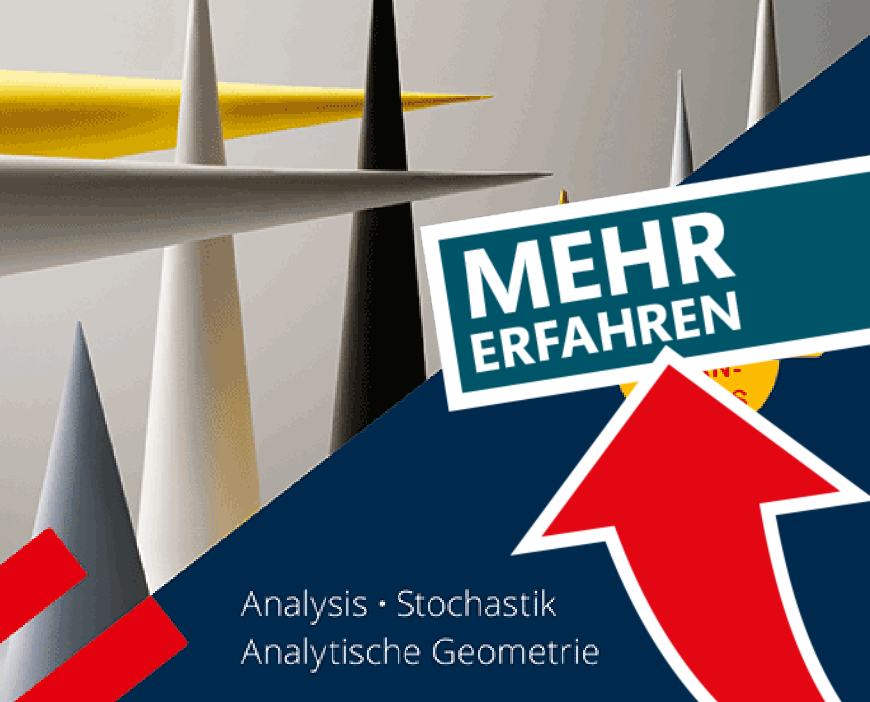


MEHR ERFAHREN

Analysis • Stochastik
Analytische Geometrie

Mathematik-KOMPAKT

FOS • BOS

STARK

MEHR ERFAHREN

Analysis • Stochastik

Analytische Geometrie

Mathematik-KOMPAKT

FOS • BOS

STARK

Inhalt

Autoren: Dieter Pratsch und Alfred Müller

Hinweis:
Die entsprechend gekennzeichneten Kapitel enthalten ein **Lernvideo**. An den jeweiligen Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann.
Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, beim Ansehen der Videos eine WLAN-Verbindung zu nutzen. Falls keine Möglichkeit besteht, den QR-Code zu scannen, sind die Lernvideos auch auffindbar unter:

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieser Band der Reihe KOMPAKT bietet Ihnen den für die Fachabiturprüfung an den bayerischen Fach- und Berufsoberschulen notwendigen Unterrichtsstoff. Die Analysis ist dabei für alle Ausbildungsrichtungen relevant, die Stochastik nur für die nichttechnischen Ausbildungsrichtungen und die Analytische Geometrie nur für die Ausbildungsrichtung Technik.

- Alle prüfungsrelevanten Inhalte des LehrplanPLUS werden **verständlich erklärt**. Somit wird das Wissen vermittelt, das für die Bearbeitung kompetenzorientierter Aufgaben erforderlich ist.
- Wichtige **Definitionen** und **Merksätze** sind hervorgehoben.
- Durch charakteristische und prägnante **Beispiele** aus der Schulpraxis wird der Unterrichtsstoff verdeutlicht.
- Viele **Schaubilder** und **Grafiken** veranschaulichen den Stoff zusätzlich.
- Die getrennten **Stichwortverzeichnisse** zur Analysis, Stochastik bzw. Analytischen Geometrie führen schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Zu ausgewählten Themen gibt es **Lernvideos** und **Animationen**, in denen wichtige Zusammenhänge dargestellt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann.
Eine Zusammenstellung aller Videos und Animationen ist über den nebenstehenden QR-Code abrufbar.

Somit ist dieses Buch ideal zum schnellen Nachschlagen von Begriffen, zur zeitsparenden Wiederholung von Unterrichtsstoff und zur intensiven Vorbereitung auf Schulaufgaben, schriftliche Leistungsnachweise und die Fachabiturprüfung.

Ihr

Dieter Pratsch

1 Ganzrationale Funktionen

In der Analysis werden als wesentliche Inhalte Funktionen, ihre Eigenschaften und ihre Anwendungen auf mathematische und außermathematische Probleme betrachtet.
Im Folgenden werden von der Definition der Funktion ausgehend grundlegende Begriffe geklärt und Verknüpfungen der Funktionen aus dem Katalog der Elementarfunktionen und die daraus gewonnenen Eigenschaften ganzrationaler Funktionen untersucht.

1.1 Grundbegriffe reeller Funktionen

Funktion
Eine **Funktion f** ordnet die Elemente einer Menge D_f **(Definitionsmenge)** eindeutig den Elementen einer Menge W_f **(Wertemenge)** zu.
Die Funktion heißt **reelle Funktion**, wenn D_f und W_f Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind, d. h. $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $W_f \subseteq \mathbb{R}$ gelten.

Man schreibt:

$f: x \mapsto f(x)$	Funktionszuordnung
$y = f(x)$	Funktionsgleichung
$f = \{(x \mid y) \mid x \in D_f \wedge y \in W_f \wedge y = f(x)\}$	Funktion

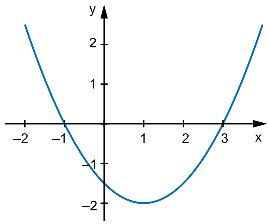
Die Variable $x \in D_f$ wird **unabhängige** Variable genannt. Die Variable y ist **abhängig** davon, was für x in den Funktionsterm f(x) eingesetzt wird und heißt **Funktionswert**. Die zusammengehörenden Paare $(x \mid y)$ kann man in ein rechtwinkliges (kartesisches) **Koordinatensystem** eintragen. Es ergibt sich der **Graph G_f** der Funktion f.

Beispiel

f: $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ bzw.

$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$, $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-2; \infty[$

Graph:



Anhand des Graphen klären wir weitere **Grundbegriffe**:

Schnittpunkte mit den Achsen
Schnittpunkte mit der **x-Achse (Nullstellen)**: $y = f(x) = 0$
Schnittpunkte mit der **y-Achse**: $x = 0$

Beispiel

Für die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ bedeutet dies:

1. $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \ \vee \ x = 3$

   Somit schneidet der Graph von f die x-Achse in den Punkten $N_1(-1\,|\,0)$, $N_2(3\,|\,0)$.

2. $y = f(0) = -\frac{3}{2}$

   Also schneidet der Graph von f die y-Achse im Punkt $T\left(0\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right)$.

1 Zufallsexperiment und Ereignis

1.1 Ergebnisraum eines Zufallsexperiments

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Stochastik beschäftigt sich mit der Erforschung zufälliger Erscheinungen, um aus ihnen Vorhersagen für die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens zu machen. Dazu wird eine Reihe von Grundbegriffen benötigt.
Es gibt viele Experimente, z. B. in der Physik, bei denen unter bestimmten Voraussetzungen das Ergebnis genau vorausgesagt werden kann. In der Stochastik gilt dagegen:

Zufallsexperiment und Ergebnisraum
Ein Experiment, bei dem der einzelne Ausgang nicht voraussagbar ist, heißt **Zufallsexperiment**. Jeder mögliche Ausgang des Zufallsexperiments heißt **Ergebnis ω**. Die Menge $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$ aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnisraum (Ergebnismenge)**, wobei $|\Omega|$, die **Mächtigkeit** des Ergebnisraumes, die Anzahl der möglichen Ergebnisse in Ω angibt.

Beispiel

Einmaliges Ziehen aus einer **Urne** mit acht gleichartigen Kugeln, von denen fünf rot (r), zwei schwarz (s) und eine grün (g) sind.
$\Omega = \{r; s; g\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 3$

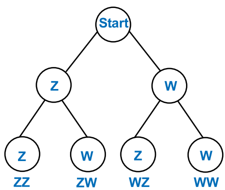
Dabei ist eine Urne als Zufallsgerät so beschaffen, dass sie Kugeln gleicher Größe und Beschaffenheit enthält, die sich nur durch ein Merkmal wie Farbe, aufgeschriebene Zahl etc. unterscheiden. Aus dieser Urne soll ein Ziehen so möglich sein, dass man erst nach dem Ziehen feststellen kann, welches Merkmal die Kugel trägt.

Mehrstufiges Zufallsexperiment und Baumdiagramm
Ein Zufallsexperiment heißt **mehrstufiges Zufallsexperiment**, wenn es aus mehreren Schritten besteht. Dabei können verschiedene Zufallsexperimente hintereinander oder ein einzelnes mehrmals ausgeführt werden. Mehrstufige Zufallsexperimente können mithilfe eines **Baumdiagramms** dargestellt werden.

Beispiel

1. Eine Münze wird zweimal hintereinander geworfen und die jeweils oben liegenden Seiten (Zahl Z oder Wappen W) werden als Paare angegeben. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und bestimmen Sie den Ergebnisraum.

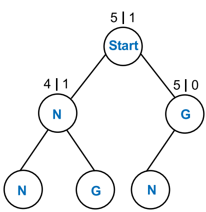
   Lösung:

   $\Omega = \{ZZ; ZW; WZ; WW\}$

2. Aus einem Lostopf mit einem Gewinnlos und fünf Nieten werden zwei Lose nacheinander gezogen. Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und bestimmen Sie den Ergebnisraum.

   Lösung:

   $\Omega = \{NN; NG; GN\}$

   Das Ergebnis GG ist nicht möglich.

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 Elementare Lösungsverfahren

Aus dem Mathematikunterricht der Mittelstufe sollte der Begriff des linearen Gleichungssystems zumindest in der Form von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten geläufig sein.

Eine Aussageform $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

mit reellen Koeffizienten a_{ij}, b_i und den reellen Unbekannten x_1 und x_2 heißt **lineares Gleichungssystem**, bestehend aus **zwei Gleichungen** mit **zwei Unbekannten**.

Auch die elementaren Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme, das Einsetzverfahren, das Gleichsetzverfahren und das Additionsverfahren, sollten bereits bekannt sein.
Diese werden im Folgenden noch einmal kurz dargestellt.

Beispiel

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

I $\quad 3x_1 - x_2 = 2$

II $\quad 5x_1 + 6x_2 = 11$

Einsetzverfahren

Beim Einsetzverfahren wird eine Gleichung nach einer Unbekannten aufgelöst und diese dann in die andere Gleichung eingesetzt.
In diesem Beispiel kann die erste Gleichung besonders einfach nach x_2 aufgelöst werden: $x_2 = 3x_1 - 2$. Eingesetzt in II:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6 \cdot (3x_1 - 2) &= 11 \\ 23x_1 - 12 &= 11 \\ 23x_1 &= 23 \\ x_1 &= 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \{(1|1)\} \end{aligned}$$

Gleichsetzverfahren

Beim Gleichsetzverfahren werden beide Gleichungen nach derselben Unbekannten aufgelöst und anschließend gleichgesetzt. Löst man beide Gleichungen nach x_2 auf, erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & x_2 = 3x_1 - 2 \\ \text{II} & x_2 = -\frac{5}{6}x_1 + \frac{11}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} 3x_1 - 2 &= -\tfrac{5}{6}x_1 + \tfrac{11}{6} \\ 3x_1 + \tfrac{5}{6}x_1 &= 2 + \tfrac{11}{6} \\ \tfrac{23}{6}x_1 &= \tfrac{23}{6} \\ x_1 &= 1 \quad \text{in I} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \{(1|1)\}$$

Additionsverfahren

Beim Additionsverfahren werden beide Gleichungen durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren so umgeformt, dass bei anschließender Addition (oder Subtraktion) eine Unbekannte eliminiert wird.

$$\left.\begin{array}{lrrl} 6 \cdot \text{I} & 18x_1 & -\,6x_2 & = 12 \\ \text{II} & 5x_1 & +\,6x_2 & = 11 \end{array}\right]+$$

$$\begin{array}{lrrl} & 23x_1 & & = 23 \\ & & x_1 & = 1 \quad \text{in I} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot 1 - x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad -x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad L = \{(1|1)\}$$

Anmerkung:
Das Ziel aller Verfahren ist es, die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten jeweils um eins zu reduzieren.

Für ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, gibt es eine **geometrische Veranschaulichung**. Jede der beiden Gleichungen beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, die Lösungsmenge gibt die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden an.

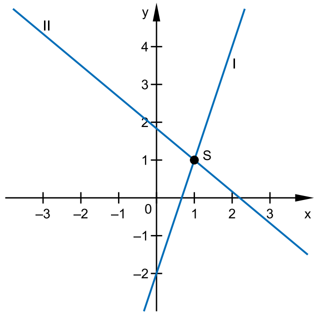
Beispiel

Im Beispiel von Seite 141 erkennt man diese geometrische Deutung besonders einfach an den nach x_2 aufgelösten Gleichungen beim Gleichsetzverfahren. Ersetzt man hier noch die Unbekannten x_2 durch y und x_1 durch x, so erhält man zwei Geradengleichungen in der üblichen Form $y = mx + t$, die eine grafische Veranschaulichung ermöglicht:

I $\quad y = 3x - 2$

II $\quad y = -\frac{5}{6}x + \frac{11}{6}$

Schnittpunkt $S(1\,|\,1)$



Für die Lage von zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ gibt es drei Möglichkeiten, denen jeweils eine spezifische Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems entspricht:

Die Geraden	Das lineare Gleichungssystem besitzt
• **schneiden sich** in einem Punkt;	• **genau eine** Lösung;
• sind **parallel**;	• **keine** Lösung;
• sind **identisch**.	• **unendlich viele** Lösungen.

© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK

© STARK Verlag

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK