MEHR ERFAHREN

TRAINING

Haupt-/Mittelschule

Mathematik 10. Klasse

STARK

MEHR ERFAHREN

TRAINING

Haupt-/Mittelschule

Mathematik 10. Klasse

STARK

Inhaltsverzeichnis

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Autor: Walter Schmid

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Trainingsbuch hilft dir, den gesamten **Mathematikstoff der 10. Klasse** selbstständig zu wiederholen. Du kannst dich mit diesem Buch besonders gut auf bevorstehende **Klassenarbeiten** sowie auf die **Abschlussprüfung für den mittleren Schulabschluss** vorbereiten.

- Der Unterrichtsstoff ist **klar strukturiert** und **verständlich dargestellt**. Am Anfang eines jeden Kapitels sind die **grundlegenden Inhalte** in einem **Merkkasten** zusammengefasst. Anhand von **ausführlichen Beispielen** wird der Stoff veranschaulicht und mithilfe nützlicher Hinweise erklärt.
- **Zahlreiche Übungsaufgaben** bieten dir die Möglichkeit, die unterschiedlichen Stoffgebiete einzuüben. Hier kannst du überprüfen, ob du die gelernten Inhalte auch anwenden kannst. Wenn du bei einigen Aufgaben unsicher bist, solltest du den jeweiligen Merkkasten und die dazugehörigen Beispiele noch einmal nacharbeiten. Kniffligere Aufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Lass dich nicht entmutigen, wenn du diese Übungen nicht auf Anhieb schaffst.
- Zu allen Aufgaben findest du am Ende des Buches **leicht nachvollziehbare** und **ausführliche Lösungen**. Versuche aber, jede Aufgabe zunächst selbstständig zu lösen. Schlage erst in der Lösung nach, wenn du allein nicht weiterkommst. Vergleiche zum Schluss deine Lösungen aber in jedem Fall mit denen im Buch und suche gegebenenfalls nach Rechenfehlern oder Verbesserungsmöglichkeiten deines Ansatzes.

Wenn du regelmäßig mit diesem Buch arbeitest, wirst du sicher bald feststellen, wie dir das Lösen der Aufgaben immer leichter fällt. Denn wie überall gilt auch in der Mathematik: „Übung macht den Meister!“

Ich wünsche dir bei der Arbeit mit dem Buch viel Erfolg und Freude!

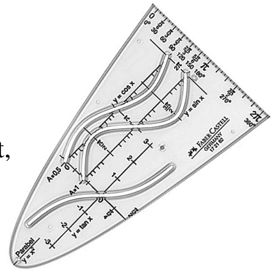
Walter Schmid

Walter Schmid

Quadratische Funktionen

Sogenannte Bogenbrücken, die oft die Form einer **Parabel** haben, gehören zu den ältesten Brückenarten der Welt. Im folgenden Kapitel lernst du, wie man eine derartige Form mit einer Funktionsgleichung beschreiben kann.

1 Normalparabel



Eine Funktion, bei der die Variable x quadratisch vorkommt, heißt **quadratische Funktion**. Als Graph erhält man eine **Parabel**. Mit deiner Parabelschablone kannst du leicht eine sogenannte Normalparabel zeichnen.

> Der Graph mit der Funktionsgleichung $\mathbf{y = x^2}$ bzw. $\mathbf{f(x) = x^2}$ heißt **Normalparabel**.
> Die Normalparabel hat ihren **Scheitelpunkt** bei S(0 | 0), ist **nach oben geöffnet** und **symmetrisch zur y-Achse**.

Beispiel

Erstelle eine Wertetabelle für $y = x^2$ und zeichne den Graphen.

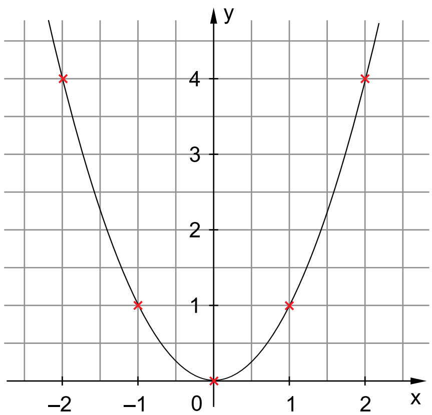
Lösung:

▶ **Wertetabelle:**

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Setze in die Gleichung $y = x^2$ verschiedene **Werte für x** ein.

▶ **Schaubild/Graph:**



Zeichne die Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie zu einer **Parabel**. Achte darauf, dass die Linie gleichmäßig und **ohne „Ecken“** verläuft.

Du kannst auch deine **Schablone** verwenden.

160 Welche Punkte liegen auf der Normalparabel $y = x^2$? Kreuze an.

☐ A(1 | 1) ☐ B(–1,6 | 2,56)
☐ C(15 | 22,5) ☐ D(–0,5 | –0,25)

161 Ergänze die fehlenden x- bzw. y-Werte, wenn gilt $y = x^2$.

a) A(9 |) b) B(| 20,25)
c) C(| 2,89) d) D(0,5 |)

Funktionen der Form $\mathbf{y = ax^2}$ haben als Graphen ebenfalls eine Parabel mit Scheitelpunkt S(0 | 0). Es gilt:

- **a > 1:** Die Parabel ist **gestreckt**, d. h., sie ist „**schmaler**" als die Normalparabel.
- **a = 1:** Normalparabel
- **0 < a < 1:** Die Parabel ist **gestaucht**, d. h., sie ist „**breiter**" als die Normalparabel.

Ist **a negativ**, dann ist die Parabel an der x-Achse gespiegelt, also **nach unten geöffnet**.

Beispiel

Erstelle eine Wertetabelle für $y = 0{,}5x^2$ und zeichne die Parabel.

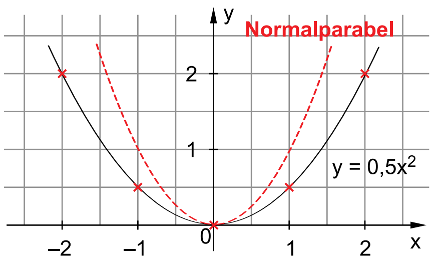
Lösung:

▶ **Wertetabelle:**

x	–2	–1	0	1	2
y	2	0,5	0	0,5	2

Setze in die Gleichung $y = 0{,}5x^2$ verschiedene **Werte für x** ein.

▶ **Schaubild/Graph:**



Zeichne die Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie zu einer **Parabel**.

Hier kannst du die Schablone **nicht** verwenden, da es sich um eine **gestauchte** Parabel handelt.

162 Kreuze an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
a) Die Parabel der Funktion $y = 5x^2$ ist gestreckt.	☐	☐
b) Die Parabel der Funktion $y = -0{,}2x^2$ ist gestreckt und nach unten geöffnet.	☐	☐
c) Die Parabel der Funktion $y = -x^2$ ist eine nach unten geöffnete Normalparabel.	☐	☐
d) Die Parabel der Funktion $y = 0{,}99x^2$ ist gestaucht.	☐	☐

163 Zeichne die Parabeln zu folgenden Funktionsgleichungen. Überlege dir zuerst, ob der Graph gestreckt, gestaucht, nach oben oder nach unten geöffnet ist.

a) $y = -0{,}5x^2$
b) $y = 2x^2$
c) $y = -3x^2$
d) $y = 0{,}25x^2$

2 Scheitelpunktform

Wird die Normalparabel entlang der y-Achse nach oben oder unten **verschoben** oder entlang der x-Achse nach rechts oder links, ändert sich auch immer die **Funktionsgleichung** der quadratischen Funktion.

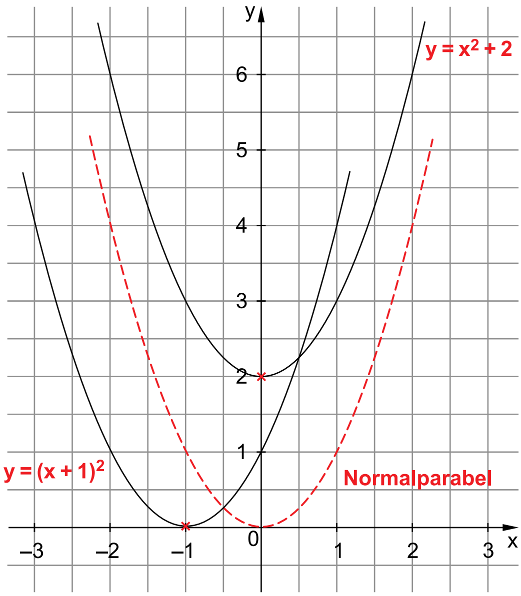
- Wird der Graph der Normalparabel um y_S Einheiten **nach oben** verschoben, lautet die Funktionsgleichung: $\mathbf{y = x^2 + y_S}$
  Der Scheitelpunkt des Graphen liegt dann bei $S(0\,|\,y_S)$.
- Wird der Graph der Normalparabel um x_S Einheiten **nach rechts** verschoben, lautet die Funktionsgleichung: $\mathbf{y = (x - x_S)^2}$
  Der Scheitelpunkt des Graphen liegt dann bei $S(x_S\,|\,0)$.
- Wird der Graph der Normalparabel um y_S Einheiten **nach oben** und um x_S Einheiten **nach rechts** verschoben, lautet die Funktionsgleichung:
  $\mathbf{y = (x - x_S)^2 + y_S}$
  Der Scheitelpunkt des Graphen liegt dann bei $S(x_S\,|\,y_S)$.

Man nennt diese Darstellung **Scheitelpunktform**, da man den Scheitelpunkt direkt aus der Funktionsgleichung ablesen kann.

Beispiele

1. Zeichne eine Normalparabel, die um zwei Einheiten nach oben verschoben wurde, und eine weitere Normalparabel, die um eine Einheit nach links verschoben wurde. Gib die Funktionsgleichungen an.

Lösung:



Eine um zwei Einheiten nach oben verschobene Normalparabel hat ihren **Scheitelpunkt** bei $S(0\,|\,2)$. Eine um eine Einheit nach links verschobene Parabel hat ihren Scheitel bei $S(-1\,|\,0)$.

Zeichne am besten mit einer **Parabelschablone**.

Achte darauf, dass eine Verschiebung **nach rechts** in der Scheitelpunktform mit $-\,x_S$ ausgedrückt wird, eine Verschiebung **nach links** mit $+\,x_S$.

2. Gib die Scheitelpunkte folgender Funktionen an:

a) $y = x^2 - 5$ b) $y = -(x - 2{,}5)^2$ c) $y = (x + 3)^2 + 1$

Lösung:

a) $S(0\,|\,-5)$ — Der Graph ist um fünf Einheiten **nach unten** verschoben.

b) $S(2{,}5\,|\,0)$ — Der Graph ist um 2,5 Einheiten **nach rechts** verschoben. Das **–** vor der Klammer bedeutet, dass die Parabel **nach unten geöffnet** ist.

c) $S(-3\,|\,1)$ — Der Graph ist um drei Einheiten **nach links** und um eine Einheit **nach oben** verschoben.

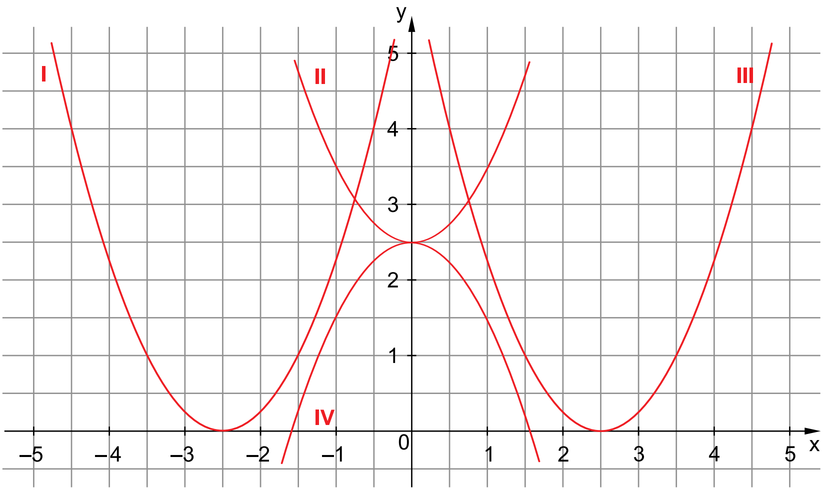
164 Gib die Scheitelpunkte der folgenden Funktionen an.

a) $y = x^2 + 2{,}5$ b) $y = x^2 - 3$

c) $y = (x - 9)^2$ d) $y = (x + 0{,}5)^2$

e) $y = (x + 8)^2 - 3{,}5$ f) $y = (x - 4{,}5)^2 + 9$

165 Welche Funktionsgleichung gehört zu welchem Graphen? Ordne richtig zu.



a) $y = x^2 + 2{,}5$ b) $y = -x^2 + 2{,}5$ c) $y = (x + 2{,}5)^2$ d) $y = (x - 2{,}5)^2$

166 Wie muss man die Normalparabel verschieben, um die Graphen der folgenden Funktionen zu erhalten? Zeichne die Parabeln auch in ein Koordinatensystem.

a) $y = x^2 + 7$ b) $y = x^2 - 2{,}5$

c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = -(x - 1)^2$

e) $y = (x - 3)^2 - 4$ f) $y = -(x + 2)^2 + 1$

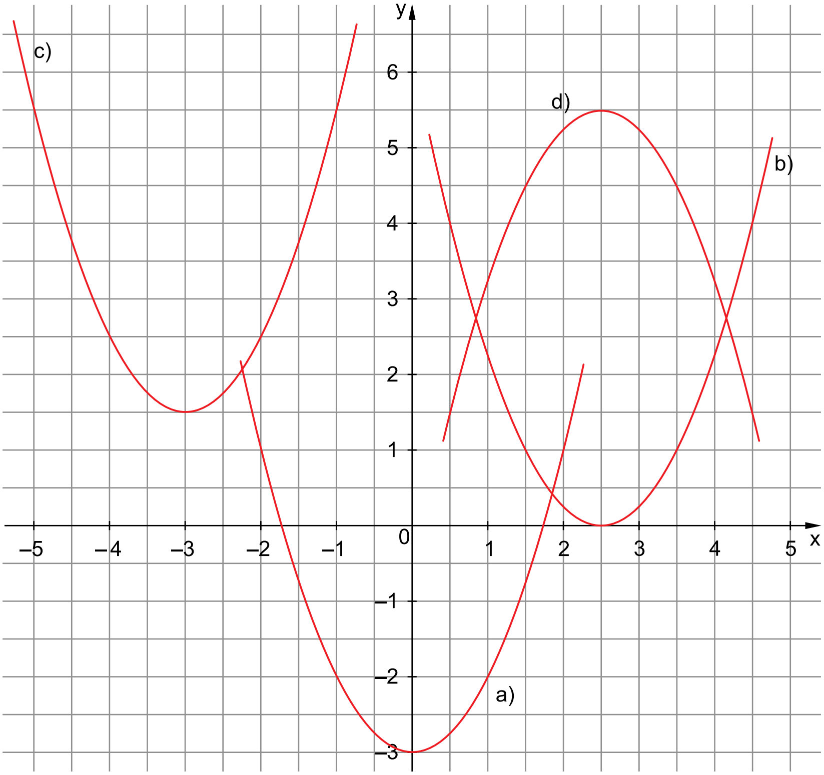
167 Stelle jeweils die Funktionsgleichung einer Normalparabel mit folgenden Scheitelpunkten auf.

a) S(0|3) b) S(0|–0,5)

c) S(–1|0) d) S(4|0)

e) S(3,5|–3,5) f) S(–2|–9)

168 Gib die Funktionsgleichungen zu den folgenden Graphen an.



169 Stelle die Funktionsgleichung einer Normalparabel auf, die …

a) nach oben geöffnet und um drei Einheiten nach links verschoben ist.

b) nach unten geöffnet und um 2,5 Einheiten nach oben verschoben ist.

c) nach unten geöffnet, um 1,5 Einheiten nach rechts und um zwei Einheiten nach unten verschoben ist.

d) nach oben geöffnet, um 0,5 Einheiten nach links und um vier Einheiten nach unten verschoben ist.

170 Die Parabel der Funktion $y = x^2 + 1$ wird …

a) zuerst an der y-Achse gespiegelt,

b) dann um zwei Einheiten nach unten verschoben,

c) im Anschluss um drei Einheiten nach links verschoben und

d) schließlich an der x-Achse gespiegelt.

Gib jeweils die neue Funktionsgleichung an.

171 Der Parameter a in der Funktionsgleichung $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ gibt an, ob die Parabel gestreckt oder gestaucht ist. Lege für folgende Funktionen jeweils eine Wertetabelle an und zeichne die Parabeln. Überlege dir davor, ob der Graph gestreckt, gestaucht, nach oben oder nach unten geöffnet ist.

a) $y = 0{,}5x^2 - 1$ b) $y = 2(x - 0{,}5)^2$

c) $y = 3(x - 1)^2 - 1$ d) $y = -0{,}25(x + 2)^2 + 0{,}5$

172 Gib an, ob die Punkte auf den Parabeln zu den Funktionsgleichungen liegen.

a) $A(3|0)$; $B(1|4)$; $C(-2|24)$ $y = x^2 - 6x + 9$

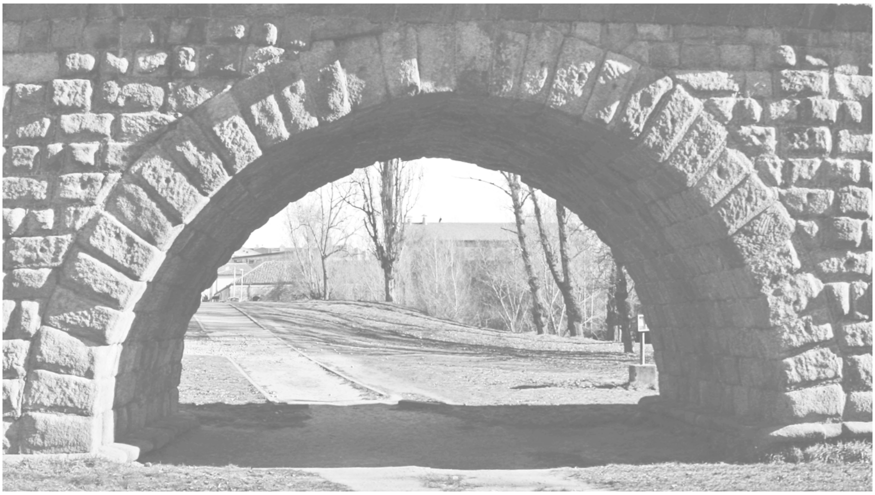
b) $X(4|7)$; $Y(0|8)$; $Z(1|-2)$ $y = 2x^2 + 4x - 8$

c) $P(-1|3)$; $Q(7|15)$; $R(1{,}5|-0{,}125)$ $y = 0{,}5x^2 - 1{,}5x + 1$

* **173** Die Bogenbrücke hat annähernd die Form einer Parabel. Zeichne in die Abbildung ein Achsenkreuz (Einheit = 1 cm) so ein, dass der Scheitelpunkt bei $(0|0)$ liegt, und bestimme die Funktionsgleichung der Parabel möglichst genau.

Tipp

Setze einen Punkt, der auf dem Brückenbogen liegt, in die allgemeine Funktionsgleichung ein.



$$\frac{2x+10}{x-3} = 2x \qquad |\cdot(x-3)$$
$$2x+10 = 2x\cdot(x-3)$$
$$2x+10 = 2x^2-6x \qquad |-2x-10$$
$$2x^2-8x-10=0 \qquad |:2$$
$$x^2-4x-5=0$$
$$x_{1/2} = 2\pm\sqrt{(-2)^2+5}$$
$$x_{1/2} = 2\pm 3$$
$$x_1 = 5$$
$$x_2 = -1$$
$$\mathbb{L} = \{-1;\ 5\}$$

d) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$x-2 = \frac{3}{x} \qquad |\cdot x$$
$$x^2-2x = 3 \qquad |-3$$
$$x^2-2x-3=0$$
$$x_{1/2} = 1\pm\sqrt{1+3}$$
$$x_{1/2} = 1\pm 2$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -1$$
$$\mathbb{L} = \{-1;\ 3\}$$

160

- [x] A(1 | 1) — $1^2 = 1$
- [x] B(–1,6 | 2,56) — $(-1{,}6)^2 = 2{,}56$
- [ ] C(15 | 22,5) — $15^2 \neq 22{,}5$
- [ ] D(–0,5 | –0,25) — $(-0{,}5)^2 \neq -0{,}25$

161

Setze die x- bzw. y-Werte in $y = x^2$ ein.

a) $y = 9^2 = 81$

A(9 | **81**)

b) $20{,}25 = x^2$

$$x_{1/2} = \sqrt{20{,}25}$$
$$x_{1/2} = \pm 4{,}5$$

B_1(**4,5** | 20,25); B_2(**–4,5** | 20,25)

c) $2{,}89 = x^2$

$x_{1/2} = \sqrt{2{,}89}$

$x_{1/2} = \pm 1{,}7$

$C_1(\mathbf{1{,}7} \mid 2{,}89)$; $C_2(\mathbf{-1{,}7} \mid 2{,}89)$

d) $y = 0{,}5^2 = 0{,}25$

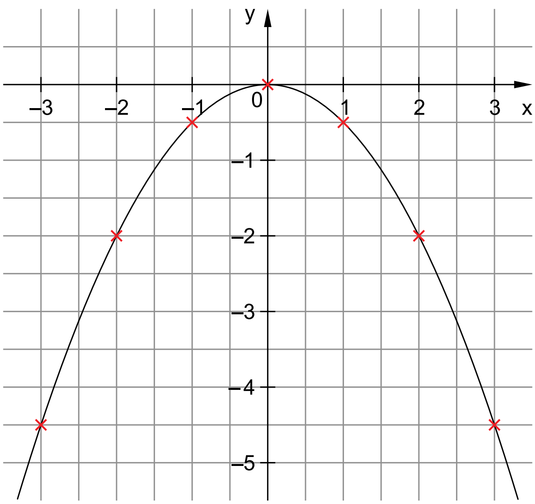
$D(0{,}5 \mid \mathbf{0{,}25})$

		wahr	falsch	
162	a) Die Parabel der Funktion $y = 5x^2$ ist gestreckt.	☒	☐	
	b) Die Parabel der Funktion $y = -0{,}2x^2$ ist gestreckt und nach unten geöffnet.	☐	☒	gestaucht
	c) Die Parabel der Funktion $y = -x^2$ ist eine nach unten geöffnete Normalparabel.	☒	☐	
	d) Die Parabel der Funktion $y = 0{,}99x^2$ ist gestaucht.	☒	☐	

163 a) $y = -0{,}5x^2$

nach unten geöffnet, gestaucht

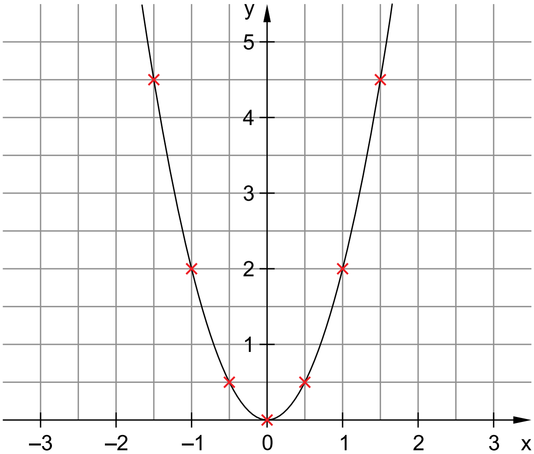
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–4,5	–2	–0,5	0	–0,5	–2	–4,5



b) $y = 2x^2$

nach oben geöffnet, gestreckt

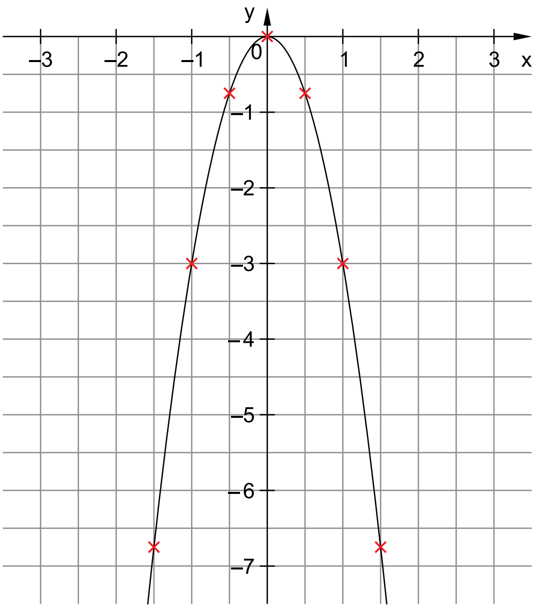
x	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5



c) $y = -3x^2$

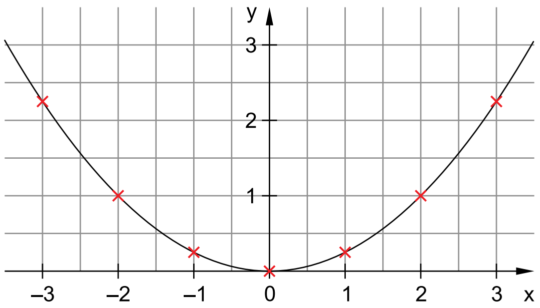
nach unten geöffnet, gestreckt

x	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5
y	–6,75	–3	–0,75	0	–0,75	–3	–6,75



d) $y = 0{,}25x^2$
nach oben geöffnet, gestaucht

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25



164 a) S(0|2,5)

b) S(0|–3)

c) S(9|0)

d) S(–0,5|0)

e) S(–8|–3,5)

f) S(4,5|9)

165 a) zu II — nach oben verschoben, **nach oben** geöffnet

b) zu IV — nach oben verschoben, **nach unten** geöffnet

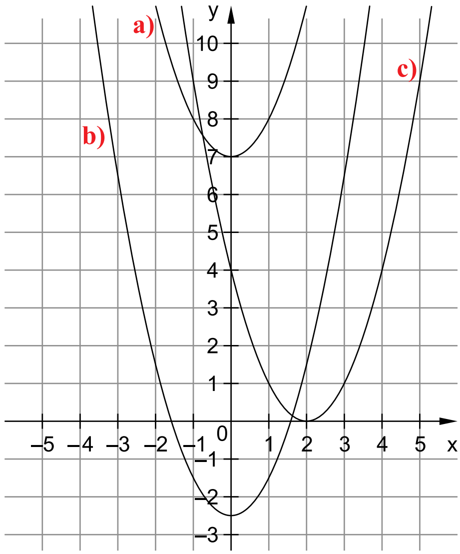
c) zu I — **nach links** verschoben

d) zu III — **nach rechts** verschoben

166 a) $y = x^2 + 7$
Die Normalparabel wird um sieben Einheiten **nach oben** verschoben.

b) $y = x^2 - 2{,}5$
Die Normalparabel wird um 2,5 Einheiten **nach unten** verschoben.

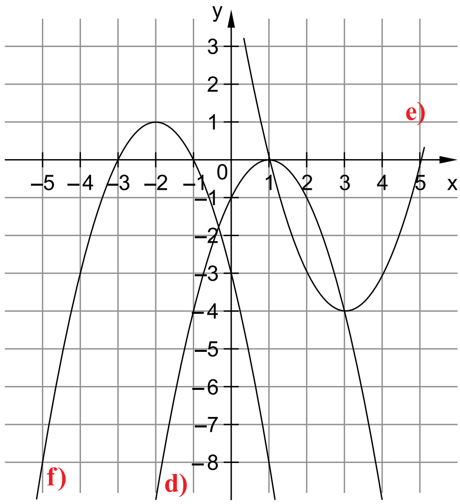
c) $y = (x-2)^2$
Die Normalparabel wird um zwei Einheiten **nach rechts** verschoben.



d) $y = -(x-1)^2$
Die Normalparabel wird um eine Einheit **nach rechts** verschoben. Sie ist nach unten geöffnet.

e) $y = (x-3)^2 - 4$
Die Normalparabel wird um drei Einheiten **nach rechts** und vier Einheiten **nach unten** verschoben.

f) $y = -(x+2)^2 + 1$
Die Normalparabel wird um zwei Einheiten **nach links** und eine Einheit **nach oben** verschoben. Sie ist nach unten geöffnet.



167 a) $y = x^2 + 3$

b) $y = x^2 - 0{,}5$

c) $y = (x+1)^2$

d) $y = (x-4)^2$

e) $y = (x - 3{,}5)^2 - 3{,}5$

f) $y = (x + 2)^2 - 9$

168 a) $S(0\,|\,-3)$, nach oben geöffnet: $y = x^2 - 3$

b) $S(2{,}5\,|\,0)$, nach oben geöffnet: $y = (x - 2{,}5)^2$

c) $S(-3\,|\,1{,}5)$, nach oben geöffnet: $y = (x + 3)^2 + 1{,}5$

d) $S(2{,}5\,|\,5{,}5)$, nach unten geöffnet: $y = -(x - 2{,}5)^2 + 5{,}5$

169 a) $y = (x + 3)^2$

b) $y = -x^2 + 2{,}5$

c) $y = -(x - 1{,}5)^2 - 2$

d) $y = (x + 0{,}5)^2 - 4$

170 a) $y = x^2 + 1$

Überlege immer, wo der Scheitelpunkt liegt.

b) $y = x^2 - 1$

c) $y = (x + 3)^2 - 1$

d) $y = -(x + 3)^2 + 1$

$S(-3\,|\,1)$

171 a) $y = 0{,}5x^2 - 1$

Die Parabel ist gestaucht und nach oben geöffnet.

x	–2	–1	0	1	2
y	1	–0,5	–1	–0,5	1

b) $y = 2(x - 0{,}5)^2$

Die Parabel ist gestreckt und nach oben geöffnet.

x	–1	–0,5	0	0,5	1	2
y	4,5	2	0,5	0	0,5	4,5

c) $y = 3(x - 1)^2 - 1$

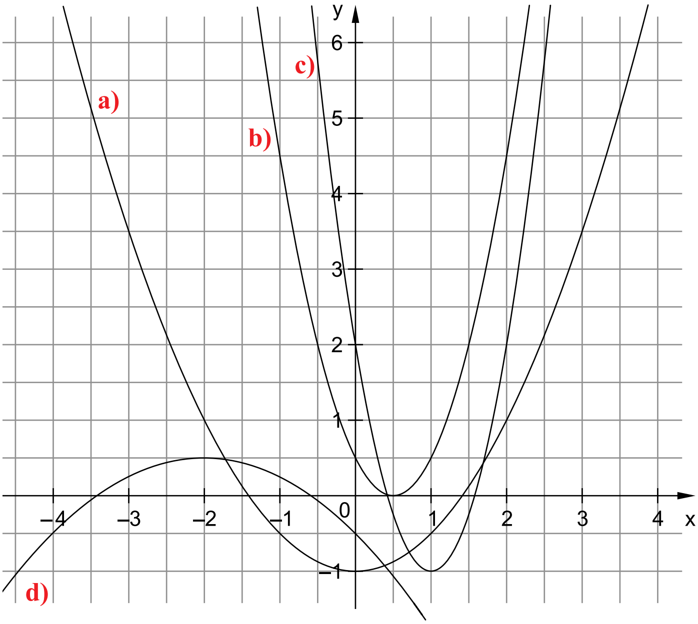
Die Parabel ist gestreckt und nach oben geöffnet.

x	–0,5	0	0,5	1	2
y	5,75	2	–0,25	–1	2

d) $y = -0{,}25(x+2)^2 + 0{,}5$

Die Parabel ist gestaucht und nach unten geöffnet.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2
y	–0,5	0,25	0,5	0,25	–0,5	–1,75	–3,5



172 a) $y = x^2 - 6x + 9$

A(3 | 0):	$9 - 18 + 9 = 0$	auf dem Graphen
B(1 | 4):	$1 - 6 + 9 = 4$	auf dem Graphen
C(–2 | 24):	$4 + 12 + 9 = 25 \neq 24$	**nicht** auf dem Graphen

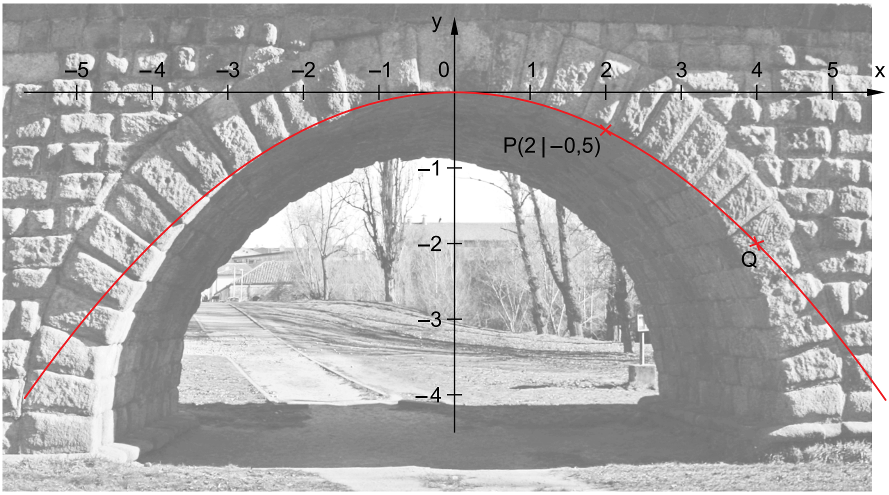
b) $y = 2x^2 + 4x - 8$

X(4 | 7):	$32 + 16 - 8 = 40 \neq 7$	**nicht** auf dem Graphen
Y(0 | 8):	$0 + 0 - 8 \neq 8$	**nicht** auf dem Graphen
Z(1 | –2):	$2 + 4 - 8 = -2$	auf dem Graphen

c) $y = 0{,}5x^2 - 1{,}5x + 1$

P(–1 | 3):	$0{,}5 + 1{,}5 + 1 = 3$	auf dem Graphen
Q(7 | 15):	$24{,}5 - 10{,}5 + 1 = 15$	auf dem Graphen
R(1,5 | –0,125):	$1{,}125 - 2{,}25 + 1 = -0{,}125$	auf dem Graphen

173



Die allgemeine Funktionsgleichung lautet:
$y = -ax^2$

P(2 | –0,5) liegt auf der Parabel. Daher gilt:

$-0,5 = -a \cdot 2^2$
$0,5 = 4a$
$a = 0,125$
$\Rightarrow \quad y = -0,125x^2$

174 a) $y = -x^2 - 4x - 2$

x	–4	–3	–2	–1	0
y	–2	1	2	1	–2

b) $y = x^2 - 4x + 2$

x	0	1	2	3	4
y	2	–1	–2	–1	2

© **STARK Verlag**
www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK

© STARK Verlag

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK