Analysis · Stochastik · Geom

Mathematik-KOMPAKT

Gymnasium Oberstufe

STARK

Inhalt

Autor: Alfred Müller

Hinweis:

Die entsprechend gekennzeichneten Kapitel enthalten ein **Lernvideo**. An den jeweiligen Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann.

Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, beim Ansehen der Videos eine WLAN-Verbindung zu nutzen. Falls keine Möglichkeit besteht, den QR-Code zu scannen, sind die Lernvideos auch auffindbar unter:

http://qrcode.stark-verlag.de/900152V

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Kompendium bietet eine knappe und dabei ausreichende Zusammenstellung der mathematischen Inhalte der **Oberstufe in Bayern** und gliedert sich in die drei Bereiche **Analysis (Infinitesimalrechnung), Stochastik** und **Geometrie**, wobei besonders das für die Abiturprüfung notwendige Wissen enthalten ist.

- Wichtige **Definitionen, Merksätze** und **Anleitungen zur Berechnung von Aufgaben** sind hervorgehoben.
- **Graphen von Funktionen** veranschaulichen den Unterrichtsstoff zusätzlich.
- Charakteristische und prägnante **Beispiele** verdeutlichen die jeweiligen Stoffinhalte.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweils gesuchten Begriff.

Zu ausgewählten Themen gibt es **Lernvideos** und **Animationen**, in denen wichtige Zusammenhänge dargestellt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann. Eine Zusammenstellung aller Videos und Animationen ist über den nebenstehenden QR-Code abrufbar.

Dieses Buch ist somit ideal geeignet zum schnellen Nachschlagen von Begriffen, zur zeitsparenden Wiederholung von Unterrichtsstoff sowie zur Vorbereitung auf Klausuren und auf die Abiturprüfung.

Alfred Müller

1 Reelle Funktionen

In der Analysis werden als wesentliche Inhalte Funktionen, ihre Eigenschaften und ihre Anwendungen auf mathematische und außermathematische Probleme betrachtet. Denn immer dann, wenn die Werte zweier Größen voneinander abhängen, liegt potenziell eine Funktion vor. Sowohl in der Natur als auch im täglichen Leben gibt es eine große Anzahl solcher Abhängigkeiten, die meist direkt oder wenigstens in einer Näherung als Funktion geschrieben werden können.

1.1 Definition und Grundbegriffe

Im Folgenden werden von der Definition der Funktion ausgehend grundlegende Begriffe geklärt und Verknüpfungen der Funktionen aus dem Katalog der Elementarfunktionen untersucht.

Funktion

- Eine **Funktion f** ordnet die Elemente einer Menge D_f **(Definitionsmenge)** eindeutig den Elementen einer Menge W_f **(Wertemenge)** zu.
- Die Funktion f heißt **reelle Funktion**, wenn D_f und W_f Teilmengen der Menge der reellen Zahlen sind, d. h., $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $W_f \subseteq \mathbb{R}$ gelten.

Man schreibt:

$f: x \mapsto f(x)$	Funktionszuordnung
$y = f(x)$	Funktionsgleichung
$f = \{(x \mid y) \mid x \in D_f \land y \in W_f \land y = f(x)\}$	Funktion

Die Variable $x \in D_f$ wird **unabhängige** Variable genannt. Die Variable y ist **abhängig** davon, was für x in den Funktionsterm f(x) eingesetzt wird, und heißt **Funktionswert**.

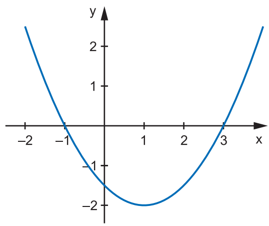
Die zusammengehörenden Paare $(x \mid y)$ kann man in ein rechtwinkliges (kartesisches) **Koordinatensystem** eintragen. Es ergibt sich der **Graph G_f** der Funktion f.

Beispiel

$f\colon x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ bzw.

$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$, $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [-2; \infty[$

Graph:



Anhand des Graphen werden weitere **Grundbegriffe** geklärt:

Schnittpunkte mit den Achsen
Schnittpunkte mit der **x-Achse (Nullstellen)**: $y = f(x) = 0$
Schnittpunkte mit der **y-Achse**: $x = 0$

Beispiel

Für die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ bedeutet dies:

1. $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \;\vee\; x = 3$

   Somit schneidet der Graph von f die x-Achse in den Punkten $N_1(-1 \mid 0)$ und $N_2(3 \mid 0)$.

2. $y = f(0) = -\frac{3}{2}$

   Also schneidet der Graph von f die y-Achse im Punkt $T\left(0 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right)$.

7 Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Wenn bei einem Zufallsexperiment nur entschieden wird, ob ein bestimmtes Ereignis eingetreten ist oder nicht, spricht man von einem Bernoulli-Experiment, dessen n-malige Hintereinanderausführung auf eine Bernoulli-Kette der Länge n führt. Die Binomialverteilung beschreibt, indem sie nach der Wahrscheinlichkeit für eine Trefferzahl fragt, das wiederholte Ausführen eines Bernoulli-Experiments unter jeweils gleichen Bedingungen, d. h. eine Bernoulli-Kette, so wie sie im Urnenmodell des Ziehens mit Zurücklegen geschrieben wird. Jede Bernoulli-Kette kann durch wiederholtes Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen simuliert werden.
Wenn man beim Modellieren solcher Bernoulli-Ketten nur Vermutungen über den Parameter p (Trefferwahrscheinlichkeit) besitzt, wird man mithilfe von Tests entscheiden, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine solche Schätzung auftritt bzw. welche Fehlentscheidungen bei einer bestimmten Annahme möglich sind.

7.1 Binomialkoeffizient

Zu jeder Menge von n verschiedenen Elementen gibt es n! verschiedene mögliche Anordnungen, sogenannte Permutationen. Werden aus einer solchen n-Menge k Elemente ausgewählt, so gibt es dafür

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Möglichkeiten. Will man nur k Elemente aus einer n-Menge auswählen und spielt ihre Reihenfolge keine Rolle, so fallen die k! Anordnungen weg, d. h., es verbleiben noch $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Möglichkeiten. Für diesen Ausdruck führt man im Folgenden eine neue Schreibweise ein.

Binomialkoeffizient

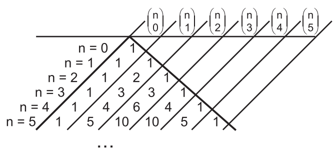
Für die Auswahl von k Elementen (ohne Wiederholung) aus einer Menge von n unterschiedlichen Objekten ($k \leq n$) gibt es $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ Möglichkeiten.

Die ganzen Zahlen

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{falls } k > n \end{cases}$$

heißen **Binomialkoeffizienten** (gelesen: „k aus n“, früher auch „n über k“).

Anmerkung:
Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ bilden das Pascal-Dreieck (siehe nebenstehende Skizze), in dem gerade die Koeffizienten stehen, die in den binomischen Formeln auftreten. Daher rührt auch der Name. Es gilt z. B.:



$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3b^0 + \binom{3}{1}a^2b^1 + \binom{3}{2}a^1b^2 + \binom{3}{3}a^0b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Diese Koeffizienten haben folgende Eigenschaften:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ für } 0 \leq k \leq n$$

Beispiel

Aus einer Kursgruppe mit 20 Schülern können vier an einem kaufmännischen Betriebspraktikum teilnehmen.
Wie viele verschiedene Auswahlmöglichkeiten hat der Lehrer für dieses Praktikum?

Lösung:

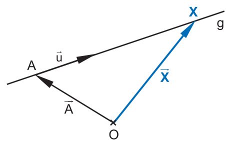
Es gibt $\binom{20}{4} = \frac{20!}{4! \cdot 16!} = 4845$ Möglichkeiten der Auswahl.

9 Geraden und Ebenen im Raum

Die wichtigsten Elemente der Geometrie im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, die auf lineare Gleichungen führen, sind Geraden und Ebenen.
Im Folgenden wird beschrieben, wie man Gleichungen von Geraden und Ebenen aufstellt und deren Lagebeziehungen untersucht.

9.1 Geradengleichungen

Eine Gerade g ist durch einen **Punkt** und ihre **Richtung**, d. h. durch einen Punkt A und einen Vektor $\vec{u}$ eindeutig bestimmt. Für den Ortsvektor $\vec{X} = \overrightarrow{OX}$ eines Punktes X der Geraden g gilt dann:
$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}$



Punkt-Richtungs-Gleichung
g: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$

Für jeden Wert $\lambda \in \mathbb{R}$ erhält man einen Punkt X und umgekehrt.

Anmerkungen:

- Eine Gerade ist durch einen Punkt und eine Richtung eindeutig bestimmt. Da die Geradengleichung den Parameter λ enthält, nennt man diese auch **Geradengleichung in Parameterform**.
- Es ergeben sich folgende Koordinatengleichungen:
  Im $\mathbb{R}^2$: $x_1 = a_1 + \lambda u_1$, $x_2 = a_2 + \lambda u_2$
  Im $\mathbb{R}^3$: $x_1 = a_1 + \lambda u_1$, $x_2 = a_2 + \lambda u_2$, $x_3 = a_3 + \lambda u_3$
  Nur im $\mathbb{R}^2$ kann der Parameter eliminiert und so eine Koordinatengleichung (Normalenform) hergestellt werden.
- Eine Gerade h, die durch einen Punkt P parallel zur Geraden g verläuft, hat eine Gleichung der Form h: $\vec{X} = \vec{P} + \mu \cdot \vec{u}, \mu \in \mathbb{R}$.

Beispiel

1. Die Gerade g durch den Punkt A(1 | 2 | 3) hat die

   Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Überprüfen Sie, ob der Punkt C(3 | –2 | 9) auf g liegt.

   Lösung:

   $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Wenn der Punkt C auf der Geraden g liegt, muss sich ein eindeutiger Wert für den Parameter λ bestimmen lassen:

   $$\text{C in g:}\quad \left.\begin{array}{rcl} 3 = 1 + \lambda & \Rightarrow & \lambda = 2 \\ -2 = 2 - 2\lambda & \Rightarrow & \lambda = 2 \\ 9 = 3 + 3\lambda & \Rightarrow & \lambda = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C \in g$$

2. Stellen Sie für die Gerade $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Koordinatengleichung her:

   $g\colon \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   (1) $x_1 = 1 + \lambda$ aus (1): $\lambda = x_1 - 1$

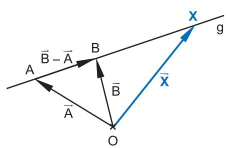
   (2) $x_2 = -4 + \lambda$ in (2): $x_2 = -4 + x_1 - 1$

   $\Rightarrow \quad g\colon x_1 - x_2 - 5 = 0$

   Schreibt man wie in der Analysis $x_1 = x$ und $x_2 = y$, so erhält man die bekannte Form $y = mx + t$ der Geradengleichung:

   $x_2 = x_1 - 5 \quad \Rightarrow \quad y = x - 5$

Eine Gerade ist auch durch **zwei Punkte** eindeutig bestimmt.
Man benötigt einen Punkt und eine Richtung. Es bieten sich an:
Punkt A und Richtung $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$



Zwei-Punkte-Gleichung
$g\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot (\vec{B} - \vec{A}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$