TRAINING
MATHE

MEHR ERFAHREN

Arnold · Schwarberg

Analytische Geometrie

Aufgaben mit Lösungen

Sek. II

STARK

Inhalt

Fortsetzung nächste Seite

Geraden im R^3

Ebenen im R^3

Gerade und Ebene

Ebenen im R^3

Aufstellen von Ebenengleichungen in Parameterform

151. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E auf, wenn die Ebene E parallel zu den Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist und durch den Punkt A(1/2/–1) geht.

152. Gegeben sind die Punkte A, B und C. Stellen Sie (wenn möglich) eine Gleichung der Ebene E auf, die durch folgende Punkte geht.

a) A(–1/2/3), B(0/1/2), C(4/2/1)
Liegt der Punkt P(0/1/2) auf der Ebene E?

b) A(–2/0/0), B(1/1/0), C(0/1/2)
Liegt der Punkt P(3/0/–2) auf der Ebene E?

c) A(1/2/1), B(2/2/2), C(0/2/0)

153. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die von g_1 und g_2 aufgespannt wird.

a) $g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $g_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

154. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E auf, die durch die parallelen Geraden g_1 und g_2 festgelegt ist.

a) $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

155. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, die durch die Gerade g und den Punkt P ($P \notin g$) bestimmt ist.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ P(3/0/2)

b) $g \equiv x_3$-Achse, $\quad$ P(1/2/2)

156. Die Ebene H soll parallel zur Ebene E sein und den Punkt P enthalten. Stellen Sie eine Gleichung von H auf.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ P(–1/2/3)

b) $E \equiv x_2x_3$-Ebene, $\quad$ P(1/2/2)

157. Untersuchen Sie, ob durch folgende Angaben eindeutig eine Ebene F festgelegt ist. Geben Sie gegebenenfalls eine Gleichung von F an.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g \subset F \ \wedge \ h \subset F$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ h: $\vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g \subset F \ \wedge \ h \subset F$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$g \subset F \ \wedge \ h \subset F$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ h: $\vec{x} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$g \subset F \ \wedge \ h \subset F$

e) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ P(–2/7/13)

$g \subset F \quad \wedge \quad P \in F$

f) A(2/4/2), B(3/6/4), C(1/2/0)
$A \in F \quad \wedge \quad B \in F \quad \wedge \quad C \in F$

158. Untersuchen Sie, ob die Punkte A(1/0/4), B(2/2/3), C(–1/3/6) und D(–2/1/7) in einer Ebene liegen.

159. Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.

a) A(0/2/2), B(1/5/λ – 1), C(–1/1/3), D(1/3/1)

b) A(1/2/1), B(3/5/2), C(0/1/1), D(λ/λ + 1/λ – 1)

160. Überprüfen Sie, ob die Gerade g in der Ebene F liegt.
(Bestimmen Sie hierzu zwei beliebige Punkte von g und untersuchen Sie, ob diese Punkte in F liegen.)

a) F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

161. In welchen Punkten schneidet die Ebene E die Koordinatenachsen?

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$