

TRAINING MATH

**MEHR
ERFAHREN**

Arnold · Schwarberg

Analytische Geometrie

Aufgaben mit Lösungen

Sek. II

STARK

Inhalt

Vorwort

Vektoren im \mathbb{R}^3

Punkte und Punktmenge	1
Gleichheit, Addition und Subtraktion von Vektoren	3
Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl	6
Teilverhältnisse	8
Mittelpunkt einer Strecke	8
Schwerpunkt eines Dreiecks	8
Beweise mit Hilfe der Vektorgeometrie	9
Lineare Abhängigkeit	11
Kollinearität	11
Komplanarität	12
Lineare Unabhängigkeit	12
Beweise mit Hilfe linear unabhängiger Vektoren	13
Skalarprodukt	14
Berechnung des Skalarprodukts	14
Betrag eines Vektors	15
Winkel zwischen Vektoren	16
Vermischte Aufgaben	17
Vektorprodukt	18
Berechnung des Vektorprodukts	18
Flächenberechnungen	20

Fortsetzung nächste Seite

Spatprodukt	20
Berechnung des Spatprodukts	20
Volumenberechnungen	21
Vermischte Aufgaben zu Vektoren im \mathbb{R}^3	22

Geraden im \mathbb{R}^3

Aufstellen von Geradengleichungen in Parameterform	25
Schnittpunkte von Geraden mit Koordinatenebenen bzw. Koordinatenachsen	27
Besondere Lage von Geraden im Koordinatensystem	28
Senkrechte Projektion von Geraden auf Koordinatenebenen	29
Spiegelung von Geraden an Koordinatenebenen bzw. Koordinatenachsen	29
Gegenseitige Lage zweier Geraden	30
Parallele und identische Geraden	30
Schnittpunkt von Geraden – windschiefe Geraden	31
Schnittwinkel zweier Geraden	33
Abstände	35
Abstand eines Punktes von einer Geraden	35
Abstand paralleler Geraden	36
Abstand windschiefer Geraden	37
Vermischte Aufgaben zu Geraden im \mathbb{R}^3	37

Ebenen im \mathbb{R}^3

Aufstellen von Ebenengleichungen in Parameterform	39
Normalengleichung einer Ebene	42
Umformungen Parameterform – Normalenform	43

Gegenseitige Lage zweier Ebenen, Schnittgerade	44
Parallele und identische Ebenen, Schnitt zweier Ebenen . . .	44
Schnittwinkel zweier Ebenen	46
Abstände	48
Abstand eines Punktes von einer Ebene	48
Abstand paralleler Ebenen	49
Vermischte Aufgaben zu Ebenen im \mathbb{R}^3	50

Gerade und Ebene

Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene	53
Parallelität und Inzidenz	53
Schnittpunkt von Gerade und Ebene	54
Projektionen	55
Senkrechte Projektion eines Punktes auf eine Ebene bzw.	
Gerade	55
Senkrechte Projektion einer Geraden auf eine Ebene	56
Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene	57
Abstand einer Geraden von einer Ebene –	
Abstand windschiefer Geraden	58

Vermischte Aufgaben aus allen Stoffgebieten	61
--	----

Lösungen	67
-----------------	----

Ebenen im \mathbb{R}^3

Aufstellen von Ebenengleichungen in Parameterform

151. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E auf, wenn die Ebene E parallel zu den Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist und durch den Punkt $A(1/2/-1)$ geht.

152. Gegeben sind die Punkte A, B und C. Stellen Sie (wenn möglich) eine Gleichung der Ebene E auf, die durch folgende Punkte geht.

a) $A(-1/2/3)$, $B(0/1/2)$, $C(4/2/1)$
Liegt der Punkt $P(0/1/2)$ auf der Ebene E?

b) $A(-2/0/0)$, $B(1/1/0)$, $C(0/1/2)$
Liegt der Punkt $P(3/0/-2)$ auf der Ebene E?

c) $A(1/2/1)$, $B(2/2/2)$, $C(0/2/0)$

153. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2 . Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die von g_1 und g_2 aufgespannt wird.

a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

154. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E auf, die durch die parallelen Geraden g_1 und g_2 festgelegt ist.

a) $g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad g_2: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad g_2: \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

155. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, die durch die Gerade g und den Punkt P ($P \notin g$) bestimmt ist.

a) $g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P(3/0/2)$

b) $g \equiv x_3$ -Achse, $P(1/2/2)$

156. Die Ebene H soll parallel zur Ebene E sein und den Punkt P enthalten. Stellen Sie eine Gleichung von H auf.

a) $E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P(-1/2/3)$

b) $E \equiv x_2x_3$ -Ebene, $P(1/2/2)$

157. Untersuchen Sie, ob durch folgende Angaben eindeutig eine Ebene F festgelegt ist. Geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung von F an.

a) $g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h: \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $g \subset F \wedge h \subset F$

b) $g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h: \bar{x} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $g \subset F \wedge h \subset F$

c) $g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h: \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $g \subset F \wedge h \subset F$

d) $g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h: \bar{x} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$
 $g \subset F \wedge h \subset F$

$$\text{e) } g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad P(-2/7/13)$$

$$g \subset F \quad \wedge \quad P \in F$$

$$\text{f) } A(2/4/2), B(3/6/4), C(1/2/0)$$

$$A \in F \quad \wedge \quad B \in F \quad \wedge \quad C \in F$$

158. Untersuchen Sie, ob die Punkte $A(1/0/4)$, $B(2/2/3)$, $C(-1/3/6)$ und $D(-2/1/7)$ in einer Ebene liegen.

159. Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass die Punkte A , B , C und D in einer Ebene liegen.

$$\text{a) } A(0/2/2), \quad B(1/5/\lambda - 1), \quad C(-1/1/3), \quad D(1/3/1)$$

$$\text{b) } A(1/2/1), \quad B(3/5/2), \quad C(0/1/1), \quad D(\lambda/\lambda + 1/\lambda - 1)$$

160. Überprüfen Sie, ob die Gerade g in der Ebene F liegt.

(Bestimmen Sie hierzu zwei beliebige Punkte von g und untersuchen Sie, ob diese Punkte in F liegen.)

$$\text{a) } F: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } F: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

161. In welchen Punkten schneidet die Ebene E die Koordinatenachsen?

$$\text{a) } E: \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK