TRAINING

Realschule

Mathematik 10. Klasse

Wahlpflichtfächergruppe II/III

STARK

Inhalt

Autoren: Susanne Angerer und Dietmar Steiner

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du den **gesamten Unterrichtsstoff** der **10. Klasse** in der **Realschule** (Wahlpflichtfächergruppe II/III) selbstständig wiederholen und dich so optimal auf Schulaufgaben und auf die Abschlussprüfung vorbereiten.

- **Alle Inhalte** der 10. Klasse werden erläutert und anhand von ausführlichen **Beispielen** veranschaulicht. **Kleinschrittige Hinweise** erklären dir die einzelnen Rechen- oder Denkschritte.
- **Zahlreiche Übungsaufgaben** mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad bieten dir die Möglichkeit, die verschiedenen Themen einzuüben. Hier kannst du überprüfen, ob du den gelernten Stoff auch anwenden kannst.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit **zusätzlichen Hinweisen**, die dir den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.

Besonders effektiv kannst du mit dem Buch arbeiten, wenn du dich an einer der beiden folgenden Vorgehensweisen orientierst:

- Bearbeite zu dem Thema, mit dem du dich beschäftigen möchtest, **zunächst den erklärenden Teil mit den Beispielen** und löse anschließend selbstständig die Übungsaufgaben. Schlage erst dann in den Lösungen nach, wenn du mit einer Aufgabe wirklich fertig bist! Solltest du mit einer Aufgabe gar nicht zurechtkommen, dann markiere sie und bearbeite zunächst die zugehörige Lösung. Versuche, die Aufgabe nach ein paar Tagen noch einmal selbstständig zu lösen.
- Alternativ kannst du damit beginnen, **einige Übungsaufgaben** in einem Kapitel zu lösen und danach deine Lösungen mit den angegebenen Lösungen zu vergleichen. Wenn alle Aufgaben richtig sind, bearbeitest du die weiteren Aufgaben des Kapitels. Bei Unsicherheiten oder Schwierigkeiten wiederholst du die entsprechenden Inhalte.

Wir wünschen dir gute Fortschritte bei der Arbeit mit diesem Buch und viel Erfolg in der Mathematik.

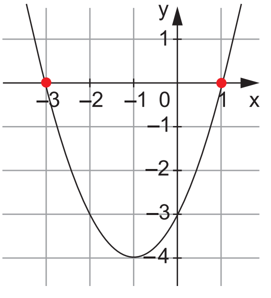
Susanne Angerer und Dietmar Steiner

Quadratische Gleichungen

Die Wasserstrahlen eines Brunnens folgen einem parabelförmigen Verlauf. Mithilfe von quadratischen Gleichungen kann man beispielsweise berechnen, wie breit das Brunnenbecken sein muss, damit es alle Wasserstrahlen am Boden wieder auffängt.

1 Reinquadratische Form

Quadratische Gleichungen werden unter anderem dazu verwendet, die **Nullstellen einer quadratischen Funktion** zu berechnen (d. h. die y-Koordinate hat den Wert 0). Auch die **Ermittlung von Schnittpunkten** einer Geraden und einer Parabel bzw. zweier Parabeln geschieht mithilfe einer quadratischen Gleichung.



Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$) nennt man **quadratische Gleichungen**.
Es gibt zwei Formen einer quadratischen Gleichung:
$b = 0$: $ax^2 + c = 0$ **reinquadratische Form**
$b \neq 0$: $ax^2 + bx + c = 0$ **gemischtquadratische Form**

Beispiele

1. $3x^2 - 4 = 0$
2. $x^2 = 5$
reinquadratische Form

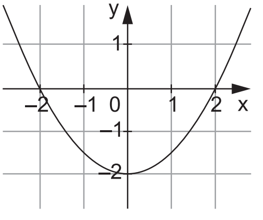
3. $2x^2 + 3x - 4 = 0$
4. $-\frac{1}{2}x^2 + 2x = -5$
gemischtquadratische Form

Bei der Ermittlung der Lösungen einer reinquadratischen Gleichung und bei der Berechnung der Nullstellen einer Parabel der Form $y = ax^2 + c$ gehst du wie folgt vor:

1. Stelle die **quadratische Gleichung** in der Form $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ auf.
2. Bringe die Gleichung durch äquivalentes Umformen **in die Form** $\mathbf{x^2 = d}$.
3. Bestimme die **Anzahl der Lösungen** (Nullstellen). Dabei können folgende Fälle auftreten:
   d > 0: zwei Lösungen bzw. zwei Nullstellen
   d = 0: eine Lösung bzw. eine Nullstelle
   d < 0: keine Lösung – keine Nullstelle
4. Berechne die Lösungen und gib die Lösungsmenge an.
   d > 0: zwei Nullstellen $\mathbb{L} = \{-\sqrt{d}; +\sqrt{d}\}$
   d = 0: eine Nullstelle $\mathbb{L} = \{0\}$
   d < 0: keine Nullstelle $\mathbb{L} = \varnothing$

Beispiele

1. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $0{,}5x^2 - 2 = 0$.



Lösung:

Schritt 1: Aufstellen der **quadratischen Gleichung**

$0{,}5x^2 - 2 = 0$

Schritt 2: **Umformen** der Gleichung

$\Leftrightarrow \quad 0{,}5x^2 = 2$ — äquivalentes Umformen

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x^2 = 4}$ — äquivalentes Umformen

Schritt 3: **Anzahl der Lösungen** bestimmen

$\mathbf{d > 0 \;\Rightarrow}$ **zwei Lösungen** — 2 Nullstellen

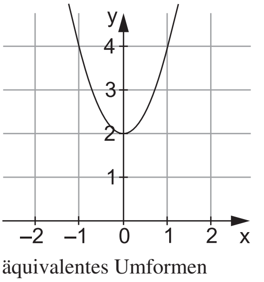
Schritt 4: **Ermittlung der Lösungen**

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4}$ — Ziehen der Quadratwurzel

$x_1 = 2 \vee x_2 = -2$

Angabe der Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-2; 2\}$

2. Untersuche, ob die Parabel p: $y = 2x^2 + 2$ Nullstellen besitzt.



Lösung:

Schritt 1: Aufstellen der **quadratischen Gleichung**

$2x^2 + 2 = 0$

Schritt 2: **Umformen** der Gleichung

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 = -2$ — äquivalentes Umformen

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x^2 = -1}$ — äquivalentes Umformen

Schritt 3: **Anzahl der Lösungen** bestimmen

$d < 0 \;\Rightarrow$ keine Lösung — keine Nullstelle

Schritt 4: **Ermittlung der Lösung**

$\mathbb{L} = \emptyset$

3. Berechne die Lösung der quadratischen Gleichung $(x+3)^2 - x = 5x + 9$.

Lösung:

Schritt 1: **Quadratische Gleichung**

$(x+3)^2 - x = 5x + 9$

Schritt 2: **Umformen** der Gleichung

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + 9 - x = 5x + 9$ — 1. binomische Formel

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 5x + 9 = 5x + 9$ — Zusammenfassen

$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x^2 = 0}$ — Zusammenfassen

Schritt 3: **Anzahl der Lösungen** bestimmen

$d = 0 \;\Rightarrow$ eine Lösung — eine Nullstelle

Schritt 4: **Ermittlung der Lösung**

$x = 0$

$\mathbb{L} = \{0\}$

41 Berechne die Nullstellen der Parabel p: $y = -1{,}5x^2 + 3$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

42 Bestimme rechnerisch die Lösung der Gleichung $5 - (x-3)^2 = 3(2x-1)$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

43 Ermittle die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $6x - (x+4)^2 = -2x - 16$.

44 Bestimme eine quadratische Gleichung, die die angegebene Lösungsmenge hat.

a) $\mathbb{L} = \{-4; +4\}$

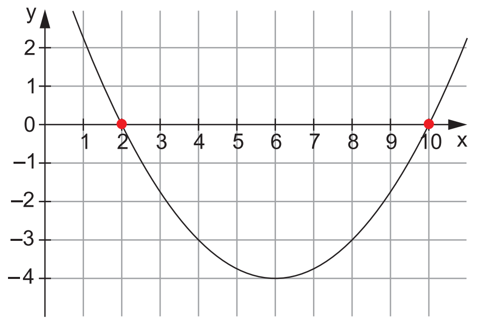
b) $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; +\sqrt{2}\}$

45 Ermittle durch Rechnung die Nullstellen der Parabel p: $y = 2x^2 - 2{,}5$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

46 Ermittle durch Rechnung die Nullstellen der Parabel p: $y = -2x^2 + 2$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

2 Gemischtquadratische Gleichungen

Um die Lösungsmenge einer gemischtquadratischen Gleichung (bzw. die Nullstellen der zugehörigen Parabel) zu ermitteln, muss die Gleichung in die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$ gebracht werden. Bei der Berechnung der Lösungen gehst du folgendermaßen vor:



1. Stelle die **quadratische Gleichung** der **allgemeinen Form** auf.
   Bei einer Parabelgleichung setzt du hierzu die y-Koordinate gleich 0.
   Du erhältst eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Bestimme die Anzahl der Lösungselemente (= Nullstellen) mithilfe der **Diskriminante D** $= b^2 - 4ac$. Folgende Fälle können auftreten:
   D > 0: zwei Lösungen bzw. Nullstellen x_1, x_2
   D = 0: eine Lösung bzw. Nullstelle x
   D < 0: keine Lösung bzw. Nullstelle
3. Berechne die Lösungselemente x mithilfe der **Lösungsformel** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, indem du die Werte für die Variablen a und b sowie den Wert für die Diskriminante D in die Formel einsetzt.

Beispiele

1. Bestimme die **Lösungsmenge** der Gleichung
$(3x - 3)^2 - 2(x + 2)^2 = x(x - 15) + 18$.

Lösung:

Schritt 1: Aufstellen der **quadratischen Gleichung**

$\Leftrightarrow$	$9x^2 - 18x + 9 - 2(x^2 + 4x + 4) = x(x - 15) + 18$	1., 2. binomische Formel
$\Leftrightarrow$	$9x^2 - 18x + 9 - 2x^2 - 8x - 8 = x^2 - 15x + 18$	Ausmultiplizieren
$\Leftrightarrow$	$\mathbf{6}x^2 \mathbf{- 11}x \mathbf{- 17} = 0$	Zusammenfassen

Schritt 2: **Diskriminantenwert** ermitteln

$D = (\mathbf{-11})^2 - 4 \cdot \mathbf{6} \cdot (\mathbf{-17})$

$D = 529$

Werte für die Variablen a, b und c in $D = b^2 - 4ac$ einsetzen

Anzahl der Lösungen:

D > 0 ⇒ zwei Lösungen

Schritt 3: **Berechnung der Lösungen**

$$x_{1,2} = \frac{-(-11) \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 6}$$

Werte für a, b in $x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2 \cdot a}$ einsetzen

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 23}{12}$$

$x_1 = 2{,}83 \vee x_2 = -1$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{2{,}83; -1\}$

2. Ermittle die **Nullstellen** der Parabel p: $y = -0{,}5x^2 - 2x - 2$.

Lösung:

Schritt 1: Aufstellen der **quadratischen Gleichung**

$\mathbf{-0{,}5}x^2 \mathbf{- 2}x \mathbf{- 2} = 0$

Schritt 2: **Diskriminantenwert** ermitteln

$D = (\mathbf{-2})^2 - 4 \cdot (\mathbf{-0{,}5}) \cdot (\mathbf{-2})$

$D = 0$

Werte für die Variablen a, b und c in $D = b^2 - 4ac$ einsetzen

Anzahl der Lösungen bestimmen

D = 0 ⇒ eine Lösung

eine Nullstelle

Schritt 3: **Berechnung der Lösungselemente**

$$x = \frac{-(-2)}{2 \cdot (-0{,}5)}$$

Werte für die Variablen a, b und die Diskriminante D in die Lösungsformel einsetzen

$x = -2$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{-2\}$

3. Überprüfe rechnerisch, ob die Parabel p: $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3{,}25$ **Nullstellen** besitzt.

Lösung:

Schritt 1: Aufstellen der **quadratischen Gleichung**

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3{,}25 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + 0{,}25 + 3{,}25 = 0$ — 1. binomische Formel

$\Leftrightarrow \quad x^2 + x + \mathbf{3{,}5} = 0$ — Zusammenfassen

Schritt 2: **Diskriminantenwert** ermitteln

$D = \mathbf{1}^2 - 4 \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{3{,}5}$

$D = -13$

Werte für die Variablen a, b und c in $D = b^2 - 4ac$ einsetzen

Anzahl der Lösungen bestimmen

D < 0 ⇒ keine Lösung

keine Nullstelle

Schritt 3: **Bestimmung der Lösungselemente**

$\mathbb{L} = \varnothing$

41 Schritt 1: Aufstellen der quadratischen Gleichung

$-1{,}5x^2 + 3 = 0$

Schritt 2: Umformen der Gleichung

$\Leftrightarrow \quad -1{,}5x^2 = -3$ äquivalentes Umformen

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 2$ äquivalentes Umformen

Schritt 3: Anzahl der Lösungen bestimmen

$d > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen 2 Nullstellen

Schritt 4: Ermittlung der Lösungen

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$ Ziehen der Quadratwurzel

$x_1 = 1{,}41 \vee x_2 = -1{,}41$

Angabe der Nullstellen:

$\mathbb{L} = \{-1{,}41;\ 1{,}41\}$

42 Schritt 1: Aufstellen der quadratischen Gleichung

$5 - (x-3)^2 = 3(2x-1)$

Schritt 2: Umformen der Gleichung

$\Leftrightarrow \quad 5 - (x^2 - 6x + 9) = 6x - 3$ 2. binomische Formel; ausmultiplizieren

$\Leftrightarrow \quad 5 - x^2 + 6x - 9 = 6x - 3$ Klammer auflösen

$\Leftrightarrow \quad -x^2 + 6x - 4 = 6x - 3$ zusammenfassen

$\Leftrightarrow \quad -x^2 = 1$ äquivalentes Umformen

$\Leftrightarrow \quad x^2 = -1$ äquivalentes Umformen

Schritt 3: Anzahl der Lösungen bestimmen

$d < 0 \Rightarrow$ keine Lösung keine Nullstellen

Schritt 4: Ermittlung der Lösung

$\mathbb{L} = \varnothing$

43 Schritt 1: Aufstellen der quadratischen Gleichung

$6x - (x+4)^2 = -2x - 16$

Schritt 2: Umformen der Gleichung

$\Leftrightarrow \quad 6x - (x^2 + 8x + 16) = -2x - 16$ 1. binomische Formel; ausmultiplizieren

$\Leftrightarrow \quad 6x - x^2 - 8x - 16 = -2x - 16$ Klammer auflösen

$\Leftrightarrow \quad -x^2 - 2x - 16 = -2x - 16$ zusammenfassen

$\Leftrightarrow \quad -x^2 = 0$ äquivalentes Umformen

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 0$ äquivalentes Umformen

Schritt 3: Anzahl der Lösungen bestimmen

$d = 0 \Rightarrow$ eine Lösung eine Nullstelle

Schritt 4: Ermittlung der Lösung

$\mathbb{L} = \{0\}$

44 a) $\mathbf{x^2 = 16}$

b) $\mathbf{x^2 = 2}$

45 Schritt 1: Aufstellen der quadratischen Gleichung

$2x^2 - 2{,}5 = 0$

Schritt 2: Umformen der Gleichung

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 = 2{,}5$ äquivalentes Umformen

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1{,}25$ äquivalentes Umformen

Schritt 3: Anzahl der Lösungen bestimmen

$d > 0 \quad \Rightarrow$ zwei Lösungen 2 Nullstellen

Schritt 4: Ermittlung der Lösungen

$x_{1,2} = \pm\sqrt{1,25}$ Ziehen der Quadratwurzel

$x_1 = 1{,}12 \vee x_2 = -1{,}12$

Angabe der Nullstellen:

$\mathbb{L} = \{-1{,}12;\ 1{,}12\}$

46 Schritt 1: Aufstellen der quadratischen Gleichung

$-2x^2 + 2 = 0$

Schritt 2: Umformen der Gleichung

$\Leftrightarrow \quad -2x^2 = -2$ äquivalentes Umformen

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1$ äquivalentes Umformen

Schritt 3: Anzahl der Lösungen bestimmen

$d > 0 \quad \Rightarrow$ zwei Lösungen 2 Nullstellen

Schritt 4: Ermittlung der Lösungen

$x_{1,2} = \pm\sqrt{1}$ Ziehen der Quadratwurzel

$x_1 = 1 \vee x_2 = -1$

Angabe der Nullstellen:

$\mathbb{L} = \{-1;\ 1\}$

47 Schritt 1: Aufstellen der quadratischen Gleichung

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 0$

$a = 1;\ b = -3;\ c = 2$ Variablenwerte a, b, c ablesen

Schritt 2: Diskriminantenwert ermitteln

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2;\ D = 1$ Werte für die Variablen a, b und c in $D = b^2 - 4ac$ einsetzen

Schritt 3: Anzahl der Lösungen bestimmen

$D > 0 \quad \Rightarrow$ zwei Lösungen zwei Nullstellen