MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

FOS · BOS Technik

Analysis und Analytische Geometrie 2

STARK

Inhalt

Autor: Reinhard Schuberth

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Trainingsband ist für die 12. Jahrgangsstufe der Fachoberschule (FOS) in der Ausbildungsrichtung Technik konzipiert. Auch Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule (BOS) können damit lernen. Für die 11. Jahrgangsstufe steht Ihnen Band 1 dieser Reihe, „Analysis und Analytische Geometrie 1“ (Stark Verlag, Best.-Nr. 92414), zur Verfügung.

Die modulare Struktur der Kapitel erlaubt es Ihnen, an vielen Stellen mit dem Lesen zu beginnen, ohne den Kontext zu verlieren. Daher können Sie sich sofort mit genau den Themenbereichen beschäftigen, die Ihnen noch Probleme bereiten. Die folgenden Punkte helfen dabei, das Lernen mit diesem Buch zu erleichtern:

- In den grün umrandeten bzw. getönten Kästen finden Sie – präzise und schülergerecht formuliert – die wichtigen **Definitionen, Regeln und Merksätze,** die Sie sicher beherrschen müssen.
- Anhand passgenauer, kommentierter **Beispiele** lässt sich die Theorie unmittelbar nachvollziehen, verstehen und wiederholen.
- Die **Übungsaufgaben** eines jeden Abschnitts sind im Schwierigkeitsgrad steigend angeordnet und beinhalten auch anwendungsorientierte Aufgaben.
- Am Ende des Buches finden Sie zu jeder Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete, kleinschrittige **Lösung** zur Selbstkontrolle.

Bleibt mir nur noch, Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Trainingsband und in der Schule zu wünschen!

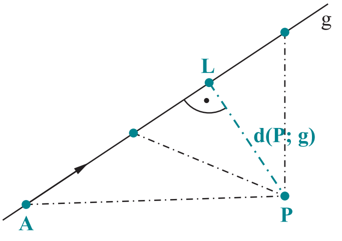
Ihr

Reinhard Schuberth

8 Abstandsberechnungen

In vielen Anwendungen benötigt man den Abstand zwischen zwei Objekten, beispielsweise den zwischen einem Flugzeug und einer Bergspitze. Im Folgenden werden Abstandsberechnungen zwischen geometrischen Objekten betrachtet.

8.1 Abstand Punkt – Gerade



Zunächst muss definiert werden, was man als Abstand zwischen zwei Objekten verstehen will. Wenn ein Asteroid längs einer geraden Flugbahn an der Erde vorbeifliegt, so interessiert man sich selbstverständlich für den kleinsten Abstand, den beide Himmelskörper haben werden. Betrachtet man die Flugbahn des Asteroiden als eine Gerade, so hat der Asteroid genau dort den geringsten Abstand von der Erde, wo die Verbindungsstrecke Erde – Asteroid einen rechten Winkel mit der Geraden der Flugbahn bildet (siehe Abbildung). Diesen Geradenpunkt, der den kleinsten Abstand aller Geradenpunkte vom Punkt P hat, bezeichnet man als den **Lotfußpunkt L** des Punktes P auf der Geraden g.
In diesem Zusammenhang nennt man die gerade Linie PL das **Lot** von P auf g.

Definition

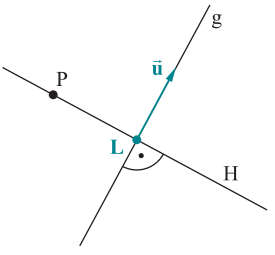
Abstand Punkt – Gerade
Der Abstand d(P; g) eines Punktes P von einer Geraden g wird definiert als die kürzeste Entfernung zwischen g und P. Diese ist gegeben durch den Abstand des Lotfußpunktes L vom Punkt P:
$d(P; g) = d(P; L) = |\overrightarrow{PL}|$
Dabei gilt stets $\overrightarrow{PL} \perp g$.

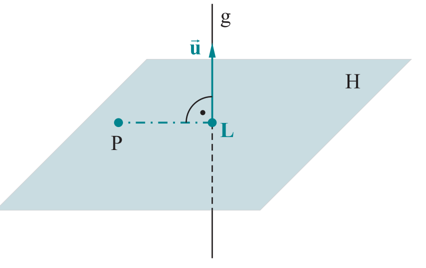
Das Lot und der Lotfußpunkt spielen bei Abstandsbestimmungen eine zentrale Rolle. Es wird nun der Lotfußpunkt eines Punktes P auf einer Geraden g bestimmt.

Gegeben sind eine Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und ein Punkt $P \notin g$. Um L zu bestimmen, wird eine Hilfsebene H aufgestellt, die P enthält und die senkrecht zu g steht:

$P \in H$ und $g \perp H$

Diese Ebene H nennt man die **Lotebene**. Aus der Abbildung (mit dem Schnittbild links) geht hervor, dass der Schnittpunkt von H und g der Lotfußpunkt L ist.





Regel

Koordinaten des Lotfußpunktes auf einer Geraden bestimmen

1. Lotebene H aufstellen, wobei P als Aufhängepunkt und $\vec{u}$, der Richtungsvektor von g, als Normalenvektor von H herangezogen werden: H: $\vec{u} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$
2. H mit g schneiden; der Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt L.

Beispiel

Gegeben ist der Punkt $P(5\,|\,0\,|\,0)$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass P nicht auf g liegt, und bestimmen Sie dann den Abstand, den P von der Geraden g hat.

b) Ermitteln Sie den Abstand der Geraden g vom Ursprung O.

Lösung:

a) P in g: $\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Die Punktprobe kann im Kopf durchgeführt werden: In der 2. und 3. Koordinate ergibt sich jeweils $\lambda = -1$, das führt aber in der 1. Koordinate auf eine falsche Aussage, also $P \notin g$.

Abstandsberechnung:

H: $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$ — Lotebene aufstellen

H: $2x_1 + x_2 + x_3 = 10$ — H in Koordinatenform umwandeln

g in H: $2 \cdot (1 + 2\lambda) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) = 10$ — g mit H schneiden

$6\lambda = 6 \;\Rightarrow\; \lambda = 1$ — Bestimmen des Parameters

In g einsetzen: $\vec{x}_L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Dies ergibt den Lotfußpunkt L(3 | 2 | 2).

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$

$= \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3} \approx \mathbf{3{,}464}$ Das ist der gesuchte Abstand.

b) Der Abstand der Geraden g vom Ursprung berechnet sich in gleicher Weise, wobei dieses Mal lediglich der Punkt O(0 | 0 | 0) genommen werden muss.

F: $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ Lotebene durch O, senkrecht zu g

g in F: $2(1+2\lambda) + (1+\lambda) + (1+\lambda) = 0$ g mit F schneiden

$6\lambda = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3}$ Bestimmen des Parameters

In g einsetzen: $L\left(-\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3}\right)$ Lotfußpunkt des Ursprungs auf g

$|\overrightarrow{OL}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx \mathbf{0{,}577}$ Das ist der Abstand vom Ursprung.

Aufgaben

120. Berechnen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) P(3 | 2 | −4) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) P(2 | 0 | 0) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

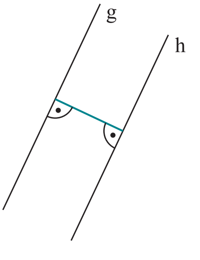
c) P(0 | 0 | 1) und g: $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) P(0 | 0 | 0) und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

121. Abstand paralleler Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$.



a) Zeigen Sie, dass die Geraden echt parallel sind.

b) Berechnen Sie ihren Abstand, indem Sie dieses Abstandsproblem auf die Bestimmung des Abstands eines Punktes von einer Geraden zurückführen.

b) Es handelt sich in beiden Fällen um Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene (Achtung: sin(φ)). Der Richtungsvektor der Geraden ist in beiden Fällen:

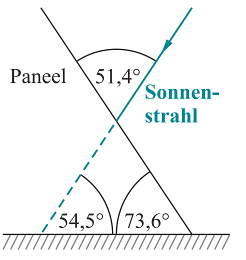
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Sonnenstrahl und Paneel

$$\sin(\varphi_1) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}_1|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{119}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{313}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_1 \approx 51{,}4°}$$

Sonnenstrahl und Boden

$$\sin(\varphi_2) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{n}_2|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{7}{\sqrt{74}}$$



$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_2 \approx 54{,}5°}$

Anmerkung: Bei der Skizze ist zu beachten, dass die gezeichneten Geraden in die Zeichenebene projiziert wurden.

c) Maximal ist die Stromausbeute, wenn die Sonnenstrahlen parallel zum Normalenvektor des Paneels verlaufen. Der Richtungsvektor dafür ist:

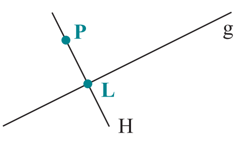
$$\vec{r}_S = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Das Minuszeichen wurde hier nur gewählt, damit die Orientierung des Richtungsvektors mit dem der Sonnenstrahlung übereinstimmt.

d) $$\sin(\varphi_3) = \frac{|\vec{r}_S \circ \vec{n}_2|}{|\vec{r}_S| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -12 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{313} \cdot 1} = \frac{5}{\sqrt{313}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_3 \approx 16{,}4°}$$

120. a) Lotebene aufstellen:

$$H: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = 0$$



$\Leftrightarrow \quad H: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

$g \cap H: 2(-3+2\lambda) + (-4+\lambda) + 2(-4+2\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9\lambda = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$

in g: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Ortsvektor des Lotfußpunktes

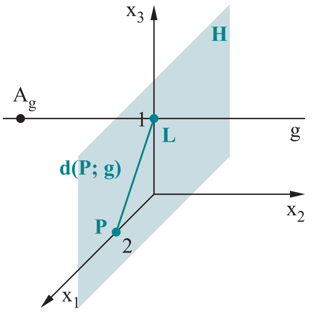
$$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+16} = \mathbf{6}$$

b) $H: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H: x_2 = 0$

$g \cap H: -2 + \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2$

in g: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right| = \boldsymbol{\sqrt{5}}$



c) $H: \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H: x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

$g \cap H: \lambda + \lambda + \lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3}$

in g: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{1+1+4} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\sqrt{6}}$

d) $H: \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad H: 5x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$g \cap H: 5(1+5\lambda) + (-3+\lambda) - (1-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 27\lambda + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{27}$

in g: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} \boldsymbol{- \frac{1}{27}}\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{22}{27}\\-\frac{82}{27}\\\frac{28}{27}\end{pmatrix}$

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = |\overrightarrow{OL}| = \left|\begin{pmatrix}\frac{22}{27}\\-\frac{82}{27}\\\frac{28}{27}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{27}\sqrt{484 + 6\,724 + 784} = \frac{2}{9}\sqrt{222} \approx \mathbf{3{,}31}$

121. a) Prüfen der Richtungsvektoren auf Kollinearität:

$\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\1\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\Rightarrow & \alpha = -2\\ \Rightarrow & \alpha = -2\\ \Rightarrow & \alpha = -2\end{matrix}$

$\Rightarrow$ g und h sind zumindest parallel.

Differenzvektor der Aufhängepunkte:

$\vec{a}_h - \vec{a}_g = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$