GYMNASIUM

STARK in KLAUSUREN

Eigenschaften von Funktionen

Sybille Reimann

STARK

GYMNASIUM

STARK in KLAUSUREN

Eigenschaften von Funktionen

Sybille Reimann

STARK

Inhaltsverzeichnis

Fortsetzung nächste Seite

Auf einen Blick!

Inhaltsverzeichnis

Autorin: Sybille Reimann

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

das Arbeiten mit Funktionen gehört zum mathematischen Teilgebiet **Analysis** und nimmt im **Abitur** einen großen Raum ein. Funktionen sind so wichtig, weil sich viele Abläufe des täglichen Lebens mit ihnen modellieren lassen. Egal ob Telefonkosten oder Zugfahrpläne, Börsendaten oder Flugbahnen, der Zerfall von radioaktiven Stoffen oder das Wachstum von Bakterienkulturen, all dies und vieles mehr lässt sich mithilfe von Funktionen simulieren – vorausgesetzt, man hat die richtige Funktion gewählt. Durch Betrachtung des zugehörigen Graphen und dessen Eigenschaften werden diese Vorgänge dann „übersichtlich" und vorhersehbar.

Dieses Buch hilft Ihnen, Ihr Wissen und Ihre Fertigkeiten im Umgang mit Funktionen zu **vertiefen** und zu **testen**.

- Anschauliche **Schritt-für-Schritt-Erklärungen** und konkrete **Rechenbeispiele** vermitteln die Lerninhalte so, dass Sie sie verstehen und anwenden können.
- Zahlreiche **Aufgaben** helfen Ihnen dabei, den neu gelernten Stoff zu festigen.
- **Klausuren** zur Selbstüberprüfung geben Ihnen einen Überblick über Ihren aktuellen Leistungsstand und die Möglichkeit zur Kontrolle Ihres Lernerfolgs.
- Ausführliche **Lösungsvorschläge** sorgen dafür, dass Sie Ihre Lösungsansätze und Rechenwege selbstständig überprüfen und verbessern können.

So können Sie **stark in** Ihre nächsten **Klausuren** gehen!

Viel Spaß bei der Vorbereitung und viel Erfolg in der Klausur wünscht Ihnen

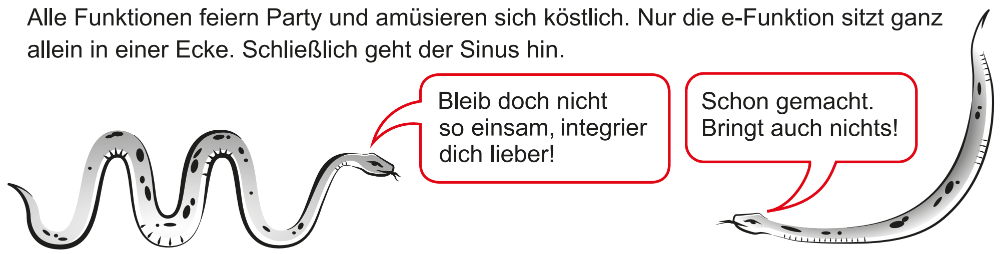
Sybille Reimann

Sybille Reimann

e-Funktion

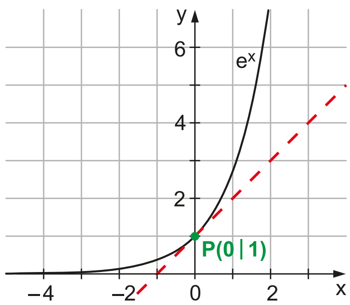
1 Grundfunktion

Alle Funktionen feiern Party und amüsieren sich köstlich. Nur die e-Funktion sitzt ganz allein in einer Ecke. Schließlich geht der Sinus hin.



Der Witz nutzt die Eigenschaft, dass einzig für $\mathbf{f(x)=e^x}$ gilt: $\mathbf{f(x)=f'(x)=F(x)}$

$f(x)=e^x$ zeichnet sich unter allen Exponentialfunktionen auch noch durch die Steigung im Punkt $(0|1)$ aus. Zwar verlaufen alle Exponentialfunktionen der Form $g(x)=a^x$ mit $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ durch den Punkt $(0|1)$, aber nur $f(x)=e^x$ hat dort die Steigung 1.



WISSEN

- Funktion: $f(x) = e^x$
- Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Verhalten an den Rändern: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- Asymptoten: negative x-Achse $(y=0)$
- Wertebereich: $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
- Symmetrie zum KOSY: keine
- Nullstellen: keine, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$
- Ableitung: $f'(x) = e^x$
- Monotonie: streng monoton steigend
- Stammfunktion: $F(x) = e^x + C$
- Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \ln x$ mit $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Vertiefe dein Wissen!

Besonderheiten:

- **e** = 2,718… **Euler'sche Zahl**
- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(0) = 1$
- Das Lösen von Gleichungen mit e^x ermöglicht die Umkehrfunktion $\ln x$. Es gilt:
  $e^x = a \quad \Rightarrow \quad \ln e^x = \ln a \quad \Rightarrow \quad x \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = \ln a \quad \Rightarrow \quad x = \ln a$

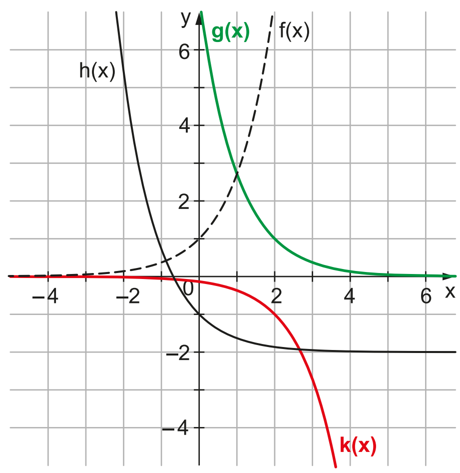
Für die Exponentialfunktion gelten die Rechenregeln für Potenzen:

WISSEN

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{x \cdot y} = (e^x)^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $\quad (x, y \in \mathbb{R})$

BEISPIEL

1 Die Abbildung zeigt die Graphen der drei Funktionen g(x), h(x) und k(x), die durch Spiegeln und Verschieben aus dem Graphen von $f(x) = e^x$ hervorgehen. Geben Sie die Funktionsgleichungen von g(x), h(x) und k(x) begründet an.



g(x) = ____________________

h(x) = ____________________

k(x) = ____________________

Lösung:

Der Graph von g(x) entsteht aus dem Graphen von f(x) durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 2 in positive x-Richtung.
$g(x) = e^{-(x-2)}$

Der Graph von h(x) entsteht aus dem Graphen von f(x) durch Spiegelung an der y-Achse und Verschiebung um 2 in negative y-Richtung.
$h(x) = e^{-x} - 2$

Der Graph von k(x) entsteht aus dem Graphen von f(x) durch Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um 2 in positive x-Richtung.
$k(x) = -e^{x-2}$

Vertiefe dein Wissen!

2 **a** Warum lässt sich $f(x)=e^x$ nicht als Integralfunktion schreiben?

b Schreiben Sie $g(x)=e^x-e^2$ als Integralfunktion.

Lösung:

a Da $f(x)=e^x$ keine Nullstelle besitzt, lässt sich für eine Darstellung als Integralfunktion keine untere Grenze a finden.

$$e^x = \int_a^x (e^t)'\,dt = \int_a^x e^t\,dt = e^x - e^a \;\lightning \qquad \text{wegen } e^a \neq 0$$

b $$e^x - e^2 = \int_a^x (e^t - e^2)'\,dt = \int_a^x e^t\,dt = e^x - e^a \quad \Rightarrow \quad a=2$$

Also: $$e^x - e^2 = \int_2^x e^t\,dt$$

3 Kathrin hat die Gleichungen ihren Lösungen zugeordnet. Überprüfen Sie Ihre Entscheidung rechnerisch.

$e^{x+2}=2$	$2-e^{-x}=-2$	$2e^{x^2-2}=2$
$x=-\ln 4$	$x=\ln 2-2$	$x=\pm\sqrt{2}$

Lösung:

$e^{x+2}=2 \quad \Rightarrow \quad x+2=\ln 2 \quad \Rightarrow \quad x=\ln 2-2$

$2-e^{-x}=-2 \quad \Rightarrow \quad e^{-x}=4 \quad \Rightarrow \quad -x=\ln 4 \quad \Rightarrow \quad x=-\ln 4$

$2e^{x^2-2}=2 \quad \Rightarrow \quad e^{x^2-2}=1 \quad \Rightarrow \quad x^2-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}$

44 Lösen Sie die Exponentialgleichungen.

a $e^{3x}=4e^{-x}$

b $\frac{1}{2e^x}-\frac{1}{3e^x}=\frac{1}{6}$

45 Tina hat die Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ um 4 nach oben und um 2 nach links verschoben. Zudem hat sie sie an der y-Achse gespiegelt. Geben Sie den Term der entstandenen Funktion g(x) an.

$g(x)=$ ______________________

e-Funktion

44 **a**

$$
\begin{aligned}
e^{3x} &= 4e^{-x} && \mid \cdot e^{x} \\
e^{4x} &= 4 && \mid \ln \\
4x &= \ln 4 && \mid :4 \\
x &= \frac{1}{4}\ln 4
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2e^{x}} - \frac{1}{3e^{x}} &= \frac{1}{6} && \mid \cdot 6e^{x} \\
3 - 2 &= e^{x} \\
1 &= e^{x} \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

45

$$g(x) = e^{-x+2} + 4$$

Verschiebung um 4 nach oben

Spiegelung an y-Achse

Verschiebung um 2 nach links

46 Für die Bestimmung des Definitionsbereichs wird der Nenner bzw. der Term unter der Wurzel betrachtet. Für die Bestimmung der Nullstelle(n) muss nur der Zähler bzw. der Term unter der Wurzel gleich 0 gesetzt werden.

$f(x) = \frac{x^2-1}{e^x+1}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$x = 0$
$g(x) = \frac{e^x-1}{x^2-1}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$	$x = -2$ und $x = 2$
$h(x) = \sqrt{e^x - 1}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^-$	$x = -1$ und $x = 1$
$i(x) = \sqrt{e^{1-x}}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$	$x = -1$
$j(x) = e^{\sqrt{x-1}}$	$\mathbb{D} = [1; +\infty[$	keine Nullstellen

47 **a**

14 FS

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot \overset{(e^x-2)}{\cancel{e^x}} - e^x \cdot \overset{e^x}{\cancel{(e^x-2)}}}{(e^x-2)^2}$$