BERUFLICHE OBERSCHULE

ABITUR-TRAINING MATHEMATIK

MEHR ERFAHREN

12. Klasse FOS · BOS

Reinhard Schuberth

Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Technik

STARK

Inhalt

Vorwort

Lineare Algebra **1**

1 Koordinaten und Vektoren **2**
1.1 Punkte und ihre Ortsvektoren im Koordinatensystem 2
1.2 Der Vektorbegriff 5
1.3 Rechnen mit Vektoren 6
1.4 Die Skalarmultiplikation 10

2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit **14**
2.1 Linearkombinationen 14
2.2 Lineare Abhängigkeit von Vektoren 19
2.3 Berechnung von Teilverhältnissen 28
2.4 Die Basis eines Vektorraums 31

3 Produkte von Vektoren **38**
3.1 Skalarprodukt 38
3.2 Betrag und Winkel 43
3.3 Vektorprodukt 54
3.4 Volumenberechnungen 61

Analytische Geometrie **69**

4 Geraden und Ebenengleichungen **70**
4.1 Geraden 70
4.2 Ebenen 76
4.3 Normalen- und Koordinatenform von Ebenen 81

5 Lagebeziehungen zwischen den geometrischen Objekten **89**
5.1 Lagen von Geraden zueinander 89
5.2 Lagen von Geraden und Ebenen 95
5.3 Lagen von Ebenen zueinander 100
5.4 Schnittaufgaben 104
5.5 Ebenen und Gleichungssysteme 107
5.6 Lagen von drei Ebenen 111
5.7 Schnittwinkel 116

Fortsetzung siehe nächste Seite

6 Abstandsberechnungen **120**
6.1 Abstand Punkt – Gerade 120
6.2 Abstand Punkt – Ebene 123
7 Projektionen und Spiegelungen mithilfe des Lotfußpunktes **127**
7.1 Projektionen 128
7.2 Spiegelungen 129

Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung **131**

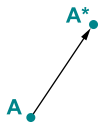
Wiederholung: Gauß'scher Algorithmus und Rang einer Matrix .. **139**

Lösungen **141**

Autor: Reinhard Schuberth

1.2 Der Vektorbegriff

Geometrisch wird im Punktraum des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ durch zwei Punkte A und A* genau ein Pfeil $\overrightarrow{AA^*}$ mit dem **Angriffspunkt** A (auch Fußpunkt oder kurz Fuß genannt) und dem **Zielpunkt** A* (auch Spitze genannt) eindeutig festgelegt.



Dieser Pfeil kann auch als die Verschiebung des Urpunktes A in den Bild- oder Zielpunkt A* interpretiert werden. Sollen sämtliche Punkte eines Punktraumes dieser Verschiebung (= Parallelverschiebung oder Translation) unterworfen werden, so ist in jedem Punkt ein solcher Verschiebungspfeil anzubringen.

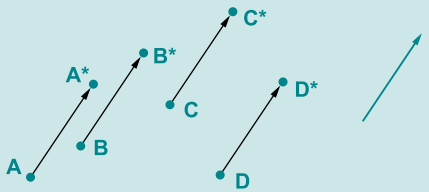
Definition

Vektor

Die Menge

$\vec{v} = \{\overrightarrow{AA^*};\ \overrightarrow{BB^*};\ \overrightarrow{CC^*};\ \overrightarrow{DD^*};\ \ldots\}$

aller gleichsinnigen, parallelen und gleich langen Pfeile (siehe Abbildung) einer Translation stellt einen **Vektor** $\vec{v}$ dar.



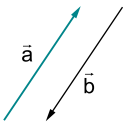
Jeder einzelne Pfeil, wie z. B. $\overrightarrow{AA^*}$ oder $\overrightarrow{BB^*}$, ist ein **Repräsentant** des Vektors $\vec{v}$.

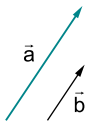
Bei gleichsinnigen (oder gleichorientierten) Pfeilen zeigen die Pfeilspitzen in die gleiche Richtung. Was parallel und gleich lang bedeutet, ist klar. Praktisch stellt man sich einen Vektor als einen Pfeil vor, der beliebig frei im Raum verschiebbar ist.

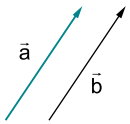
Ein **Ortsvektor** ist demzufolge derjenige Repräsentant des Vektors, der im Ursprung beginnt.

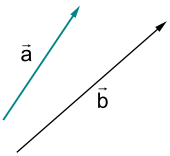
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen **gleich**, in Zeichen $\vec{a} = \vec{b}$, wenn sie dieselbe Menge von Pfeilen darstellen, d. h., wenn je zwei Repräsentanten gleichsinnig, parallel und gleich lang sind.

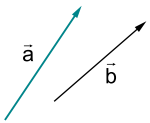
Aufgabe 3. Im Folgenden sind jeweils zwei Repräsentanten von zwei Vektoren abgebildet.
Entscheiden Sie, welche Pfeile gleichsinnig, parallel oder gleich lang sind.
Welche beiden Repräsentanten gehören zu gleichen Vektoren?

a)


b)


c)


d)


e)


1.3 Rechnen mit Vektoren

Vektoren sind geometrische Objekte, mit denen jedoch ganz ähnlich wie in der Algebra der Zahlen gerechnet werden kann.

Die **Vektoraddition** wird definiert als die Hintereinanderausführung zweier Translationen. Dazu werden die beiden Pfeile zeichnerisch „aneinandergehängt“. Das Ergebnis ist diejenige Translation, welche dasselbe Resultat erzeugt wie die beiden hintereinander ausgeführten Einzeltranslationen.

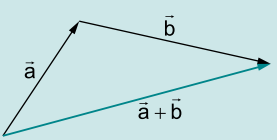
Definition

Vektoraddition

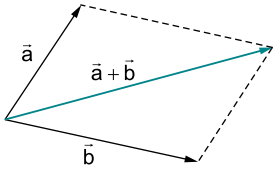
$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

Rechnerisch werden die Vektoren nach obiger Formel ganz einfach dadurch addiert, dass man ihre Koordinaten addiert.

Bei der **zeichnerischen** Addition werden die beiden Pfeile von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als zwei Translationen betrachtet, die nacheinander ausgeführt werden.



Der Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$ ist also die Diagonale des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Parallelogramms.



Beispiele

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}$.

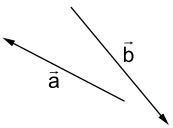
   Bestimmen Sie den Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$.

   Lösung:
   Die rechnerische Addition ist ganz einfach:

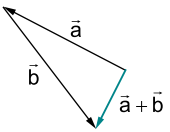
   $$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3\\-4+3\\1+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

   Natürlich wird man die Addition zukünftig nicht mehr so ausführlich schreiben, da sich die Koordinaten in der Regel direkt im Kopf addieren lassen.

2. Die beiden rechts abgebildeten Vektoren sollen zeichnerisch addiert werden.



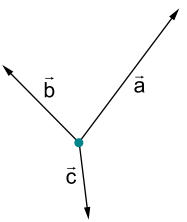
   Lösung:
   Man verschiebt zeichnerisch einen Pfeil (hier $\vec{b}$) mit seinem Angriffspunkt in die Spitze des anderen Pfeils (hier $\vec{a}$). Der Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$ ist dann vom Angriffspunkt des ersten Pfeils bis zur Spitze des letzten Pfeils zu erstrecken.



Bei der zeichnerischen Vektoraddition von mehr als zwei Vektoren hängt man diese in beliebiger Reihenfolge aneinander. Man bezeichnet diese aneinandergehängten Vektoren auch als **Vektorkette**. Der Summenvektor der Vektorkette erstreckt sich dann vom Fuß des ersten Vektors bis zur Spitze des letzten Vektors.

Beispiel

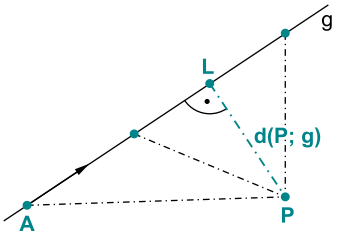
Gesucht ist der Summenvektor der rechts abgebildeten Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, also der Vektor $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.



6 Abstandsberechnungen

In vielen Anwendungen benötigt man den Abstand zwischen zwei Objekten, beispielsweise den zwischen einem Flugzeug und einer Bergspitze. Im Folgenden werden Abstandsberechnungen zwischen geometrischen Objekten betrachtet.

6.1 Abstand Punkt – Gerade



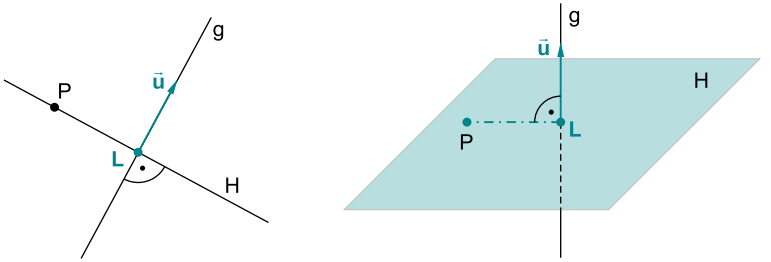
Zunächst muss definiert werden, was man als Abstand zwischen zwei Objekten verstehen will. Wenn ein Asteroid längs einer geraden Flugbahn an der Erde vorbeifliegt, so interessiert man sich selbstverständlich für den kleinsten Abstand, den beide Himmelskörper haben werden. Betrachtet man die Flugbahn des Asteroiden als eine Gerade, so hat der Asteroid genau dort den geringsten Abstand von der Erde, wo die Verbindungsstrecke Erde – Asteroid einen rechten Winkel mit der Geraden der Flugbahn bildet (siehe Abbildung). Diesen Geradenpunkt, der den kleinsten Abstand aller Geradenpunkte vom Punkt P hat, bezeichnet man als den **Lotfußpunkt L** des Punktes P auf der Geraden g.
In diesem Zusammenhang nennt man die gerade Linie PL das **Lot** von P auf g.

Definition

Abstand Punkt – Gerade
Der Abstand d(P; g) eines Punktes P von einer Geraden g wird definiert als die kürzeste Entfernung zwischen g und P. Diese ist gegeben durch den Abstand des Lotfußpunktes L vom Punkt P:
$d(P; g) = d(P; L) = |\overrightarrow{PL}|$
Dabei gilt stets $\overrightarrow{PL} \perp g$.

Das Lot und der Lotfußpunkt spielen bei Abstandsbestimmungen eine zentrale Rolle. Es wird nun der Lotfußpunkt eines Punktes P auf einer Geraden g bestimmt.

Gegeben sind eine Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und ein Punkt $P \notin g$. Um L zu bestimmen, wird eine Hilfsebene H aufgestellt, die P enthält und die senkrecht zu g steht:
$P \in H$ und $g \perp H$
Diese Ebene H nennt man die **Lotebene**. Aus der Abbildung (mit dem Schnittbild links) geht hervor, dass der Schnittpunkt von H und g der Lotfußpunkt L ist.



Regel

Koordinaten des Lotfußpunktes auf einer Geraden bestimmen

1. Lotebene H aufstellen, wobei P als Aufhängepunkt und $\vec{u}$, der Richtungsvektor von g, als Normalenvektor von H herangezogen werden: H: $\vec{u} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$
2. H mit g schneiden; der Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt L.

Beispiel

Gegeben ist der Punkt P(5|0|0) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass P nicht auf g liegt, und bestimmen Sie dann den Abstand, den P von der Geraden g hat.

b) Ermitteln Sie den Abstand der Geraden g vom Ursprung O.

Lösung:

a) P in g: $\begin{pmatrix}\mathbf{5}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Die Punktprobe kann im Kopf durchgeführt werden: In der 2. und 3. Koordinate ergibt sich jeweils $\lambda = -1$, das führt aber in der 1. Koordinate auf eine falsche Aussage, also $P \notin g$.

Abstandsberechnung:

H: $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 0$ — Lotebene aufstellen

H: $2x_1 + x_2 + x_3 = 10$ — H in Koordinatenform umwandeln

g in H: $2 \cdot (1 + 2\lambda) + (1 + \lambda) + (1 + \lambda) = 10$ — g mit H schneiden

$6\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 1$ — Bestimmen des Parameters

In g einsetzen: $\vec{x}_L = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ Dies ergibt den Lotfußpunkt L(3|2|2).

$d(P; g) = |\overrightarrow{PL}| = \left| \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} \right|$

$= \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3} \approx \mathbf{3{,}464}$ Das ist der gesuchte Abstand.

b) Der Abstand der Geraden g vom Ursprung berechnet sich in gleicher Weise, wobei dieses Mal lediglich der Punkt O(0|0|0) genommen werden muss.

F: $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ Lotebene durch O, senkrecht zu g

g in F: $2(1+2\lambda) + (1+\lambda) + (1+\lambda) = 0$ g mit F schneiden

$6\lambda = -4 \iff \lambda = -\frac{2}{3}$ Bestimmen des Parameters

In g einsetzen: $L\left(-\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{3}\right)$ Lotfußpunkt des Ursprungs auf g

$|\overrightarrow{OL}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx \mathbf{0{,}577}$ Das ist der Abstand vom Ursprung.

Aufgaben

96. Berechnen Sie jeweils den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) $P(3|2|-4)$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\-4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

b) $P(2|0|0)$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

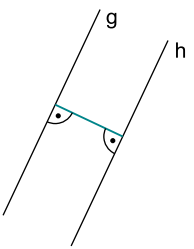
c) $P(0|0|1)$ und $g: \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

d) $P(0|0|0)$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$

97. Abstand paralleler Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\1\end{pmatrix}$.



a) Zeigen Sie, dass die Geraden echt parallel sind.

b) Berechnen Sie ihren Abstand, indem Sie dieses Abstandsproblem auf die Bestimmung des Abstands eines Punktes von einer Geraden zurückführen.

© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK