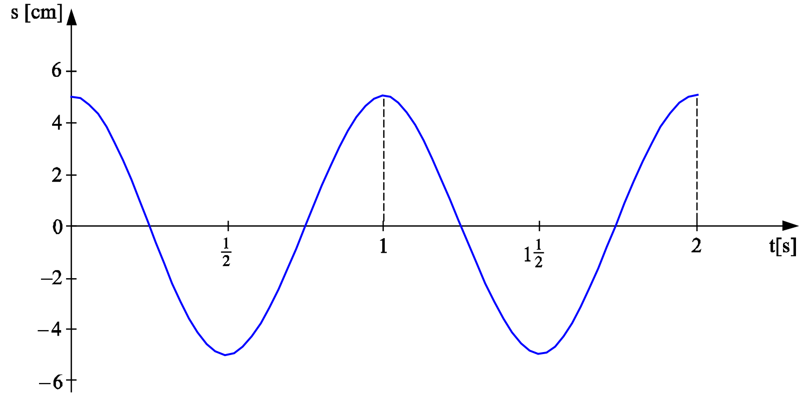
c) 

Abb. 99

d) Es gilt: $s \overset{(6.1)}{=} s_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

mit $s_0 = 5\text{ cm}$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1\text{ s}} = 2\pi\text{ s}^{-1}$

und $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, da die Kugel zum Zeitpunkt $t=0$ im höchsten Schwingungspunkt ist (vgl. S. 53 f.).

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{s = 5\text{ cm} \cdot \sin\left(2\pi\text{ s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)}}$

mit $t = 0{,}9$ s: $\quad s = 5\text{ cm} \sin\left(2\pi\text{ s}^{-1} \cdot 0{,}9\text{ s} + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= 5\text{ cm} \sin(2{,}3\pi) \approx \underline{\underline{4\text{ cm}}}$

$F \overset{(6.6)}{=} -D \cdot s = -7{,}9\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 4\text{ cm} = -7{,}9\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0{,}04\text{ m} \approx \underline{\underline{-0{,}32\text{ N}}}$

Der Pendelkörper befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0{,}9$ s etwa 4 cm über der Gleichgewichtslage und wird mit 0,32 N nach unten beschleunigt.

e) Die kinetische Energie ist maximal, wenn der Pendelkörper durch die Gleichgewichtslage schwingt, d. h. bei der Elongation $\underline{\underline{s = 0\text{ cm}}}$.

Zeitpunkt: $\underline{\underline{t = \frac{1}{4}\text{s}}}$ (vgl. t-s-Diagramm)

max. kin. Energie $\overset{(6.10)}{=} \frac{1}{2} m\, v_0^{\,2} \overset{(6.10)}{=} \frac{1}{2} D\, s_0^{\,2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 7{,}9\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (5\text{ cm})^2 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}9\frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}05\text{ m})^2$

$= \underline{\underline{9{,}875 \cdot 10^{-3}\text{ J}}}$

f) Es gilt: $E_{kin} + E_{pot} \overset{(6.10)}{=} \frac{1}{2} D\, s_0{}^2$

mit (6.8) und (6.9): $\quad \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{2} D\, s^2 = \frac{1}{2} D\, s_0{}^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} D\, s_0{}^2 - \frac{1}{2} D\, s^2 \qquad |\cdot 2$$

$$m\, v^2 = D\, s_0{}^2 - D\, s^2$$

$$m\, v^2 = D(s_0{}^2 - s^2)$$

$$v^2 = \frac{D\,(s_0{}^2 - s^2)}{m}$$

$$v^2 = \frac{7{,}9\frac{N}{m}[(5\text{ cm})^2 - (2\text{ cm})^2]}{200\text{ g}} = \frac{7{,}9\frac{N}{m}[(0{,}05\text{ m})^2 - (0{,}02\text{ m})^2]}{0{,}2\text{ kg}} =$$

$$= 0{,}08295\frac{\text{Nm}}{\text{kg}} \overset{(2.3)}{=} 0{,}08295\frac{\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\cdot\text{m}}{\text{kg}} = 0{,}08295\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{0{,}08295\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \underline{\underline{0{,}288\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

40. a) $T \overset{(6.7)}{=} 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}04\text{ kg}}{1\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}}} = \underline{\underline{0{,}4\pi\text{ s}}} \approx \underline{\underline{1{,}26\text{ s}}}$

b) Der Geschwindigkeitsbetrag ist am größten, wenn der Pendelkörper durch die Gleichgewichtslage schwingt.

$\Rightarrow$ max. Geschwindigkeitsbetrag $\quad v_0 = 0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$\Rightarrow$ max. kinetische Energie $\quad = \frac{1}{2} m\, v_0{}^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}04\text{ kg}\cdot\left(0{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 =$

$$= 0{,}005\text{ kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \underline{\underline{0{,}005\text{ J}}}$$

Die maximale potenzielle Energie ist gleich der maximalen kinetischen Energie.

$\Rightarrow$ max. potenzielle Energie $= \underline{\underline{0{,}005\text{ J}}}$

c) Es gilt: max. potenzielle Energie $= \frac{1}{2} D s_0{}^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} D\, s_0{}^2 = 0{,}005\text{ J}$$

$$\Rightarrow \quad s_0{}^2 = \frac{2\cdot 0{,}005\text{ J}}{D} = \frac{0{,}01\text{ J}}{1\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}}$$

$$\Rightarrow s_0{}^2 = \frac{0{,}01\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}}{1\frac{\text{kg}}{\text{s}^2}} = 0{,}01\text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \quad s_0 = \sqrt{0{,}01\text{ m}^2} = \underline{\underline{0{,}1\text{ m}}} = \underline{\underline{10\text{ cm}}}$$