MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

FOS · BOS Nichttechnik

Analysis und Stochastik 1

STARK

Inhalt

Autor: Reinhard Schuberth

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieser Trainingsband ist für die 11. Jahrgangsstufe der Fachoberschule (FOS) in den nichttechnischen Ausbildungsrichtungen konzipiert. Auch Schülerinnen und Schüler der Berufsoberschule (BOS) können damit lernen. Für die Vorklassen und zum Wiederholen von Grundkenntnissen steht Ihnen der Trainingsband „Grundwissen Algebra" (Stark Verlag, Best.-Nr. 92411) zur Verfügung.

Die modulare Struktur der Kapitel erlaubt es Ihnen, an vielen Stellen mit dem Lesen zu beginnen, ohne den Kontext zu verlieren. Daher können Sie sich sofort mit genau den Themenbereichen beschäftigen, die Ihnen noch Probleme bereiten. Die folgenden Punkte helfen dabei, das Lernen mit diesem Buch zu erleichtern:

- In den grün umrandeten bzw. getönten Kästen finden Sie – präzise und schülergerecht formuliert – die wichtigen **Definitionen, Regeln und Merksätze,** die Sie sicher beherrschen müssen.
- Anhand passgenauer, kommentierter **Beispiele** lässt sich die Theorie unmittelbar nachvollziehen, verstehen und wiederholen.
- Die **Übungsaufgaben** eines jeden Abschnitts sind im Schwierigkeitsgrad steigend angeordnet und beinhalten auch anwendungsorientierte Aufgaben.
- Wichtige **mathematische Definitionen und Schreibweisen** sind in einem separaten Teil übersichtlich zusammengestellt.
- Am Ende des Buches finden Sie zu jeder Aufgabe eine vollständig ausgearbeitete, kleinschrittige **Lösung** zur Selbstkontrolle.

Bleibt mir nur noch, Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Trainingsband und in der Schule zu wünschen!

Ihr

Reinhard Schuberth

Aufgaben

99. Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = -1$

b) $f(x) = k - 2$, wobei k eine Konstante ist

c) $p(x) = x^7$

d) $p(x) = x^{2a+1}$, wobei $a \in \mathbb{N}$

e) $g(t) = t^2$

f) $h(x) = a^2$

100. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Graphen der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen.

a) $f(x) = x^2;\ x_0 = -\frac{1}{2}$ b) $g(x) = x^3;\ x_0 = 2$

101. a) An welcher Stelle hat der Graph der Normalparabel $f(x) = x^2$ eine Tangente mit der Steigung 1,5?

b) An welcher Stelle hat der Graph der Funktion $f(x) = x^3$ die Steigung 1?

5.7 Ableitungsregeln

Es genügen zwei Ableitungsregeln und die Kenntnis der Ableitungen der elementaren Funktionen $x \mapsto c$ und $x \mapsto x^n$, um sämtliche ganzrationalen Funktionen ableiten zu können, ohne auf den Differenzialquotienten zurückgreifen zu müssen.

Regel

Die Summenregel
Sind die Funktionen f und g in einem gemeinsamen Definitionsbereich definiert und dort auch differenzierbar, dann ist auch die Summenfunktion $f + g$ differenzierbar und es gilt:
$(f + g)' = f' + g'$
Beachten Sie: **Additive** Konstanten fallen beim Ableiten einfach weg.

Das bedeutet, man muss beim Ableiten einer Summe die Summanden einzeln ableiten und anschließend aufaddieren (das „+“ bleibt erhalten).

Beispiele

1. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + x$.

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + x)' \\ &= (x^2)' + x' \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x) = x^2 + x$ setzt sich aus den elementaren Funktionen $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto x$ additiv zusammen. Da diese beiden Funktionen in $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, ist auch die Summenfunktion f in $\mathbb{R}$ differenzierbar.

2. Es sei $g(x)=x^3-2$. Bestimmen Sie $g'(x)$.

Lösung:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^3+(-2))' \\ &= (x^3)'+(-2)' \\ &= 3x^2+0 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Die Funktion $g(x)=x^3-2$ setzt sich aus den elementaren Funktionen $x \mapsto x^3$ und $x \mapsto -2$ additiv zusammen: $g(x)=x^3-2=x^3+(-2)$. Die Ableitung der konstanten Funktion $x \mapsto -2$ ist null.

Regel

Die Faktorregel

Die Funktion f sei differenzierbar und $k \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Dann ist auch die Funktion $k \cdot f$ differenzierbar und es gilt:

$(k \cdot f)' = k \cdot f'$

Multiplikative Konstanten bleiben beim Ableiten unverändert erhalten.

Zu beachten ist, dass die Faktorregel nur für konstante Faktoren gilt. Sie ist nicht mehr anwendbar, wenn der Faktor selbst eine Funktion von x ist.
Ist eine Funktion als Produkt von Funktionen dargestellt, muss vor dem Ableiten immer erst ausmultipliziert werden (außer es handelt sich um konstante Faktoren).

Beispiele

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von $f(x)=3x^2$.

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2)' \\ &= 3(x^2)' \\ &= 3 \cdot 2x \\ &= 6x \end{aligned}$$

$f(x)=3x^2$ setzt sich aus der Funktion $x \mapsto x^2$ und der Konstanten 3 multiplikativ zusammen. Da die Funktion $x \mapsto x^2$ in $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist es auch die Funktion f.

2. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von $h(x)=x^2x^3$.

Lösung:

$h'(x)=(x^2x^3)'=(x^5)'=5x^4$

Achtung:

$$\begin{aligned} (x^2x^3)' &\neq (x^2)' \cdot (x^3)' \\ &= 2x \cdot 3x^2 = 6x^3 \end{aligned}$$

h(x) darf nicht mit der Faktorregel abgeleitet werden, da x^2 keine Konstante ist und selbst von x abhängt. h(x) darf auch nicht abgeleitet werden, indem man in Anlehnung an die Summenregel die beiden Faktoren einzeln ableitet und die Multiplikation dazwischen beibehält. In solchen Fällen muss grundsätzlich erst ausmultipliziert und dann abgeleitet werden.

Natürlich können Summen- und Faktorregel auch miteinander kombiniert angewandt werden. Daraus ergibt sich, dass alle ganzrationalen Funktionen in $\mathbb{R}$ differenzierbar sind. Ihre Ableitungsfunktionen lassen sich mit den eingeführten Regeln bestimmen.

Beispiele

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 9x - 1$.

   Lösung:

   $f'(x) = 12x^2 - x + 9$

   Die Koeffizienten bei der Ableitungsfunktion wurden sofort zu einer Zahl zusammengefasst.

2. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von $h(x) = x(x-1)^2$.

   Lösung:

   $h(x) = x(x-1)^2 = x(x^2 - 2x + 1)$
   $\quad = x^3 - 2x^2 + x$

   Achtung: Hier muss vor dem Ableiten ausmultipliziert werden.

   $h'(x) = (x^3 - 2x^2 + x)'$
   $\quad = 3x^2 - 4x + 1$

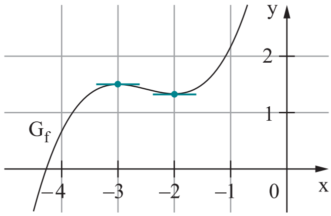
   Erst der ausmultiplizierte Funktionsterm wird abgeleitet.

3. An welchen Stellen hat der Graph von $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + 6$ waagrechte Tangenten?

   Lösung:

   $f'(x) = x^2 + 5x + 6$
   $f'(x) = 0$
   $x^2 + 5x + 6 = 0$ mit Vieta:
   $(x+3)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = -2$

   An den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = -2$ hat der Graph von f waagrechte Tangenten.



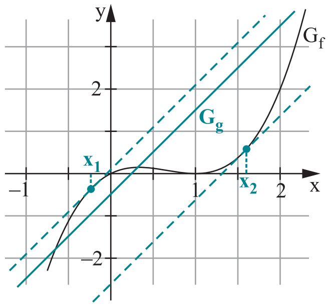
4. An welchen Stellen hat der Graph der Funktion $f(x) = x(x-1)^2$ Tangenten, die parallel zu der Geraden mit der Gleichung g: $y = 2x - 0{,}5$ verlaufen?

   Lösung:

   $f(x) = x(x-1)^2$
   $\quad = x(x^2 - 2x + 1)$
   $\quad = x^3 - 2x^2 + x$
   $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

   Da die Gerade g die Steigung $m = 2$ besitzt, müssen zu g parallele Tangenten ebenfalls die Steigung 2 haben:

   $f'(x) = 2$
   $3x^2 - 4x + 1 = 2$
   $3x^2 - 4x - 1 = 0$



$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \approx \begin{cases} 1{,}55 \\ -0{,}22 \end{cases}$$

Aufgaben

102. Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktionen:

a) $f(x)=x^3+x$

b) $f(x)=x^3+x^2+x+5$

c) $f_t(x)=x+t$

d) $f(x)=x^3+x-\frac{1}{3}$

e) $f_a(x)=x^2+a^2$

103. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=-2x$

b) $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

c) $f(x)=\sqrt{3}x^4$

d) $f(x)=\frac{x^2}{4}$

e) $f_t(x)=tx$

f) $g_a(x)=a^3x^2$

104. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-5x^3+9x^2-\sqrt{3}x+2$

b) $f_k(x)=\frac{1}{2}(x^3+k^2x^2+k^3)$

c) $f(x)=x^2(x-2)$

d) $f(x)=(x-1)^2$

e) $f_t(x)=\frac{3}{10}tx(x^2-2tx+t^2)$

f) $A_z(u)=zu^2-zu+u-z^2$

g) $B_u(z)=zu^2-zu+u-z^2$

105. Berechnen Sie die Ableitung an den angegebenen Stellen und geben Sie die Tangentengleichungen an:

a) $f(x)=2x-x^3;\ x_0=-1$

b) $f(x)=\frac{1}{8}(x^4-2x^2);\ x_0=1$

c) $f(x)=(x+1)(x-2);\ x_0=2$

106. Gegeben ist die Funktion f durch die folgende Funktionsgleichung $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-1)$.

a) Berechnen Sie $f'(-2)$, $f'(-0{,}5)$ und $f'(1)$.

b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten in den Punkten $P_1(-2\,|\,?)$, $P_2(-0{,}5\,|\,?)$ und $P_3(1\,|\,?)$ des Graphen von f.

c) Zeichnen Sie den Graphen mitsamt den Tangenten in ein Koordinatensystem ein.

107. Ermitteln Sie diejenigen Stellen, an denen der Graph der jeweiligen Funktion die angegebene Eigenschaft hat:

a) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+3;$ waagrechte Tangenten.

b) $f(x)=2(x-1)^2;$ die Steigung 1.

c) $f(x)=\frac{1}{3}x(x^2-2x+3);$ eine Tangente parallel zu der Geraden g: $y=-\frac{1}{2}x+2$.

101. a) $(x^2)' = 1{,}5$
$2x = 1{,}5$
$x = 0{,}75$

Die Steigung wird durch die Funktionswerte der Ableitungsfunktion angegeben. Es muss also gefragt werden, wo f'(x) den Wert 1,5 hat.

b) $f'(x) = 3x^2$

$3x^2 = 1$ Ansatz

$x^2 = \frac{1}{3}$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \approx \pm 0{,}58$

102. a) $f'(x) = 3x^2 + 1$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

c) $f_t'(x) = 1$

d) $f'(x) = 3x^2 + 1$

e) $f_a'(x) = 2x$

103. a) $f'(x) = -2$

b) $f'(x) = \frac{2}{3}x$

c) $f'(x) = 4\sqrt{3}x^3$ $\sqrt{3}$ ist ein konstanter Faktor.

d) $f'(x) = 2\frac{x}{4} = \frac{1}{2}x$

e) $f_t'(x) = t$

f) $g_a'(x) = 2a^3x$ a^3 ist ein konstanter Faktor.

104. a) $f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{4}x^3 - 3 \cdot 5x^2 + 2 \cdot 9x - \sqrt{3} + 0 = x^3 - 15x^2 + 18x - \sqrt{3}$

b) $f_k'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 2k^2x)$ $\frac{1}{2}$ ist ein konstanter Faktor.

c) $f(x) = x^2(x-2) = x^3 - 2x^2$
$f'(x) = 3x^2 - 4x$

Hier muss f(x) zuerst ausmultipliziert werden, erst dann kann abgeleitet werden!

d) $f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
$f'(x) = 2x - 2$

e) $f_t(x) = \frac{3}{10}tx(x^2 - 2tx + t^2)$
$= \frac{3}{10}t(x^3 - 2tx^2 + t^2x)$

Das x ist kein konstanter Faktor. Es muss deshalb erst in die Klammer hineinmultipliziert werden. Für t ist das nicht nötig, da t ein konstanter Faktor ist.

$f_t'(x) = \frac{3t}{10}(3x^2 - 4tx + t^2)$

f) $A_z(u) = zu^2 - zu + u - z^2$
$A'_z(u) = 2zu - z + 1$

Achtung: Hier ist u die Funktionsvariable und z eine Konstante. Es wird nach u abgeleitet.

g) $B_u(z) = zu^2 - zu + u - z^2$
$B'_u(z) = u^2 - u - 2z$

Jetzt ist z die Variable und u eine Konstante.

105. a) $f(x) = 2x - x^3$
$f'(x) = 2 - 3x^2$
$x_0 = -1;\ f(-1) = -1;\ f'(-1) = -1$
t: $y = -1(x+1) - 1 = -x - 2$ Tangentengleichung

b) $f(x) = \frac{1}{8}(x^4 - 2x^2)$
$f'(x) = \frac{1}{8}(4x^3 - 2 \cdot 2x) = \frac{1}{2}(x^3 - x)$
$x_0 = 1;\ f(1) = -\frac{1}{8};\ f'(1) = 0$ waagrechte Tangente
t: $y = 0 \cdot (x-1) - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$ Tangentengleichung

c) $f(x) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$
$f'(x) = 2x - 1$
$x_0 = 2;\ f(2) = 0;\ f'(2) = 3$
t: $y = 3(x-2) + 0 = 3x - 6$

106. $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-1) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1;\quad f'(x) = -x - \frac{1}{2}$

a) $f'(-2) = \frac{3}{2};\quad f'(-0{,}5) = 0;\quad f'(1) = -\frac{3}{2}$

b) $P_1(-2\,|\,?)$: $x_0 = -2;\ f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1: y = \frac{3}{2}(x+2) = \frac{3}{2}x + 3$
$P_2(-0{,}5\,|\,?)$: $x_0 = -0{,}5;\ f(-0{,}5) = \frac{9}{8} \quad \Rightarrow \quad t_2: y = \frac{9}{8}$
$P_3(1\,|\,?)$: $x_0 = 1;\ f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_3: y = -\frac{3}{2}(x-1) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

c)