GYMNASIUM

TRAINING

MATHEMATIK

Grundwissen

Geometrie 10. Klasse

STARK

Inhalt

Autor: Magnus Semmelbauer

4 Sinus- und Kosinusfunktion

Mithilfe des Bogenmaßes lassen sich die bereits aus der 9. Klasse bekannten Zuordnungen der Sinusfunkton $\alpha \mapsto \sin\alpha$ und Kosinusfunktion $\alpha \mapsto \cos\alpha$ auf die Grundmenge der reellen Zahlen übertragen.
Die Ähnlichkeit der beiden Funktionen resultiert aus dem bekannten Zusammenhang $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ und $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.
Dieser Zusammenhang lautet dann entsprechend im Bogenmaß:
$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
Dies beobachtet man am einfachsten an den Funktionsgraphen:
Der Graph der Kosinusfunktion ist der um $\frac{\pi}{2}$ in negative x-Richtung („nach links") verschobene Graph der Sinusfunktion.

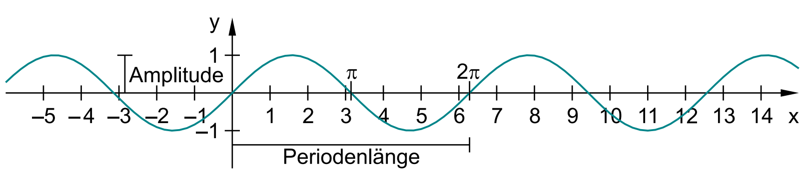
Über der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ werden folgende trigonometrische Funktionen definiert:

Sinusfunktion
Die Zuordnungsvorschrift lautet **f: $x \mapsto \sin x$**.
Für die Definitionsmenge gilt **$D = \mathbb{R}$** und für die Wertemenge **$W = [-1; 1]$**.

Wichtige Werte der Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f(x) = \sin x$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0

Funktionsgraph:

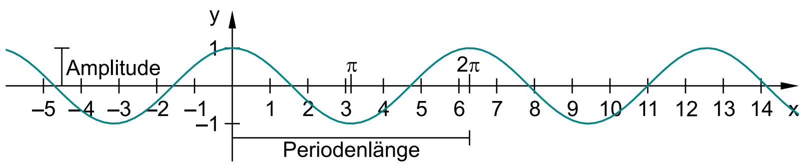


Kosinusfunktion
Die Zuordnungsvorschrift lautet $\mathbf{f\colon x \mapsto \cos x}$.
Für die Definitionsmenge gilt $\mathbf{D = \mathbb{R}}$ und für die Wertemenge $\mathbf{W = [-1; 1]}$.

Wichtige Werte der Wertetabelle:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$f(x) = \cos x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Funktionsgraph:



Die beiden hier vorliegenden Graphen sind periodische Kurven, d. h., die Funktionswerte der Sinus- und der Kosinusfunktion wiederholen sich in regelmäßigen Abständen, den sogenannten **Perioden**. Diese beiden Funktionen besitzen jeweils die Periodenlänge 2π.
Unter dem Begriff **Amplitude** versteht man den „Ausschlag" der periodischen Funktion in y-Richtung. Diese ist direkt an der Wertemenge ablesbar bzw. mithilfe der folgenden Formel sehr leicht zu errechnen:

$W = [a; b] \quad \Rightarrow \quad \text{Amplitude: } \frac{b-a}{2}$

Beispiele

1. Bestimme die Amplitude für
   a) die Sinus- und Kosinusfunktion,
   b) eine periodische Funktion mit der Wertemenge $W = [-9; -0{,}5]$.

   Lösung:
   a) Die Sinus- und Kosinusfunktion besitzen die Wertemenge $W = [-1; 1]$.
   Daher gilt für die Amplitude:
   $\frac{1-(-1)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

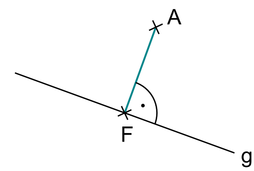
   b) Für die Amplitude gilt:
   $\frac{-0{,}5-(-9)}{2} = \frac{8{,}5}{2} = 4{,}25$

Abstand

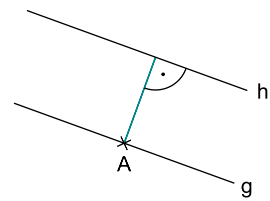
Der Abstand ist die kürzeste Entfernung zweier Objekte.

Beispiele:

- Abstand der Punkte A und B: Länge der Strecke [AB]
- Abstand von Punkt A und Gerade g: Länge der Strecke [AF], wobei F der Lotfußpunkt ist.

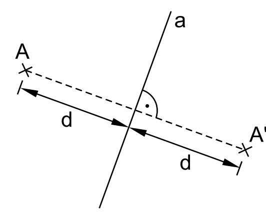


- Abstand der parallelen Geraden g und h: Länge der Strecke von einem beliebigen Punkt A auf g zum Lotfußpunkt des Lotes von A auf h.



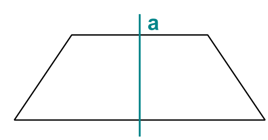
Achsensymmetrie

Zwei Punkte A und A' sind symmetrisch bezüglich der Symmetrieachse a, wenn die Verbindungsstrecke der Punkte senkrecht auf der Achse a steht und von ihr halbiert wird.



Achsensymmetrisches Trapez

Ein Trapez, das achsensymmetrisch zur Mittelsenkrechten einer der parallelen Seiten ist, heißt achsensymmetrisches Trapez.



Eigenschaften:

- Die Schenkel sind gleich lang.
- Die Diagonalen sind gleich lang.
- Die beiden an einer der parallelen Seiten anliegenden Winkel sind gleich groß.

Ähnlichkeit

Zwei Figuren sind zueinander ähnlich, wenn eine Figur durch eine zentrische Streckung aus der anderen Figur hervorgeht.

Ähnlichkeitssätze

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich,

- falls sie in zwei (und damit wegen der Innenwinkelsumme in drei) Winkeln übereinstimmen. **WW-Satz**
- falls die Längenverhältnisse entsprechender Seiten übereinstimmen. **S : S : S-Satz**
- falls das Verhältnis zweier Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen. **S : W : S-Satz**

Bogenmaß

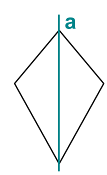
Unter dem Bogenmaß versteht man das Verhältnis $\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Kreisradius}}$ eines Kreises.
Im Einheitskreis gilt:
Umrechnung:

$$b = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$$

$$\alpha = \frac{b}{\pi} \cdot 180°$$

Drachenviereck

Ein Viereck, bei dem eine Diagonale Symmetrieachse ist, heißt Drachenviereck.



Eigenschaften:

- Je zwei Seiten, deren gemeinsamer Endpunkt auf der Symmetrieachse liegt, sind gleich lang.
- Die Symmetrieachse ist Winkelhalbierende der beiden entsprechenden Winkel; die beiden anderen Winkel sind gleich groß.
- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander, wobei die eine der beiden von der anderen halbiert wird.

Dreieck

Die gängigen Bezeichnungen im Dreieck findest du in nebenstehender Abbildung. Die Summe der Innenwinkel (hier: α, β, γ) beträgt 180°.