MEHR ERFAHREN

TRAINING

Realschule

Mathematik 7. Klasse

Bayern

STARK

Inhalt

Fortsetzung siehe nächste Seite

Autor: Ingo Scharrer

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem **Mathematik** Trainingsbuch für die **Realschule** kannst du den **ganzen Unterrichtsstoff** der 7. Klasse selbstständig wiederholen. So kannst du dich optimal auf Klassenarbeiten bzw. Schulaufgaben vorbereiten oder verpassten Unterrichtsstoff nachholen.

- Alle relevanten Themen des Unterrichtsstoffs werden ausführlich dargestellt, dabei sind die **wichtigen Inhalte** zusammengefasst und hervorgehoben. Anhand von ausführlichen **Beispielen** wird der Unterrichtsstoff veranschaulicht und zusätzlich durch **kleinschrittige Hinweise** erklärt.
- Viele abwechslungsreiche **Übungsaufgaben** bieten dir die Möglichkeit, jedes Thema einzuüben. Durch das Lösen zahlreicher Aufgaben erarbeitest du den Unterrichtsstoff gründlich und kannst genau überprüfen, ob du das Thema ganz verstanden hast.
- Zu allen Aufgaben gibt es **vollständig vorgerechnete Lösungen**. Zusätzlich sind **Hinweise** angegeben, die dir die jeweiligen Schwierigkeiten oder den Lösungsansatz schülergerecht erklären.

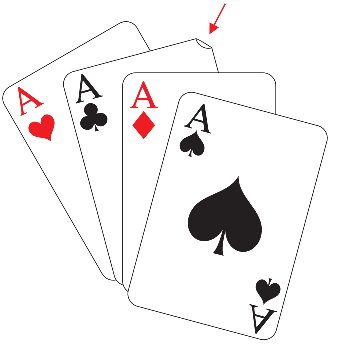
Du kannst mit dem Buch besonders **effektiv lernen**, wenn du dich an folgender Vorgehensweise orientierst:

- Bearbeite zunächst ein Kapitel bzw. Unterkapitel, indem du den Text liest, dir die Zusammenfassungen merkst und die Beispiele nachrechnest.
- Löse anschließend selbstständig die Übungsaufgaben, möglichst der Reihe nach. Dabei schaust du nicht in der Lösung nach, sondern löst die Aufgabe alleine.
- Wenn du bei einer Aufgabe nicht weiterkommst, so schaue im Kapitel nach. Wie sind dort die Beispiele gelöst? Kannst du die Lösungsansätze auf dein Problem übertragen?
- Erst wenn du mit einer Aufgabe wirklich fertig bist, schlägst du die Lösung nach und korrigierst deine Rechnung genau. Hast du alles richtig gemacht? Aufgaben, die du nicht richtig gelöst hast, solltest du in einigen Tagen nochmals rechnen.

Bei der Arbeit mit dem Buch wünsche ich dir gute Fortschritte und natürlich viel Erfolg in der Mathematik.

Ingo Scharrer

3 Laplace-Wahrscheinlichkeit



Der bisher geprägte Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit lehnt sich gemäß dem empirischen Gesetz der großen Zahlen stark an die relative Häufigkeit an bzw. kann erst durch sie bestimmt werden. Es gibt aber Experimente, für die man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses offenbar sofort angeben kann:
Die Wahrscheinlichkeit für das verdeckte Ziehen der „Herz-Ass" aus einer Hand mit 4 Assen beträgt $\frac{1}{4}$.
Doch ist dies nur unter der **Voraussetzung** richtig, dass das Ziehen der verschiedenen Asse **gleichwahrscheinlich** ist, denn offenbar wäre die Wahrscheinlichkeit eine andere, wenn die Karten gezinkt wären.

Pierre-Simon Laplace 1749–1827

Experimente, bei denen alle Elementarereignisse mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten, werden zu Ehren des Mathematikers Pierre-Simon Laplace, der sich am Hofe Napoleons mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und im Speziellen mit solchen Zufallsexperimenten beschäftigte, **Laplace-Experimente** genannt.
Gegenstände, mit denen Laplace-Experimente durchgeführt werden können, nennt man **ideal** oder bezeichnet sie mit dem Zusatz „Laplace", z. B. Laplace-Würfel.

Ein Experiment, bei dem alle Elementarereignisse die gleiche Chance haben, also **gleichwahrscheinlich** sind, heißt **Laplace-Experiment**.

Berechnung der **Laplace-Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis E:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl, der für das Ereignis } \textbf{günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller } \textbf{möglichen Ergebnisse}}$$

Die Laplace-Wahrscheinlichkeit wird als **Bruch**, **Dezimalbruch** oder **Prozentzahl** angegeben. Es gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$ bzw. $0\,\% \leq P(E) \leq 100\,\%$

Die Laplace-Wahrscheinlichkeit stimmt bei Laplace-Experimenten immer mit der statistischen Wahrscheinlichkeit überein, d. h. die relative Häufigkeit nähert sich bei einer großen Anzahl von Versuchen der Laplace-Wahrscheinlichkeit an.

Beispiele

1. Bei einem idealen Roulette ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel auf einer bestimmten Zahl liegenbleibt, für jede Zahl gleich.
Eine Roulette-Scheibe zeigt die Zahlen von 0 bis 36. Es gibt also 37 gleichwahrscheinliche Ausgänge.

$P(\text{„31“}) = \frac{1}{37}$

Es handelt sich bei „31“ um ein Elementarereignis mit nur einem günstigen Ergebnis.

$P(\text{„schwarz“}) = \frac{18}{37}$

Von den Zahlen 1 – 36 ist die Hälfte schwarz. Die 0 hat keine Farbe. Demnach gibt es 18 günstige Ergebnisse für „schwarz“.

$P(\text{„0 oder Zahl kleiner 10“}) = \frac{10}{37}$

Für das Ereignis „0 oder Zahl kleiner als 10“ sind die Zahlen 0 – 9 die günstigen Ergebnisse. Das sind 10 Zahlen (nicht 9!).

2. Beim Pferderennen gibt es die sogenannte Siegerwette, bei der man darauf wettet, dass ein bestimmtes Pferd als erstes das Ziel erreicht. Man kann ein Pferderennen als Versuch ansehen, bei dem zufällig ein Sieger ermittelt wird. Handelt es sich dabei um ein Laplace-Experiment?

Lösung:
Die Chance auf einen Sieg ist bei jedem Gespann verschieden, da jeweils verschiedene Voraussetzungen vorliegen:
Pferd, Taktik, Jockey, Tagesform …
Somit handelt es sich **nicht** um ein Laplace-Experiment.

222 Handelt es sich um ein Laplace-Experiment?

a) ideale Münze in die Luft werfen

b) ideale Münze aus 3 cm mit Kopf nach unten fallen lassen

c) Messung der Schwingungsdauer eines idealen Pendels

d) Fußballtoto: Wer wird deutscher Meister?

223 In einer Urne befinden sich 10 Kugeln mit den Zahlen von 1 bis 10.
Es wird eine Kugel gezogen.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel

a) die Zahl 10 zeigt?

b) die Zahl 1 zeigt?

c) eine Zahl zeigt, die gerade ist?

d) eine Zahl zeigt, die durch 3 teilbar ist?

e) eine Zahl zeigt, die eine Quadratzahl ist?

f) eine Zahl zeigt, die entweder nicht größer als 3 oder nicht kleiner als 7 ist?

224 In einem Korb liegen 4 Äpfel (3 rote und 1 grüner) und 3 Birnen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit

a) einen Apfel zu ziehen.

b) eine Birne zu ziehen.

c) einen roten Apfel zu ziehen.

d) einen grünen Apfel zu ziehen.

225 Peter schreibt eine zweistellige Zahl auf.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese

a) durch 10 teilbar?

b) eine Quadratzahl?

c) gerade?

226 Zeichne ein Laplace-Glücksrad, sodass gilt:

$P(„\text{rot}“) = \frac{1}{2}$ $P(„\text{blau}“) = \frac{1}{3}$ $P(„\text{gelb}“) = \frac{1}{6}$

227 Die Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ bei einem idealen Münzwurf beträgt 50 %.
Johanna hat eine Münze 3-mal fallengelassen und 3-mal zeigte sie „Kopf“.
Johanna hat beim Werfen nicht geschummelt und glaubt daher, dass die Münze nicht ideal ist. Warum ist diese Einschätzung nicht ausreichend begründet?
Wie könnte man herausfinden, ob die Münze ideal ist?

228 Welche Ereignisse sind beim einmaligen Werfen eines Laplace-Würfels zum Ereignis „1 oder 2“ gleichwahrscheinlich?

219 Individuell – mögliches Ergebnis:

Anzahl Würfe	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
Anzahl „Kopf“	**47**	**107**	**152**	**206**	**264**	**312**	**364**	**409**	**454**	**496**
relat. Häufigkeit	**0,47**	**0,54**	**0,51**	**0,52**	**0,53**	**0,52**	**0,52**	**0,51**	**0,50**	**0,50**

Formel in Zelle B12: =ZÄHLENWENN(B1:K10;1)

220 a) Nach dem empirischen Gesetz der großen Zahlen stabilisiert sich nach sehr vielen Versuchen die relative Häufigkeit, die Zahl „3“ zu werfen, um den Wert $\frac{1}{6}$. Nach dem empirischen Gesetz der großen Zahlen ist es also wahrscheinlicher, bei 6 000 Versuchen ca. 1 000-mal eine „3“ zu würfeln, als bei 60 Versuchen ca. 10-mal eine „3“.
Im Umkehrschluss ist es daher wahrscheinlicher, bei 60 Versuchen 20-mal eine „3“ zu werfen, als bei 6000 Versuchen 2000-mal eine „3“ zu werfen.

b) A und B sind gleich wahrscheinlich, also gilt: $h_{100\,000}(A) = h_{100\,000}(B)$
Da A, B und C die einzig möglichen Ergebnisse sind, handelt es sich dabei um Elementarereignisse, für die die Summe der relativen Häufigkeiten stets 1 ergibt. Demnach ist $h_{100\,000}(A) \neq 0{,}64 \neq h_{100\,000}(B)$, da sonst gelten würde:
$h_{100\,000}(A) + h_{100\,000}(B) + h_{100\,000}(C) > 1$

Somit muss $h_{100\,000}(C) = \mathbf{0{,}64}$ sein.
Nun lässt sich $h_{100\,000}(A) = h_{100\,000}(B)$ berechnen:

$$h_{100\,000}(A) = h_{100\,000}(B) = \frac{1 - 0{,}64}{2} = \mathbf{0{,}18}$$

221 a) Nach dem empirischen Gesetz der großen Zahlen gilt sehr wahrscheinlich:

$$h_{100\,000}(\heartsuit B) = h_{100\,000}(\heartsuit D) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$$h_{100\,000}(\text{„Herz”}) = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

b) Da Herz doppelt so oft vorkommt wie Pik, muss die Zahl auf der Pik-Karte doppelt so groß wie die Punktsumme der beiden Herz-Karten sein, also 10.
Lösung: **Pik-10**

222 a) **Ja.** Die Wahrscheinlichkeit für „Kopf“ und „Zahl“ ist jeweils gleich groß.

b) **Nein.** Es ist aufgrund der geringen Wurfhöhe und der Ausgangsposition davon auszugehen, dass die Kopfseite häufiger oben liegt.

c) **Nein.** Hier handelt es sich nicht um ein Zufallsexperiment, sondern um ein physikalisches Experiment, dessen Ausgang nicht vom Zufall abhängt.

d) **Nein.** Auch hier handelt es sich um kein Zufallsexperiment. Der Ausgang der Meisterschaft hängt von vielen Faktoren ab: Spielerkader, Verletzungen, Schiedsrichterentscheidungen …

223

a) $P = \frac{1}{10}$ — Es gibt nur 1 günstiges Ergebnis, die Kugel mit der Nummer 10.

b) $P = \frac{1}{10}$ — Es gibt nur 1 günstiges Ergebnis, die Kugel mit der Nummer 1.

c) $P = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ — günstige Ergebnisse: 2, 4, 6, 8, 10

d) $P = \frac{3}{10}$ — günstige Ergebnisse: 3, 6, 9

e) $P = \frac{3}{10}$ — günstige Ergebnisse: 1, 4, 9

f) $P = \frac{7}{10}$ — günstige Ergebnisse:
nicht größer als 3: 1, 2, 3
nicht kleiner als 7: 7, 8, 9, 10

224

a) $P = \frac{4}{7}$ — günstige Ergebnisse: 4 Äpfel

b) $P = \frac{3}{7}$ — günstige Ergebnisse: 3 Birnen

c) $P = \frac{3}{7}$ — günstige Ergebnisse: 3 rote Äpfel

d) $P = \frac{1}{7}$ — günstiges Ergebnis: 1 grüner Apfel

225

a) $P = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$ — Anzahl der möglichen Ergebnisse
Zahlen von 10 bis 99 (90 Möglichkeiten)
günstige Ergebnisse:
10, 20, 30, …, 90 (9 Möglichkeiten)

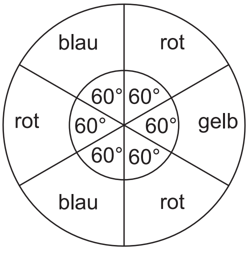
b) $P = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$ — günstige Ergebnisse:
16, 25, 36, 49, 64, 81 (6 Möglichkeiten)

c) $P = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$ — günstige Ergebnisse:
10, 12, 14, …, 98 (45 Möglichkeiten)

226 $P(\text{„rot“}) = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

$P(\text{„blau“}) = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

$P(\text{„gelb“}) = \frac{1}{6}$



Unterteile das Glücksrad in sechs gleich große Kreissektoren (Winkel: 360° : 6 = 60°) und beschrifte entsprechend der Wahrscheinlichkeiten. Die Lage der Farb-Sektoren ist dabei frei wählbar.

227 3 Würfe sind nicht ausreichend, um ihre Einschätzung zu begründen, da hier die Wahrscheinlichkeit noch relativ hoch ist, dass auch bei einer idealen Münze 3-mal hintereinander „Kopf“ erscheint.
Um herauszufinden, ob die Münze ideal ist, müsste Johanna sehr viele Würfe machen (z. B. 1 000 Stück). Sind die relativen Häufigkeiten für „Kopf“ und „Zahl“ dann annähernd gleich (beide 0,5), ist die Münze ideal, andernfalls nicht.

228 Alle Ereignisse E mit 2 verschiedenen Augenzahlen als günstige Ergebnisse (z. B.: „1 oder 3“; „1 oder 4“; „5 oder 6“) sind gleich wahrscheinlich, denn für alle diese gilt:

$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = P(\text{„1 oder 2“})$

229 a) Aus dem Diagramm kann man ablesen:
$h_n(\text{rot})$ stabilisiert sich um 0,8.
$h_n(\text{schwarz})$ stabilisiert sich um 0,2.

Nach dem empirischen Gesetz der großen Zahlen ist die Wahrscheinlichkeit hoch, dass P(„rot“) = 0,8 und P(„schwarz“) = 0,2 gilt. Es folgt:

$$P(\text{„rot“}) = \frac{\text{Anzahl rote Kugeln}}{\text{Anzahl Kugeln}} = \frac{a_r}{20} = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad a_r = 20 \cdot 0{,}8 = 16$$

$$P(\text{„schwarz“}) = \frac{\text{Anzahl schwarze Kugeln}}{\text{Anzahl Kugeln}} = \frac{a_s}{20} = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad a_s = 20 \cdot 0{,}2 = 4$$

Wahrscheinlich sind also von den 20 Kugeln **16 Kugeln rot** und **4 Kugeln schwarz**.