

Abitur **MEHR
ERFAHREN**

Mathematik

FOS · BOS 12 Nicht

Fachabitur Bayern ab

Das musst du können!

passend zum
Lehrplan **PLUS**

STARK

Inhalt

Analysis

1 Ganzrationale Funktionen	1
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Quadratische Funktionen	1
1.3 Quadratische Ungleichungen	3
1.4 Quadratische Funktionen mit Parameter	5
1.5 Ganzrationale Funktionen 3. und 4. Grades	7
2 Differenzieren reeller Funktionen	13
2.1 Die Ableitung einer Funktion	13
2.2 Ableitungsregeln	14
2.3 Tangentengleichung	15
3 Elemente der Kurvendiskussion	16
3.1 Maximale Monotonieintervalle	16
3.2 Punkte mit waagrechter Tangente	17
3.3 Extrempunkte	20
3.4 Maximale Krümmungsintervalle	22
3.5 Wendepunkte	24
3.6 Aufstellen von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)	27
3.7 Optimierungsprobleme und Anwendungsaufgaben (Extremwertaufgaben)	29
4 Exponentialfunktionen und Logarithmen	32
4.1 Exponentialgleichungen	32
4.2 Exponentialfunktionen	33
4.3 Kurvendiskussion mit Exponentialfunktionen	35
4.4 Exponentielle Zunahme und Abnahme	38
5 Integralrechnung	40
5.1 Stammfunktion und unbestimmtes Integral	40
5.2 Bestimmtes Integral und Flächenberechnung	42

Stochastik


1	Zufallsexperimente	46
1.1	Ergebnisse und Ergebnisraum	46
1.2	Ereignisse	47
1.3	Verknüpfungen von zwei Ereignissen	48
2	Wahrscheinlichkeit	50
2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	50
2.2	Laplace-Experiment	51
2.3	Baumdiagramm und Pfadregeln	51
2.4	Vierfeldertafel der Wahrscheinlichkeiten	54
2.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit	56
2.6	Stochastische Unabhängigkeit	58
3	Kombinatorik	59
3.1	Allgemeines Zählprinzip	59
3.2	Binomialkoeffizient	60
4	Bernoulli-Ketten	62
5	Zufallsgrößen	65
5.1	Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung	65
5.2	Maßzahlen einer Zufallsgröße	67
5.3	Binomialverteilte Zufallsgrößen	69
6	Testen von Hypothesen	73
	Stichwortverzeichnis	79

Autor: Friedrich Schmidt

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Fachabitur in den nichttechnischen Ausbildungsrichtungen benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Fachabiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Vorbereitung auf das Fachabitur. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Fachabitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- An relevanten Stellen wird auf die **Merkhilfe**, die Ihnen als Erinnerungsstütze im Fachabitur dient, verwiesen.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Charakteristische und prägnante **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Die getrennten **Stichwortverzeichnisse** zur Analysis bzw. Stochastik führen schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Fachabiturprüfung!

Friedrich Schmidt

Friedrich Schmidt

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung FOS/BOS Bayern, Mathematik Nichttechnik 12. Klasse“ (Bestell-Nr. 92510).

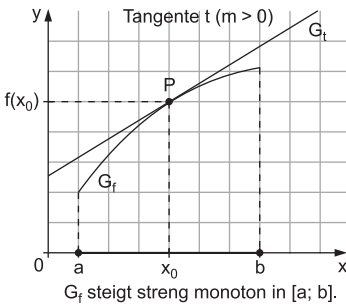
3 Elemente der Kurvendiskussion

3.1 Maximale Monotonieintervalle

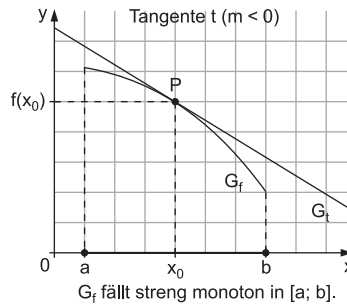
Die Monotonie beschreibt das Steigungsverhalten eines Funktionsgraphen. Es treten zwei mögliche Fälle auf:

Die Funktion f ist in einem Intervall $[a; b]$

streng monoton zunehmend.



streng monoton abnehmend.



In jedem beliebigen Kurvenpunkt $P(x_0; f(x_0))$ mit $x_0 \in]a; b[$ besitzt die Tangente an den Graphen von f eine positive Steigung ($m > 0$).

In jedem beliebigen Kurvenpunkt $P(x_0; f(x_0))$ mit $x_0 \in]a; b[$ besitzt die Tangente an den Graphen von f eine negative Steigung ($m < 0$).

Das Monotonieverhalten einer Funktion wird beschrieben durch die Zerlegung der Definitionsmenge in die größtmöglichen Intervalle, in denen der Graph der Funktion steigt oder fällt. Diese Intervalle sind die maximalen Monotonieintervalle der Funktion.

Monotoniekriterium (vgl. Merkhilfe)

$f'(x) > 0$ für alle x aus dem Intervall I

⇒ Die Funktion f ist streng monoton zunehmend in I .

Der Graph der Funktion f steigt streng monoton in I .

$f'(x) < 0$ für alle x aus dem Intervall I

⇒ Die Funktion f ist streng monoton abnehmend in I .

Der Graph der Funktion f fällt streng monoton in I .

Bestimmung der maximalen Monotonieintervalle

Vorgehensweise

Schritt 1: Berechnen der 1. Ableitung von f .

Schritt 2: Ermitteln der Bereiche, in denen die Funktion streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend ist, d. h. Lösen der Ungleichung $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$.

Schritt 3: Die Randstellen, die in der Definitionsmenge liegen, in die Monotonieintervalle einschließen. (Gültig für alle lehrplanrelevanten Funktionen.)



$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 1; \quad D_f = \mathbb{R}$$

Schritt 1:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

Schritt 2:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x > 1 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x < 1 \Leftrightarrow x < 2$$

Schritt 3:

f ist streng monoton zunehmend im Intervall $[2; \infty[$.

f ist streng monoton abnehmend im Intervall $] -\infty; 2]$.

3.2 Punkte mit waagrechter Tangente

Der Punkt $P(x_0; f(x_0))$ ist genau dann ein Punkt des Graphen von f mit waagrechter Tangente, wenn $f'(x_0) = 0$ gilt. x_0 heißt **Waagrechtstelle** der Funktion f .

Es gibt drei Arten von Punkten eines Graphen mit waagrechter Tangente. Sie unterscheiden sich darin, ob die Funktion an der zugehörigen Waagrechtstelle ihr Monotonieverhalten ändert oder nicht und, wenn ja, in welche Richtung sie das Monotonieverhalten ändert.

Art von Punkten mit waagrechter Tangente

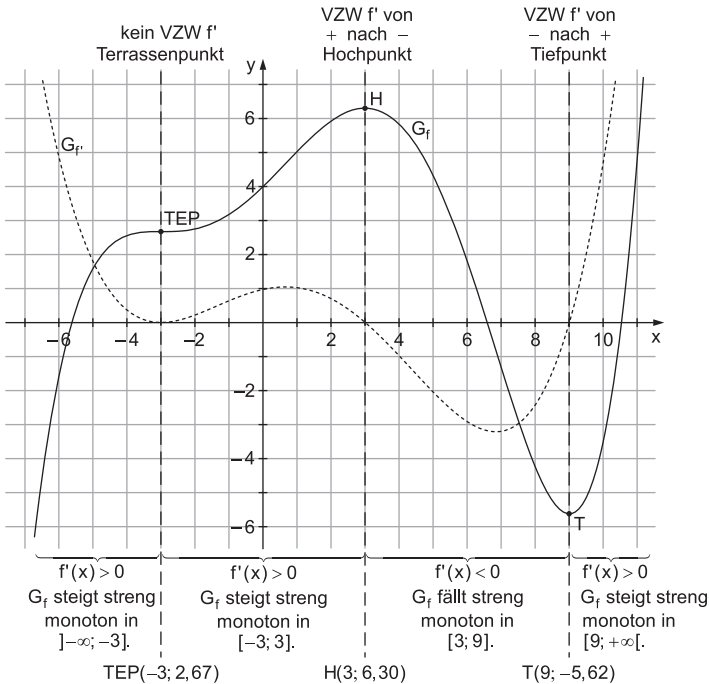
Ist x_0 eine Waagrechtstelle von f , so gilt:

f' hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$
 $\Rightarrow x_0$ ist **Maximalstelle**. Der Graph G_f hat den relativen **Hochpunkt** $H(x_0; f(x_0))$. Die Funktion f hat das relative Maximum $f(x_0)$.

f' hat an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$
 $\Rightarrow x_0$ ist **Minimalstelle**. Der Graph G_f hat den relativen **Tiefpunkt** $T(x_0; f(x_0))$. Die Funktion f hat das relative Minimum $f(x_0)$.

f' hat an der Stelle x_0 keinen Vorzeichenwechsel
 $\Rightarrow x_0$ ist **Terrassenstelle**. Der Graph G_f hat den **Terrassenpunkt** $TEP(x_0; f(x_0))$.

Merkregel: Wenn x_0 eine Nullstelle von f' mit gerader Vielfachheit ist, dann ist x_0 eine Terrassenstelle von f .



Ermittlung von Art und Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente

Vorgehensweise (Monotonieuntersuchung)

Schritt 1: Berechnen der 1. Ableitung von f .

Schritt 2: Ermitteln der Nullstellen der 1. Ableitung, d. h. Lösen der Gleichung $f'(x)=0$.

Schritt 3: Überprüfen, ob an den ermittelten Nullstellen jeweils ein Vorzeichenwechsel von f' vorliegt. Falls ja, mithilfe einer Skizze des Graphen von f' die Art des Vorzeichenwechsels bestimmen.

VZW von $+$ nach $-$: Maximalstelle

VZW von $-$ nach $+$: Minimalstelle

kein VZW: Terrassenstelle

Schritt 4: Berechnen der Funktionswerte von f an den ermittelten Nullstellen von f' ; Angeben der Art und Koordinaten der Punkte mit waagrechter Tangente.



$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3; D_f = \mathbb{R}$$

Schritt 1:

$$f'(x) = x^4 - x^2$$

Schritt 2:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0$$

Mit dem Satz vom Nullprodukt (Nullproduktregel) folgt:

$$x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 0; x_3 = 1; x_4 = -1$$

Schritt 3:

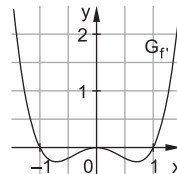
Da $x_{1,2} = 0$ eine doppelte Nullstelle von f' ist, liegt kein VZW vor.

Somit ist $x_{1,2} = 0$ eine Terrassenstelle von f .

Da $x_3 = 1$ und $x_4 = -1$ einfache Nullstellen von f' sind, liegt jeweils ein VZW vor.

$x_3 = 1$: f' hat einen VZW von $-$ nach $+$
Minimalstelle von f

$x_4 = -1$: f' hat einen VZW von $+$ nach $-$
Maximalstelle von f





© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK