MEHR ERFAHREN

TRAINING

Realschule

Mathematik 8. Klasse

Wahlpflichtfächergruppe II/III

STARK

Inhalt

Autoren:
Alexander Köppl, Wolfgang Becke (Kongruenzsätze) und Redaktion Stark Verlag

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Trainingsbuch für die Realschule kannst du den **gesamten Unterrichtsstoff der 8. Klasse Wahlpflichtgruppe II/III** trainieren, wiederholen und Lücken selbstständig schließen. Auch bei der Vorbereitung auf Stegreif- und Schulaufgaben kann dir dieses Buch behilflich sein. In den folgenden Schuljahren dient es dir zur Wiederholung.

Das Buch ist folgendermaßen aufgebaut:

- **Kurze Einführungen** schaffen motivierende Einstiege in die Themengebiete.
- In **Merkkästen** sind die wichtigsten Inhalte einprägsam zusammengefasst.
- Zahlreiche **Beispiele mit kleinschrittigen Lösungen und Hinweisen** veranschaulichen das zuvor Gelernte und beleuchten gegebenenfalls Sonderfälle.
- Über 240 abwechslungsreiche **Übungsaufgaben** dienen zur Festigung und Vertiefung des Wissens. Darunter befindet sich eine Vielzahl von vermischten Aufgaben, die das Trainieren von **themenübergreifenden Problemstellungen** ermöglichen.
- Mithilfe der **ausführlichen Lösungen** am Ende des Buches kannst du dich selbst kontrollieren. Die Hinweise und Tipps geben eine zusätzliche Hilfestellung und weisen ggf. auf Fehlerquellen hin.

Folgende Vorgehensweise hilft dir dabei nachhaltig zu lernen:

- Lies dir die Merkkästen und Beispiele eines Kapitels aufmerksam durch. Am besten rechnest du die Beispiele selbst nach.
- Löse dann selbstständig die Übungsaufgaben. Schaue bei Schwierigkeiten nicht in der Lösung nach, sondern gehe noch einmal die entsprechenden Merkkästen und Beispiele durch und versuche es erneut.
- Solltest du trotzdem nicht weiterkommen, schaue in der Lösung nach und merke dir, woran du gescheitert bist. Fehlerhaft gelöste Aufgaben, solltest du nach einigen Tagen nochmals rechnen.

Bei der Arbeit mit dem Buch wünsche ich dir viel Freude und anhaltenden Erfolg in der Schule.

Alexander Köppl

2 Addition und Subtraktion von Summentermen

Beim Vereinfachen längerer Summenterme wendet man das **Kommutativgesetz** an, wobei die Rechenzeichen plus und minus als Vorzeichen der nachfolgenden Zahlen bzw. Variablen aufgefasst werden.

Unter **Summentermen** versteht man Terme, die nur aus Summen bestehen.
Auch **Differenzen** können als Summenterme betrachtet werden:
Für a, b $\in \mathbb{Q}$ gilt: $\mathbf{a - b = a + (-b)}$

Lange Summenterme kann man folgendermaßen vereinfachen:

- Die einzelnen Summanden eines Summenterms dürfen unter **Mitnahme des Vorzeichens** untereinander beliebig umgestellt werden.
- Die **gleichartigen** Summanden eines Summenterms dürfen zusammengefasst werden.

Der Wert des Terms bleibt dabei **unverändert**.

Beispiel

$3x + 4y - 5x + 12y + 3x - 3x^2$ Suche gleichartige Terme und fasse sie zusammen.

$= 3x - 5x + 3x + 4y + 12y - 3x^2$ $1\,x = x$

$= 1x + 16y - 3x^2$ Sortiere die Variablen mit der größten Potenz nach vorne. Bei gleicher Potenz sortiere nach dem Alphabet.

$= -3x^2 + x + 16y$

Achte darauf, beim Vereinfachen nur gleichartige Terme zusammenzufassen. x^2 ist eine andere Variable als x! Auch 1 m und 1 m^2 kann man nicht zusammenfassen, denn Meter ist eine Längeneinheit und Quadratmeter eine Flächeneinheit.

Für die Addition und Subtraktion von Summentermen benötigt man die **Klammerregeln** zum Auflösen der Klammern:

- Steht ein „+“ vor der Klammer, kann man die Klammer weglassen.
  Für a, b, c $\in \mathbb{Q}$ gilt:

  $\mathbf{a + (b + c) = a + b + c}$ $\mathbf{a + (b - c) = a + b - c}$

- Steht ein „–“ vor der Klammer, kann man es weglassen, wenn man die Vorzeichen aller Summanden in der Klammer ändert. Für a, b, c $\in \mathbb{Q}$ gilt:

  $\mathbf{a - (b + c) = a - b - c}$ $\mathbf{a - (b - c) = a - b + c}$

Steht ein Faktor vor der Klammer, wird jeder Summand mit diesem Faktor multipliziert und anschließend addiert. Für a, b, c, d $\in \mathbb{Q}$ gilt:

$\mathbf{a + d \cdot (b + c) = a + d \cdot b + d \cdot c}$ $\mathbf{a + d \cdot (b - c) = a + d \cdot b - d \cdot c}$

$\mathbf{a - d \cdot (b + c) = a - d \cdot b - d \cdot c}$ $\mathbf{a - d \cdot (b - c) = a - d \cdot b + d \cdot c}$

Beispiele

1. $(167x^2 - 67x^3) + (253x + 47x^2)$
$= -67x^3 + \mathbf{167x^2} + \mathbf{47x^2} + 253x$
$= -67x^3 + \mathbf{214x^2} + 253x$

Auch wenn es so aussieht, als könne man innerhalb der Klammern vorteilhaft rechnen, dürfen nur gleichartige Terme zusammengefasst werden.

2. $-17(x+3) - x(x+2) + 15 + x^2$
$= -17x - 51 - x^2 - 2x + 15 + x^2$

Löse zuerst die Klammern auf. Beachte dabei die Minuszeichen vor den Klammern.

$= \mathbf{-17x} - 51 \mathbf{- x^2} \mathbf{- 2x} + 15 \mathbf{+ x^2}$
$= \mathbf{-x^2 + x^2} \mathbf{- 17x - 2x} - 51 + 15$

Wende das Kommutativgesetz an und stelle die gleichartigen Terme wie die Waggons eines Zuges um.

$= \mathbf{-19x} - 36$

Fasse gleichartige Terme zusammen.

3. Sind die beiden folgenden Terme äquivalent?
$T_1(x) = 2x^3 + 4x^2 + 10x + 11x^2 + 2x - x^3$
$T_2(x) = 22x - (-6x^3 - 2x^2) - (4x^2 + 3x - 5x^3) - (7x - 17x^2) + x^2$

Lösung:
Prüfe, ob $T_1(x) = T_2(x)$ gilt. Dazu werden die beiden Terme vereinfacht und anschließend verglichen:

$T_1(x) = \mathbf{2x^3} + \mathbf{4x^2} + 10x + \mathbf{11x^2} + 2x \mathbf{- x^3}$

Wenn du die gleichartigen Terme im Kopf zusammenfasst …

$\boxed{T_1(x) = \mathbf{2x^3 - x^3} + \mathbf{4x^2} + \mathbf{11x^2} + 10x + 2x \quad \text{Kopfrechnen!}}$

$T_1(x) = \mathbf{x^3} + \mathbf{15x^2} + 12x$

… sparst du dir Schreibarbeit.

$T_2(x) = 22x - (-6x^3 - 2x^2) - (4x^2 + 3x - 5x^3) - (7x - 17x^2) + x^2$
$T_2(x) = 22x \mathbf{+ 6x^3} + \mathbf{2x^2} - \mathbf{4x^2} - 3x \mathbf{+ 5x^3} - 7x + \mathbf{17x^2} + \mathbf{x^2}$
$T_2(x) = 22x \mathbf{+ 6x^3} - \mathbf{2x^2} - 3x \mathbf{+ 5x^3} - 7x + \mathbf{18x^2}$
$T_2(x) = \mathbf{11x^3} + \mathbf{16x^2} + 12x$

Wegen $T_2(x) = T_1(x) + 10x^3 + x^2$ ist $T_1(x) \neq T_2(x)$. Die beiden Terme sind also nicht äquivalent.

5 Löse die Klammern auf und fasse zusammen.

a) $x + (5y - 3x)$
b) $-(9x + 3y) + 7x$
c) $-3x^2 + (4x - 2y + 3x^2)$
d) $8x^2 + 2x - (y + 2x - 8x^2)$
e) $+(2x + 4x^2 + y) - (3x - 2y^2 + 3y)$
f) $2(3x + 5y) + 3(3x + 5y) + 6(3x + 5y)$
g) $3x(3x + 4y) - 11xy + 3x - x(x + y)$
h) $-[-(-3x + 4y - z) + (-3x + 4y - z)] - 4y - 4y^2$
i) $-5x(3x + 6y + 2) - 10x + 5y(y + 2x) - 20xy$
j) $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot 2x + 5 \cdot \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{5}x^2 - 4xy\right)$

6 Vereinfache so weit wie möglich.

a) $0{,}8x(1{,}2y+0{,}5x)-0{,}8x^2-0{,}04xy$ b) $3(x-3y)-2(-3x+y)$

c) $-(3x+5y)\cdot 4-4(x-2y)$ d) $2xy\cdot(3-4y+x)-2x\cdot(3y+5xy)$

7 Ergänze die Lücken, sodass auf beiden Seiten äquivalente Terme stehen.

a) $(4x+3y)+(7x+y)=\square\,x+\square$

b) $-(4x+8)+(5x-30)=\square\,x-\square+2x+10$

c) $5-3x=10-8x-(\square+\square\,x)$

d) $2(x+3)+3(y-1)=4x-\square\,x+\square+\square\,y$

e) $(12a-3b)-(\square)=15a+6b$

f) $2(3a-4b)-3(\square)=-9a-2b$

g) $-(3x+8+4y)+(14y+\square^3+3x)=\square\,x+\square-16-11y$

8 Hier wurden Terme umgeformt. Ergänze die Lücken so, dass alles korrekt ist.

a) $-5(x+7y)+\square\cdot(0{,}5x+1{,}5y)=-5x+\square+9x+\square=\square-\square$

b) $(2x-\square)-(\square-5y)=2x-\square-8x+5y=-6x+2y=2(\square+\square)$

c) $3a^2(a+\square)-\square\cdot(-a^2-2b)=\square-3a^2b^2+\square+6b^3=3(\square+2b^3)$

9 Tim und Tom sind Zwillinge und wollen zum gleichen Zeitpunkt mit ihrem Studium fertig sein.
Tim sagt: „Mein Alter bei Beendigung des Studiums erhält man, wenn man zu meinem Alter von vor sieben Jahren mein Alter in 3 Jahren addiert.
Tom sagt: „Ich werde dann doppelt so alt sein wie vor 2 Jahren.
Können beide recht haben? Zeige rechnerisch.

10 Kreuze alle Terme an, die zu $-(x+y)\cdot(-y)-(2x-y)$ äquivalent sind.

- ☐ $-xy+y^2-2x+y$
- ☐ $xy+y^2-2x+y$
- ☐ $x\cdot(y-2)+y\cdot(y+1)$
- ☐ $y\cdot(x-2)+y\cdot(y+1)$
- ☐ $y\cdot(y+x+1)-2x$
- ☐ $2x-y\cdot(y+x+1)$
- ☐ $y-2x+y\cdot(y+x)$
- ☐ $y^2-(2x-xy)+y$

3 Multiplikation von Summentermen

Bei der Multiplikation von Summentermen werden die Summanden paarweise multipliziert. Dabei ist vor allem auf die Vorzeichen zu achten.

Beim **Multiplizieren von Summentermen** wird jeder Summand der 1. Summe mit jedem Summanden der 2. Summe multipliziert und die so entstandenen Produkte werden addiert. Für a, b, c, d $\in \mathbb{Q}$ gilt:

$$\mathbf{(a+b)\cdot(c+d) = ac+ad+bc+bd}$$

$$\mathbf{(a-b)\cdot(c-d) = ac-ad-bc+bd}$$

$$\mathbf{(a+b)\cdot(c-d) = ac-ad+bc-bd}$$

$$\mathbf{(a-b)\cdot(c+d) = ac+ad-bc-bd}$$

Das „·" zwischen den Klammern kann auch wegfallen:
$(a+b)\cdot(c+d) = (a+b)(c+d)$

Hat die 1. Summe n und die 2. Summe m Summanden, so erhält man nach dem Ausmultiplizieren $n \cdot m$ Summanden.

Beispiele

1. $(2a+5)\cdot(4b+3)$
$= 2a\cdot 4b + 2a\cdot 3 + 5\cdot 4b + 5\cdot 3$
$= 8ab + 6a + 20b + 15$

Jeder Summand der 1. Klammer wird mit jedem Summanden der 2. Klammer multipliziert.

Die Ergebnisse werden addiert.

2. $(2a-5)\cdot(3b+4)$
$= [2a+(-5)]\cdot(3b+4)$
$= 2a\cdot 3b + 2a\cdot 4 + (-5)\cdot 3b + (-5)\cdot 4$
$= 6ab + 8a - 15b - 20$

Die Differenz 2a – 5 kann auch als Summe 2a + (–5) geschrieben werden.
Wendet man die obige Regel aus dem Merkkasten an, gelangt man sofort zur Darstellung in der letzten Zeile.

3. $(3x-7)\cdot(2x+5+y)$
$= 6x^2 + 15x + 3xy - 14x - 35 - 7y$
$= 6x^2 + 3xy + x - 7y - 35$

Auch für mehrgliedrige Summen gilt:
Jeder Summand der 1. Klammer wird mit jedem Summanden der 2. Klammer multipliziert.
Man erhält $2\cdot 3 = 6$ Summanden.

11 Vereinfache.

a) $(a-b)(b-a)$

b) $(8x+2{,}5y)\cdot(8x+2{,}5y)$

c) $(3x^2+y)(x-4y)$

d) $(-m-3n)(-n^2-3m)$

e) $\left(\frac{3}{5}x^2 - y + \frac{5}{2}xy\right)(20y^2 - xy)$

f) $\left(\frac{1}{6}k + t - 3\frac{1}{2}kt\right)\left(-15kt - k^2 + \frac{2}{7}\right)$

5 a) $x+(5y-3x)$
$=x+5y-3x$
$=\mathbf{-2x+5y}$

Die Klammer kann weggelassen werden, weil ein „+“ vor der Klammer steht. x steht für +1x.

Da die Summanden nicht gleichartig sind, lässt sich dieser Term nicht weiter vereinfachen.

b) $-(9x+3y)+7x$
$=-9x-3y+7x$
$=\mathbf{-2x-3y}$

Steht ein „–“ vor der Klammer, ändern sich die Vorzeichen aller Summanden.

c) $-3x^2+(4x-2y+3x^2)$
$=-3x^2+4x-2y+3x^2$
$=\mathbf{4x-2y}$

Die Klammer kann weggelassen werden, weil ein „+“ vor der Klammer steht.

d) $8x^2+2x-(y+2x-8x^2)$
$=8x^2+2x-y-2x+8x^2$
$=\mathbf{16x^2-y}$

Steht ein „–“ vor der Klammer, ändern sich die Vorzeichen aller Summanden.

e) $+(2x+4x^2+y)-(3x-2y^2+3y)$
$=2x+4x^2+y-3x+2y^2-3y$
$=-x+4x^2-2y+2y^2$
$=\mathbf{4x^2+2y^2-x-2y}$

Klammerregeln beachten.

Zusammenfassen gleicher Variable.

Ordne die Terme nach der größten Potenz.

f) $2(3x+5y)+3(3x+5y)+6(3x+5y)$
$=6x+10y+9x+15y+18x+30y$
$=\mathbf{33x+55y}$

Löse die Klammern mithilfe des Distributivgesetzes auf.

g) $3x(3x+4y)-11xy+3x-x(x+y)$
$=9x^2+12xy-11xy+3x-x^2-xy$
$=\mathbf{8x^2+3x}$

Löse die Klammern mithilfe des Distributivgesetzes auf und achte auf Minuszeichen vor der Klammer.

h) $-[-(-3x+4y-z)+(-3x+4y-z)]-4y-4y^2$
$=-[+3x-4y+z-3x+4y-z]-4y-4y^2$
$=-[0]-4y-4y^2$
$=\mathbf{-4y^2-4y}$

Löse zuerst die inneren Klammern auf.

Die Summanden innerhalb der Klammer addieren sich zu null.

Ordne nach der größten Potenz.

i) $-5x(3x+6y+2)-10x+5y(y+2x)-20xy$
$=-15x^2-30xy-10x-10x+5y^2+10xy-20xy$
$=\mathbf{-15x^2+5y^2-40xy-20x}$

Löse die Klammer mithilfe des Distributivgesetzes auf und achte auf das Minuszeichen vor der Klammer.

j) $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right)\cdot 2x+5\cdot\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{2}{5}x^2-4xy\right)$

$=\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y\right)\cdot 2x+5\cdot\left(\frac{1}{10}x^2+\frac{4}{10}x^2-4xy\right)$

$=-\frac{1}{2}x^2-xy+5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-4xy\right)$

$=-\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{5}{2}x^2-20xy$

$=\mathbf{2x^2-21xy}$

Die erste Klammer wird mit 2 Faktoren multipliziert. Hier wird die Klammer nacheinander mit beiden Faktoren multipliziert. Man hätte hier auch so rechnen können:

$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right)\cdot 2x$

$=-\frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right)$

$=-\frac{1}{2}x^2-xy$

6 a) $0{,}8x(1{,}2y+0{,}5x)-0{,}8x^2-0{,}04xy$ — Löse die Klammer auf.

$=0{,}96xy+0{,}4x^2-0{,}8x^2-0{,}04xy$ — Vereinfache.

$=-0{,}4x^2+0{,}92xy$

b) $3(x-3y)-2(-3x+y)$ — Löse die Klammern auf. Beachte die Vorzeichen.

$=3x-9y+6x-2y$ — Vereinfache.

$=\mathbf{9x-11y}$

c) $-(3x+5y)\cdot 4-4(x-2y)$ — Löse die Klammern auf.

$=-12x-20y-4x+8y$ — Vereinfache.

$=\mathbf{-16x-12y}$

d) $2xy\cdot(3-4y+x)-2x\cdot(3y+5xy)$ — Löse die Klammern auf.

$=6xy-8xy^2+2x^2y-6xy-10x^2y$ — Vereinfache.

$=\mathbf{-8x^2y-8xy^2}$ — xy^2 und x^2y können nicht zusammengefasst werden.

7 a) $(4x+3y)+(7x+y)=\mathbf{11}x+\mathbf{4y}$

b) $-(4x+8)+(5x-30)=\mathbf{-1}x-\mathbf{48}+2x+10$ — $-4x+5x=x=\mathbf{-1}x+2x$; $-8-30=-38=\mathbf{-48}+10$

c) $5-3x=10-8x-(\mathbf{5}+(\mathbf{-5})x)$ — $5=10-\mathbf{5}$; $-3x=-8x-(\mathbf{-5})x$

d) $2(x+3)+3(y-1)=4x-\mathbf{2}x+\mathbf{3}+\mathbf{3}y$ — $2x=4x-\mathbf{2x}$; $6-3=\mathbf{3}$

e) $(12a-3b)-(\mathbf{-3a-9b})=15a+6b$ — $12a-(\mathbf{-3a})=15a$; $-3b-(\mathbf{-9b})=6b$

f) $2(3a-4b)-3(\mathbf{5a-2b})=-9a-2b$ — $6a-3(\mathbf{5a})=-9a$; $-8b-3(\mathbf{-2b})=-2b$

g) $-(3x+8+4y)+(14y+(\mathbf{-2})^3+3x)=\mathbf{0}x+\mathbf{21y}-16-11y$ — $-8+(\mathbf{-2})^3=-16$; $-4y+14y=\mathbf{21y}-11y$

8 a) $-5(x+7y)+\mathbf{18}\cdot(0{,}5x+1{,}5y)=-5x+\mathbf{(-35y)}+9x+\mathbf{27y}=\mathbf{4x}-\mathbf{8y}$

b) $(2x-\mathbf{3y})-(\mathbf{8x}-5y)=2x-\mathbf{3y}-8x+5y=-6x+2y=2(\mathbf{-3x}+\mathbf{y})$

c) $3a^2(a+\mathbf{(-b^2)})-\mathbf{3b^2}\cdot(-a^2-2b)=\mathbf{3a^3}-3a^2b^2+\mathbf{3a^2b^2}+6b^3=3(\mathbf{a^3}+2b^3)$

9 Alter von Tim/Tom: x

Alter von Tim bei Beendigung des Studiums: $(x-7)+(x+3)=2x-4$

Alter von Tom bei Beendigung des Studiums: $2(x-2)=2x-4$

Da die Terme äquivalent sind, können die beiden recht haben.

10

☐ $-xy+y^2-2x+y$	☒ $xy+y^2-2x+y$
☒ $x\cdot(y-2)+y\cdot(y+1)$	☐ $y\cdot(x-2)+y\cdot(y+1)$
☒ $y\cdot(y+x+1)-2x$	☐ $2x-y\cdot(y+x+1)$
☒ $y-2x+y\cdot(y+x)$	☒ $y^2-(2x-xy)+y$

11 a) $(a-b)(b-a)$
$=ab-a^2-b^2+ba$
$=\mathbf{-a^2-b^2+2ab^2}$

Jeder Summand der 1. Klammer wird mit jedem Summanden der 2. Klammer multipliziert.
$ab=ba$

b) $(8x+2{,}5y)(8x+2{,}5y)$
$=8x\cdot8x+8x\cdot2{,}5y+2{,}5y\cdot8x+2{,}5y\cdot2{,}5y$
$=64x^2+20xy+20yx+6{,}25y^2$
$=\mathbf{64x^2+40xy+6{,}25y^2}$

Jeder Summand der 1. Klammer wird mit jedem Summanden der 2. Klammer multipliziert.
$20xy=20yx$

c) $(3x^2+y)(x-4y)$
$=3x^2\cdot x+3x^2\cdot(-4y)+y\cdot x+y\cdot(-4y)$
$=\mathbf{3x^3-12x^2y+xy-4y^2}$

Löse die Klammern auf. Achte dabei auf die Vorzeichen.

d) $(-m-3n)(-n^2-3m)$
$=mn^2+3m^2+3n^3+9mn$
$=\mathbf{3n^3+mn^2+3m^2+9mn}$

Ordne nach der größten Potenz.

e) $\left(\frac{3}{5}x^2-y+\frac{5}{2}xy\right)(20y^2-xy)$
$=12x^2y^2-\frac{3}{5}x^3y-20y^3+xy^2+50xy^3-\frac{5}{2}x^2y^2$
$=\mathbf{-\frac{3}{5}x^3y+50xy^3-20y^3+9{,}5x^2y^2+xy^2}$