MEHR ERFAHREN

Algebra · Stochastik · Geom

Mathematik-KOMPAKT

Gymnasium 5.–10. Klasse

STARK

MEHR ERFAHREN

Algebra • Stochastik • Geom

Mathematik-KOMPAKT

Gymnasium 5. – 10. Klasse

STARK

Inhalt

Autor: Alfred Müller

Hinweis:

Die entsprechend gekennzeichneten Kapitel enthalten ein **Lernvideo**. An den jeweiligen Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann.

Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, beim Ansehen der Videos eine WLAN-Verbindung zu nutzen. Falls keine Möglichkeit besteht, den QR-Code zu scannen, sind die Lernvideos auch auffindbar unter:

http://qrcode.stark-verlag.de/900168V

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Buch bietet eine knappe und dabei ausreichende Zusammenstellung der mathematischen Inhalte der **Klassenstufen 5 bis 10 am Gymnasium** und gliedert sich in die drei Bereiche **Algebra, Stochastik** und **Geometrie**. Wichtige Begriffe und Definitionen stehen dir schnell und übersichtlich zur Verfügung, weshalb sich das Buch sowohl für deinen Schulalltag als auch zur effektiven Vorbereitung auf Klassenarbeiten eignet.

- Wichtige **Definitionen, Rechenregeln** und **Sätze** sind deutlich hervorgehoben.
- **Konstruktionen** werden anschaulich Schritt für Schritt beschrieben.
- Charakteristische **Beispiele** verdeutlichen die jeweiligen Stoffinhalte.
- Das ausführliche **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweils gesuchten Begriff.

Zu ausgewählten Themen gibt es **Lernvideos** und **Animationen**, in denen wichtige Zusammenhänge dargestellt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann. Eine Zusammenstellung aller Videos und Animationen ist über den nebenstehenden QR-Code abrufbar.

Der gesamte Unterrichtsstoff in diesem Buch gilt als **Grundlage** für die Mathematik in der Oberstufe.

Ich wünsche dir viel Erfolg bei deinen weiteren Prüfungen.

Alfred Müller

1 Zahlenmengen und Rechenregeln

Die Grundlage jeglicher Mathematik ist das Rechnen mit Zahlen, wobei die Rechnungen bestimmten Regeln folgen müssen, damit gleiche Rechnungen auf gleiche Ergebnisse führen.

1.1 Zahlenmengen

Zahlen werden in der Mathematik unterschiedlich gebraucht und benannt. Sie werden zum Zählen und Anordnen verwendet, können positiv oder negativ sein, als Brüche oder Dezimalzahlen geschrieben werden usw.

Natürliche Zahlen
Die natürlichen Zahlen (einschließlich der Zahl 0) bilden die Menge $\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$. Es gilt: $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$.

Man kann sie am **Zahlenstrahl** darstellen.

Beispiel

Um nicht unendlich viele Zahlwörter und Zahlzeichen einführen zu müssen, haben die alten Inder die **Stellenschreibweise** eingeführt, d. h., eine Ziffer hat in einem solchen **Stellenwertsystem** unterschiedliche Werte, je nachdem an welcher Stelle sie in der Zahl steht und zu welcher Stufenzahl (Potenzen einer natürlichen Zahl größer 1) sie gehört.
Das in der Schule übliche Stellenwertsystem ist das **Zehnersystem** oder **Dezimalsystem**. Es hat die zehn Ziffern 0, 1, …, 9 und die Stufenzahlen $1 = 10^0$, $10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1\,000 = 10^3$, …

Beispiel

Beispielsweise bedeuten die Ziffern in 8 282:
$8 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 1$

Ganze Zahlen

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist die Vereinigung der Menge der natürlichen Zahlen mit der Menge ihrer **Gegenzahlen** (negative ganze Zahlen).

Sie können auf der **Zahlengeraden** dargestellt werden.

Beispiel

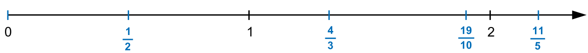
Bruchzahlen/gemeine Brüche

Die Menge $\mathbb{Q}_0^+$ der Bruchzahlen enthält alle

- Brüche der Form $\frac{p}{q}$, wobei p und $q \neq 0$ natürliche Zahlen sind, z. B. $\frac{3}{7}$,
- **endlichen Dezimalbrüche**, z. B. $0{,}4 = \frac{2}{5}$,
- **periodischen Dezimalbrüche**, z. B. $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$.

Sie können auf dem Zahlenstrahl dargestellt werden.

Beispiel

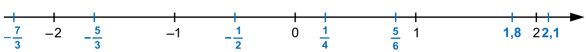


Rationale Zahlen

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Vereinigung der Bruchzahlen mit der Menge der (negativen) Gegenzahlen der Bruchzahlen.

Sie können auf der Zahlengeraden dargestellt werden.

Beispiel



4 Einfache Zufallsexperimente

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist eigentlich aus der Betrachtung von Glücksspielen entstanden. Glücksspiele beruhen auf dem Zufall, so kann man z. B. beim „Mensch-ärgere-dich-nicht“ erst dann beginnen, wenn man eine 6 gewürfelt hat. Wie wahrscheinlich ist es, bereits nach dem ersten Wurf beginnen zu können?
Heute spielt der Zufall, d. h. die Wahrscheinlichkeitsbetrachtung, in allen Gebieten des täglichen Lebens eine große Rolle. Da man den Zufall nicht beherrschen kann, wird im Folgenden versucht, die Möglichkeiten für das Auftreten eines bestimmten Ergebnisses abzuschätzen.

4.1 Ergebnis- und Ereignismenge

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit der Erforschung zufälliger Erscheinungen, um aus ihnen Vorhersagen für die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens zu machen.

Zufallsexperiment
Ein Experiment, bei dem der einzelne Ausgang nicht voraussagbar ist, heißt **Zufallsexperiment**. Jeder mögliche Ausgang des Zufallsexperiments heißt **Ergebnis ω**. Die Menge $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n\}$ aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments heißt **Ergebnismenge**, wobei $|\Omega|$ die Anzahl der möglichen Ergebnisse in Ω angibt. $|\Omega|$ nennt man auch die **Mächtigkeit** der Ergebnismenge.

Beispiel

Eine Münze wird einmal geworfen. Aus wie vielen Ergebnissen besteht die Ergebnismenge dieses Zufallsexperiments?

Lösung:
$\Omega = \{\text{Wappen}; \text{Zahl}\} \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 2$
Die Ergebnismenge besteht aus 2 Ergebnissen.

Nicht immer interessiert man sich für alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments.

Ereignis
Jede Teilmenge der endlichen Ergebnismenge Ω heißt **Ereignis A**, d. h. $A \subseteq \Omega$. Die Menge aller Ereignisse heißt **Ereignismenge $P(\Omega)$**.
Hat die Ergebnismenge Ω die Mächtigkeit n, d. h. $|\Omega| = n$, dann hat die Ereignismenge $P(\Omega)$ die Mächtigkeit $\boldsymbol{|P(\Omega)| = 2^n}$.

Besondere Ereignisse:

- $A = \{\ \}$ **unmögliches Ereignis**
- $A = \Omega$ **sicheres Ereignis**
- $A = \{\omega\}$ **Elementarereignis** (enthält nur ein Element!)
- $\overline{A}$ **Gegenereignis** zu A (enthält alle Elemente, die nicht zu A gehören)

Beispiel

Ein Würfel wird geworfen.
Stelle die Ereignisse A: „Augenzahl gerade“ und B: „Augenzahl > 3“ sowie das Gegenereignis zu A als Mengen dar.

Lösung:
Mit $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ergibt sich:
Ereignis A: „Augenzahl gerade“ $\Rightarrow$ $A = \{2; 4; 6\}$
Ereignis $\overline{A}$: „Augenzahl ungerade“ $\Rightarrow$ $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$
Ereignis B: „Augenzahl > 3“ $\Rightarrow$ $B = \{4; 5; 6\}$

Zwei **Ereignisse** A und B einer Ereignismenge $P(\Omega)$ lassen sich auf verschiedene Weisen miteinander **verknüpfen**. Die Verknüpfungen und ihre Darstellungen werden anhand eines Beispiels erläutert.

Beispiel

Ein Würfel wird einmal geworfen und die Augenzahl festgestellt. Betrachtet werden die Ereignisse A: „Augenzahl gerade“, d. h. $A = \{2; 4; 6\}$, und B: „Augenzahl prim“, d. h. $B = \{2; 3; 5\}$.
Bilde $A \cap B$ **(A geschnitten B)** und $A \cup B$ **(A vereinigt B)**.

6 Ebene Geometrie

Mit den Hilfsmitteln Zirkel, Lineal und Geodreieck können Eigenschaften und gegenseitige Beziehungen von geometrischen Formen untersucht sowie Konstruktionen von Figuren durchgeführt werden.

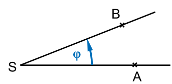
6.1 Grundbegriffe

Die wichtigsten Grundlagen der ebenen Geometrie bilden Punkte und Geraden. Weitere Begriffe werden aus ihnen abgeleitet.

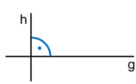
Wichtige Grundbegriffe

- Eine **Gerade** $g = AB$ ist durch zwei **Punkte** A und B eindeutig bestimmt. Das zwischen den Punkten liegende Geradenstück ist ihre kürzeste Verbindung und heißt **Strecke** [AB]. Jeder Strecke [AB] ist ihre **Länge** $\overline{AB}$ zugeordnet. [AB ist eine **Halbgerade** durch B mit dem Anfangspunkt A.

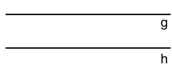
- Zwei Halbgeraden [SA und [SB mit dem gemeinsamen Anfangspunkt S bilden einen **Winkel $\varphi = \sphericalangle ASB$**. S heißt **Scheitel** des Winkels. Jedem Winkel φ (Drehrichtung gegen den Uhrzeigersinn) ist eine in Grad ° gemessene Winkelgröße zugeordnet.



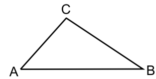
- Zwei Geraden, die einen rechten Winkel (90°) einschließen, heißen zueinander **senkrecht**.



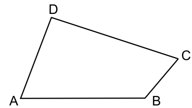
- Verlaufen zwei Geraden nebeneinanderher, ohne sich zu schneiden, sind sie **parallel**.



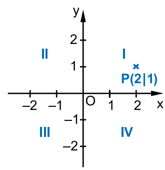
- Drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen ein **Dreieck**.



- Vier Punkte A, B, C und D, von denen jeweils nur zwei auf einer Geraden liegen, bestimmen ein **Viereck**.
  Allgemein gilt: n Punkte, von denen nicht mehr als zwei auf einer Geraden liegen, bilden ein **n-Eck**.



- Zwei zueinander senkrechte Zahlengeraden bilden ein **rechtwinkliges (kartesisches) Koordinatensystem** mit dem **Ursprung** O. Die Achsen werden als x-Achse (Abszissenachse) und y-Achse (Ordinatenachse) bezeichnet. Jeder Punkt P im Koordinatensystem ist durch zwei **Koordinaten** eindeutig bestimmt: **P(x | y)**.
  Das Koordinatensystem ist in vier **Quadranten** unterteilt.



Beispiel

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem bestimmen die Punkte A(1 | 1), B(5 | 1) und C(5 | 4) ein Dreieck ABC.

a) Bestimme die Längen der Seiten sowie die Innenwinkel des Dreiecks ABC.

b) Ergänze das Dreieck ABC durch die Punkte D(4 | 6) und E(2 | 5) zu einem Fünfeck.

Lösung:

a) Wird die Einheit in cm gemessen, so gilt:

$\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm

Für die Winkel gilt:

$\alpha = 37°, \beta = 90°, \gamma = 53°$

b) siehe Zeichnung