MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

FOS · BOS Technik

Analysis und Analytische Geometrie 1

STARK

MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

FOS · BOS Technik

Analysis und Analytische Geometrie 1

STARK

Inhalt

Autor: Reinhard Schuberth

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Trainingsband ist für die 11. Jahrgangsstufe der Fachoberschule (FOS) in der Ausbildungsrichtung Technik konzipiert. Auch Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule (BOS) können damit lernen. Für die Vorklassen und zum Wiederholen von Grundkenntnissen steht Ihnen der Trainingsband „Grundwissen Algebra" (Stark Verlag, Best.-Nr. 92416) zur Verfügung.

Die modulare Struktur der Kapitel erlaubt es Ihnen, an vielen Stellen mit dem Lesen zu beginnen, ohne den Kontext zu verlieren. Daher können Sie sich sofort mit genau den Themenbereichen beschäftigen, die Ihnen noch Probleme bereiten. Die folgenden Punkte helfen dabei, das Lernen mit diesem Buch zu erleichtern:

- In den grün umrandeten bzw. getönten Kästen finden Sie – präzise und schülergerecht formuliert – die wichtigen **Definitionen, Regeln und Merksätze,** die Sie sicher beherrschen müssen.
- Anhand passgenauer, kommentierter **Beispiele** lässt sich die Theorie unmittelbar nachvollziehen, verstehen und wiederholen.
- Die **Übungsaufgaben** eines jeden Abschnitts sind im Schwierigkeitsgrad steigend angeordnet und beinhalten auch anwendungsorientierte Aufgaben.
- Am Ende des Buches finden Sie zu jeder Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete, kleinschrittige **Lösung** zur Selbstkontrolle.

Bleibt mir nur noch, Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Trainingsband und in der Schule zu wünschen!

Ihr

Reinhard Schuberth

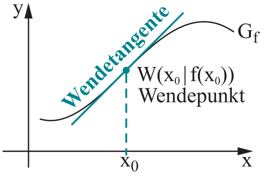
6.4 Wendepunkte und Wendetangenten, Sattelpunkte

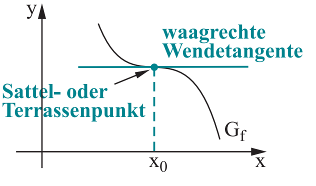
Neben den Extrem- sind die Wendepunkte markante Punkte bei Funktionsgraphen.

Definition

Wendepunkt, Wendetangente, Sattel- oder Terrassenpunkt

- Der Graph einer Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in D_f$ einen **Wendepunkt**, wenn f an der Stelle x_0 differenzierbar ist und der Graph dort einen Krümmungswechsel aufweist, d. h., wenn der Graph an der Stelle x_0 von Links- in Rechtskrümmung übergeht oder umgekehrt. Die Stelle x_0 heißt dann **Wendestelle** und der Wendepunkt hat die Koordinaten $W(x_0 \mid f(x_0))$.
- Die im Wendepunkt errichtete Tangente heißt **Wendetangente**. Wegen des Krümmungswechsels wird die Wendetangente vom Graphen im Wendepunkt durchsetzt.
- Besitzt ein Wendepunkt eine waagrechte Tangente, so wird er auch **Sattel-** oder **Terrassenpunkt** genannt.





Wenn das Krümmungsverhalten eines Graphen ermittelt wurde, so können daraus die Wendepunkte bestimmt werden. Sie lassen sich aber auch ohne vorausgehende Bestimmung des Krümmungsverhaltens ermitteln, indem man die Monotonieänderungen von f' betrachtet. Da eine Monotonieänderung das Vorliegen eines Extremwertes nach sich zieht, hat der Graph von f dort einen Wendepunkt, wo der Graph der Ableitungsfunktion f' einen Extrempunkt besitzt. Demnach lässt sich das Bestimmen von Wendepunkten einer Funktion f auf das Ermitteln der lokalen Extrempunkte der zugehörigen Ableitungsfunktion f' zurückführen.

Regel

Kriterium für das Vorliegen eines Wende- oder Sattelpunktes

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle x_0 einen

- **Wendepunkt**, wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.
- **Sattel-** oder **Terrassenpunkt**, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Damit der Graph einer Funktion f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt besitzt, muss f'' an der Stelle x_0 eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzen. Dies stellt im oben genannten Kriterium die Forderung $f'''(x_0) \neq 0$ sicher, weil damit eine Steigung von f'' an der Nullstelle x_0 vorhanden ist, sodass die x-Achse auch tatsächlich überquert wird.

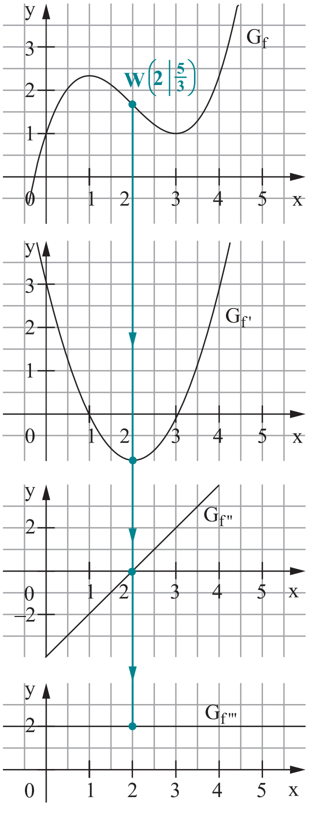
Beispiele

1. Was lässt sich über die Wendepunkte einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades (Parabelfunktion) aussagen?

   Lösung:
   Die Parabelfunktionen $p(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a \neq 0$, haben wegen $p''(x) = 2a \neq 0$ keine Wendepunkte.

2. Untersuchen Sie die ganzrationale Funktion dritten Grades
   $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
   auf Wendepunkte und geben Sie die Wendetangenten an.

   Lösung:
   $f'(x) = x^2 - 4x + 3$
   $f''(x) = 2x - 4$
   $f'''(x) = 2$
   Die Nullstellen von f'' werden berechnet:
   $f''(x) = 0$
   $2x - 4 = 0$, also $x_1 = 2$
   Die Nullstelle von f'' wird in f''' eingesetzt:
   $f'''(2) = 2 \neq 0$
   $\Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle 2
   Die y-Koordinate des Wendepunktes ergibt sich wie üblich durch Einsetzen des berechneten x-Wertes, der Wendestelle 2, in die Ausgangsfunktion:
   $f(2) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = \frac{5}{3}$
   $\Rightarrow$ **$W\left(2 \mid \frac{5}{3}\right)$**



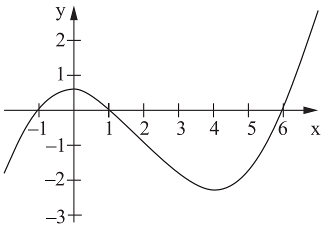
   Das Ermitteln der Geradengleichung für die Wendetangente geschieht auf die gleiche Weise wie bei einer „normalen“ Tangente, nur eben im Wendepunkt.

   $t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — Allgemeine Formel für die Tangente
   Es gilt: $x_0 = 2$ und $f(2) = \frac{5}{3}$
   $f'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ — Es bleibt noch f'(2) zu berechnen.
   $t: \; y = -1(x - 2) + \frac{5}{3} = -x + \frac{11}{3}$ — Einsetzen in die Tangentengleichung ergibt die Gleichung der Wendetangente.

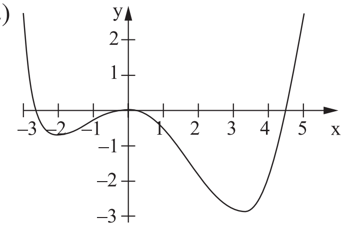
Aufgaben

136. a) An welchen Stellen haben die abgebildeten Graphen Wendepunkte? Befinden sich darunter auch Sattelpunkte?

(1)

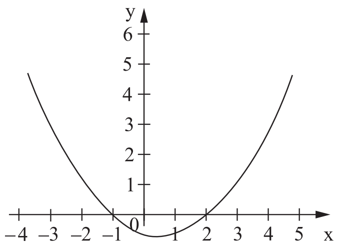


(2)

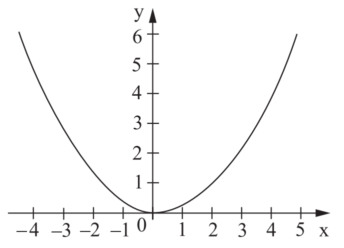


b) Unten sind die Graphen von zweiten Ableitungsfunktionen eingezeichnet. Was können Sie über Wendepunkte der zugehörigen Graphen aussagen?

(1)



(2)



137. a) Skizzieren Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, die in $W(2\,|\,1)$ einen Wendepunkt hat und deren Wendetangente lautet:
t: $y = -\frac{1}{2}(x-2)+1$

b) Skizzieren Sie einen Graphen, der in $(-1\,|\,1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

138. Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte für folgende Funktionen:

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 1$

Ermitteln Sie hier zusätzlich die Gleichung der Wendetangente.

b) $f(x) = \frac{1}{5}(x^4 - 4x^3)$

c) $f(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2$

d) $f_t(x) = \frac{3}{8}x^4 - t^2x^2$ mit $t \in \mathbb{R} \wedge t > 0$

139. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = \frac{1}{12}(x^4 - 2ax^3 + 30x^2)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie, für welche a der Graph von f_a zwei bzw. keine Wendepunkte besitzt.

b) Gibt es a, sodass der Graph von f_a genau einen Wendepunkt hat?

c) Geben Sie die Lage der Wendestellen in Abhängigkeit von a an.

134. a) $f(0)=8 \Rightarrow C(0|8)$
An der Stelle B ist mathematisch gesehen eine Nullstelle: $f(x)=0$
$\frac{1}{1875}x^2 - \frac{11}{75}x + 8 = 0 \quad |\cdot 1875$
$x^2 - 275x + 15\,000 = 0 \Rightarrow x_1 = 75;\ x_2 = 200 \Rightarrow B(200|0)$

b) $D=[0;\ 200]$

c) Höchster Punkt: $C(0|8)$
Tiefster Punkt: $f'(x)=0 \Rightarrow x_0=137{,}5;\ f(137{,}5)=-2{,}08$
$\Rightarrow T(137{,}5|-2{,}08)$

d) $h=8-(-2{,}08)=10{,}08$ [m]

135. a) $e(x)=k(x)$ Ansatz auf Schneiden
$x^3 - 6x^2 + 13x + 72 = 41x$
$x^3 - 6x^2 - 28x + 72 = 0$
$(x^3 - 6x^2 - 28x + 72):(x-2)$ Nullstelle geraten: $x_1=2$
$= x^2 - 4x - 36$
$x^2 - 4x - 36 = 0$
$x_1 \approx 8{,}325$
$x_2 \approx -4{,}325 \notin D$
Die Gewinnzone ist das Intervall $]2;\ 8{,}325[$.

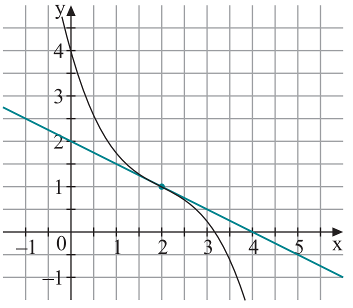
b) $g'(x)=0$
$-3x^2 + 12x + 28 = 0 \Rightarrow -1{,}65 \notin D;\ x_0 = 5{,}65$

c) Gewinnmaximum: $g(5{,}65) \approx 97$

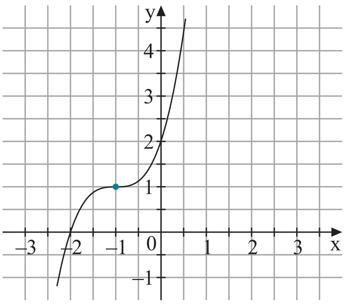
136. a) (1) $x_W=2$
(2) $x_{W_1}=-1;\ x_{W_2}=2$
Es gibt keine Sattelpunkte.

b) (1) Der Graph der zugehörigen Funktion hat an den Stellen $x_{W_1}=-1$; $x_{W_2}=2$ Wendepunkte, da die zweite Ableitung an diesen Stellen Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.
(2) Da die zweite Ableitung ihr Vorzeichen nicht wechselt, hat der zugehörige Graph keinen Wendepunkt.

137. a)



b)



138. a) $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ — Die ersten drei Ableitungen werden berechnet.

$f''(x) = x - 2$

$f'''(x) = 1$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ — Die Nullstellen von f'' werden berechnet.

$f'''(2) = 1 \neq 0 \Rightarrow W\left(2 \,\middle|\, -\frac{5}{3}\right)$ — Die Nullstelle von f'' wird in f''' eingesetzt.

t: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ — Allgemeiner Ansatz für die Wendetangente

$x_0 = 2;\ f(2) = -\frac{5}{3};\ f'(2) = -2$

t: $y = -2(x-2) - \frac{5}{3}$ — Einsetzen und Zusammenfassen ergibt die Gleichung der Wendetangente.

$= -2x + \frac{7}{3}$

b) $f'(x) = \frac{1}{5}(4x^3 - 12x^2)$

$f''(x) = \frac{1}{5}(12x^2 - 24x) = \frac{12}{5}(x^2 - 2x)$

$f'''(x) = \frac{24}{5}(x - 1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{5}x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow W_1(0\,|\,0)$

$f'''(2) \neq 0 \Rightarrow W_2\left(2 \,\middle|\, -\frac{16}{5}\right)$

c) $f'(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x$

$f''(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$f'''(x) = x - 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0 \quad |\cdot 2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 2$ (doppelte Nullstelle, ohne VZW)

$f'''(2) = 0$

Weil f'' an der Stelle 2 sein Vorzeichen nicht wechselt, hat der Graph von f an dieser Stelle keinen Wendepunkt.

d) $f_t'(x) = \frac{3}{2}x^3 - 2t^2x$

$f_t''(x) = \frac{9}{2}x^2 - 2t^2$

$f_t'''(x) = 9x$

$f_t''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{9}{2}x^2 - 2t^2 = 0$

$\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{4}{9}t^2 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm\frac{2}{3}t$

$f_t'''\left(\pm\frac{2}{3}t\right) \neq 0 \;\Rightarrow\; W\left(\pm\frac{2}{3}t \,\middle|\, -\frac{10}{27}t^4\right)$

139. $f_a'(x) = \frac{1}{12}(4x^3 - 6ax^2 + 60x)$

$f_a''(x) = \frac{1}{12}(12x^2 - 12ax + 60) = \frac{12}{12}(x^2 - ax + 5) = x^2 - ax + 5$

$f_a'''(x) = 2x - a$

a) $f_a''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - ax + 5 = 0$

$D = (-a)^2 - 4 \cdot 5 = a^2 - 20$ — Es wird die Diskriminante berechnet.

Keine Wendepunkte, wenn $D < 0$:

$a^2 - 20 < 0 \;\Leftrightarrow\; |a| < \sqrt{20}$

Zwei Wendepunkte, wenn $D > 0$:

$|a| > \sqrt{20} \;\Leftrightarrow\; |a| > 2\sqrt{5}$

Dass in diesem Fall auch tatsächlich zwei Wendepunkte vorliegen, geht daraus hervor, dass für diese a die zweite Ableitung zwei einfache Nullstellen, also Nullstellen mit Vorzeichenwechsel besitzt.

b) Es gibt zwar a, für welche die zweite Ableitung nur je eine (doppelte) Nullstelle hat, nämlich für $a = \pm\sqrt{20}$. Obwohl in diesen beiden Fällen Nullstellen der zweiten Ableitung vorhanden sind, gibt es trotzdem keinen Wendepunkt, weil es Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel sind. Die Antwort lautet also: Es gibt kein a, sodass nur ein Wendepunkt vorliegt.

c) Wenn $|a| > 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$, dann hat f_a'' die beiden einfachen Nullstellen:

$$x_{1/2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 20}}{2}$$

Das sind die Wendestellen.

d) Für $a = 5$ gilt dann:

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 20}}{2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5}) \approx \begin{cases} 1{,}38 \\ 3{,}62 \end{cases}$$

$f_5(1{,}38) = 2{,}88$; $f_5(3{,}62) = 7{,}54$

Damit ergeben sich die Wendepunkte wie folgt:

$W_1(1{,}38 \,|\, 2{,}88)$; $W_2(3{,}62 \,|\, 7{,}54)$