MEHR ERFAHREN

TRAINING

Gymnasium

Algebra und Stochastik
10. Klasse

STARK

GYMNASIUM

TRAINING

MATHEMATIK

MEHR ERFAHREN

Grundwissen

Algebra und Stochastik

10. Klasse

STARK

Inhalt

Autor: Marc Schuster

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem auf den Lehrplan abgestimmten Trainingsbuch kannst du den **gesamten Unterrichtsstoff** für Algebra und Stochastik in der **10. Klasse** selbstständig wiederholen und dich optimal auf Klassenarbeiten bzw. Schulaufgaben vorbereiten.

- Wie du geschickt an die Lösung von Mathematik-Aufgaben herangehst, erfährst du im Kapitel **Methoden**.
- In den weiteren Kapiteln werden alle **unterrichtsrelevanten Themen** aufgegriffen und anhand von ausführlichen **Beispielen** veranschaulicht. **Kleinschrittige Hinweise** erklären dir die einzelnen Rechen- oder Denkschritte genau. Die Zusammenfassungen der **zentralen Inhalte** sind außerdem in farbiger Schrift hervorgehoben.
- **Zahlreiche Übungsaufgaben** mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad bieten dir die Möglichkeit, die verschiedenen Themen einzuüben. Hier kannst du überprüfen, ob du den gelernten Stoff auch anwenden kannst. Komplexere Aufgaben, bei denen du wahrscheinlich etwas mehr Zeit zum Lösen brauchen wirst, sind mit einem ✳ gekennzeichnet.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit **ausführlichen Hinweisen**, die dir den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.
- Begriffe, die dir unklar sind, kannst du im **Grundwissen der 5. bis 10. Klasse** nachschlagen. Dort sind alle wichtigen Definitionen zusammengefasst, die du am Ende der 10. Klasse wissen musst.

Ich wünsche dir gute Fortschritte bei der Arbeit mit diesem Buch und viel Erfolg in der Mathematik!

Marc Schuster

Exponentielles Wachstum und Logarithmen

1 Wachstums- und Abnahmeprozesse

In vielen Bereichen interessiert man sich dafür, wie sich eine Größe in Zukunft entwickeln wird.

1.1 Lineare Zu- und Abnahme

In Peters Sparschwein befinden sich 28 €.
Jeden Monat wirft Peter 11 € hinzu.
Wie viel Geld hat er nach 6 Monaten im Sparschwein?

Startwert:
$$28\,€ + \underbrace{0\,€}_{11\,€ \cdot 0} = 28\,€$$

Summe nach einem Monat:
$$28\,€ + \underbrace{11\,€}_{11\,€ \cdot 1} = 39\,€$$

Summe nach zwei Monaten:
$$28\,€ + \underbrace{11\,€ + 11\,€}_{11\,€ \cdot 2} = 50\,€$$

$\vdots$

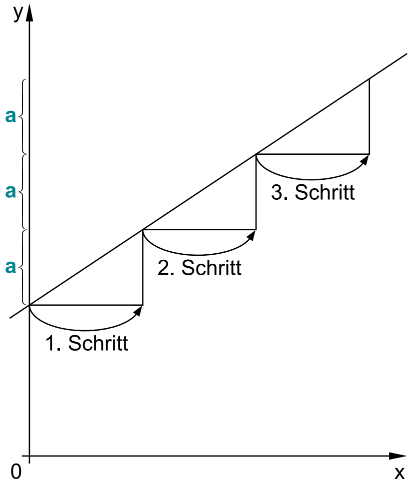
Summe nach sechs Monaten:
$$28\,€ + \underbrace{11\,€ + \ldots + 11\,€}_{11\,€ \cdot 6} = 94\,€$$

Allgemein gilt:

$y = b + a \cdot x$

	y:	Wert nach x Änderungen
	b:	Startwert (für $x = 0$)
	a:	konstante Änderung pro Schritt
	x:	Anzahl der Änderungen

Verändert sich eine Größe pro Schritt um den festen **Wert a**, nennt man diesen Prozess
- **lineare Zunahme** (Wachstum), falls **$a > 0$** ist.
- **lineare Abnahme** (Abklingen), falls **$a < 0$** ist.

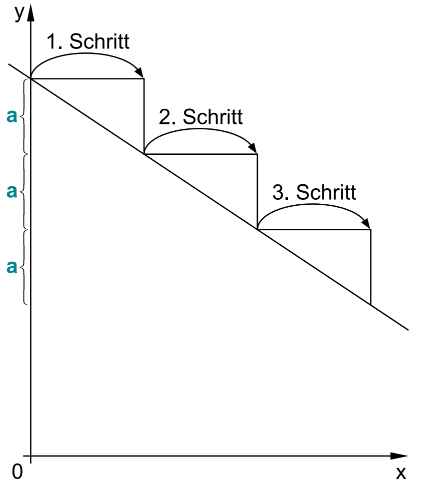


lineare Zunahme:
Bei jedem Schritt kommt zur Größe y der gleiche Wert a hinzu.
$\mathbf{y = b + ax}$ mit $\mathbf{a > 0}$

x	0	1	2	3
y	b	b + a	b + 2a	b + 3a

+a **+a** **+a**

Da $a > 0$ gilt, wird y mit jedem Schritt größer.



lineare Abnahme:
Bei jedem Schritt nimmt die Größe y um den gleichen Wert a ab.
$\mathbf{y = b + ax}$ mit $\mathbf{a < 0}$

x	0	1	2	3
y	b	b + a	b + 2a	b + 3a

+a **+a** **+a**

Da $a < 0$ gilt, wird y mit jedem Schritt kleiner.

Beispiel

Bei einer Anlagesumme von 12 000 € und einem jährlichen Zinssatz von 4,2 % werden die Zinsen jedes Jahr abgehoben und nicht mitverzinst. Nach wie vielen Jahren übersteigt das Kapital erstmals 20 000 €?

Lösung:
Es handelt sich hier um **lineares Wachstum**, da sich das zu verzinsende Kapital nicht verändert und so jedes Jahr der gleiche Betrag hinzukommt.
$\Rightarrow \quad y = b + ax$

Gegeben:
Startwert: $b = 12\,000$ €
Prozentsatz p: 4,2 %
Endwert: $y \geq 20\,000$ €

Gesucht:
Anzahl der Schritte (hier Jahre): x

Die Zunahme des Kapitals pro Jahr beträgt:
$a = 12\,000\text{ €} \cdot 4{,}2\,\% = 12\,000\text{ €} \cdot 0{,}042 = 504\text{ €}$

Es gilt:

$\mathbf{y = b + a \cdot x}$

$20\,000 = 12\,000 + 504 \cdot x \quad | -12\,000$

$8\,000 = 504 \cdot x \quad | : 504$

$\mathbf{15{,}9 \approx x}$

Probe:

$y = 12\,000 + 504 \cdot 15 = 19\,560$

$y = 12\,000 + 504 \cdot 16 = 20\,064$

Nach 16 Jahren ist das Kapital erstmals auf über 20 000 € angewachsen.

1 Wie hoch war die Abraumhalde zu Beginn der Grabung, wenn sie nun 5,16 m hoch ist, pro Stunde 78 cm hinzukommen und seit 3,5 Stunden gegraben wird?

2 Die Pumpen der Feuerwehr befördern pro Stunde 2 600 ℓ Wasser aus Familie Langers 50 m^2 großem Keller, der nach starken Regenfällen bis zu einer Höhe von 0,5 m unter Wasser stand.
Wie lange werden die Pumpen insgesamt arbeiten müssen, bis der Keller vom Wasser befreit ist?

3 a) Bestimme die Temperatur im Ofen 5 Minuten, 9 Minuten und 17 Minuten nach dem Einschalten bei Zimmertemperatur von 21 °C. Die Temperatur steigt dabei um 11,4 °C pro Minute.

b) Erstelle ein Zeit-Temperatur-Diagramm.

c) Für Omas Kuchen muss im Ofen eine Temperatur von 180 °C herrschen. Wie lange muss man den Ofen vorheizen?

1.2 Exponentielle Zu- und Abnahme

Bakterien vermehren sich durch Teilung. In einer Nährlösung sind die Bedingungen so gewählt, dass sich ihre Anzahl in einer Stunde verdoppelt.
Wie viele Bakterien sind nach 6 Stunden vorhanden, wenn es anfangs 800 waren?

Startwert: $800 \cdot \underbrace{1}_{2^0} = 800$

nach einer Stunde: $800 \cdot \underbrace{2}_{2^1} = 1\,600$

nach zwei Stunden: $800 \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} = 3\,200$

$\vdots$

nach sechs Stunden: $800 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{2^6} = 51\,200$

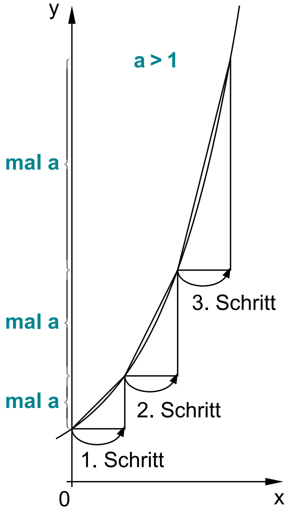
Allgemein gilt:

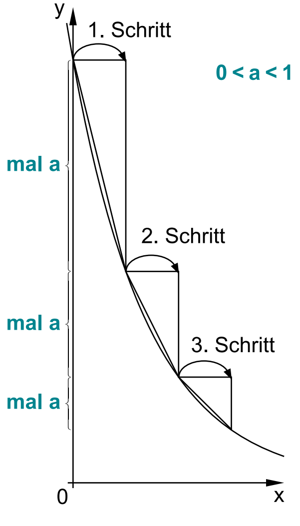
$y = b \cdot a^x$ $(a > 0)$

y: Wert nach x Änderungen
b: Startwert (für $x = 0$)
a: konstanter **Wachstumsfaktor**
x: Anzahl der Änderungen

Verändert sich eine Größe pro Schritt um den festen Faktor a, heißt dieser Prozess

- **exponentielle Zunahme** (Wachstum), falls **$a > 1$** ist.
- **exponentielle Abnahme** (Abklingen), falls **$0 < a < 1$** ist.





exponentielle Zunahme:
Bei jedem Schritt vervielfacht sich die Größe y um den gleichen Faktor a.
$\mathbf{y = b \cdot a^x}$ mit $\mathbf{a > 1}$

x	0	1	2	3
y	b	$b \cdot a$	$b \cdot a^2$	$b \cdot a^3$

$\cdot a$ $\cdot a$ $\cdot a$

Da $a > 1$ gilt, wird y mit jedem Schritt größer.

exponentielle Abnahme:
Bei jedem Schritt verringert sich die Größe y um den gleichen Faktor a.
$\mathbf{y = b \cdot a^x}$ mit $\mathbf{0 < a < 1}$

x	0	1	2	3
y	b	$b \cdot a$	$b \cdot a^2$	$b \cdot a^3$

$\cdot a$ $\cdot a$ $\cdot a$

Da $0 < a < 1$ gilt, wird y mit jedem Schritt kleiner.

Oft wird das Wachstum durch die prozentuale Änderungsrate pro Schritt angegeben, z. B. Zinsen 4,2 % p. a. (p. a. = pro anno = pro Jahr).

Bestimmung des Wachstumsfaktors
(falls die prozentuale Änderungsrate gegeben ist)

- Handelt es sich um eine Zunahme, kommt pro Schritt zum Startwert noch ein bestimmter prozentualer Anteil p des Startwerts hinzu. Damit gilt für den Wachstumsfaktor:
  $\mathbf{a = 1 + p}$
- Handelt es sich um eine Abnahme, vermindert sich der Startwert um einen bestimmten prozentualen Anteil p des Startwerts. Damit gilt für den Wachstumsfaktor:
  $\mathbf{a = 1 - p}$

Strategie:
1. Untersuche, um welche Art von Wachstum es sich handelt (linear, exponentiell oder keines von beidem).
2. Bestimme gegebenenfalls den Startwert sowie die Änderungsrate bzw. den Wachstumsfaktor.
3. Bestimme die gesuchten Größen durch Verwendung des richtigen Ansatzes.

Bemerkungen:
- Oft werden statt x und y Variablennamen verwendet, die dem jeweiligen Problem entsprechen (z. B. N: Anzahl; t: Zeit).
- Statt b schreibt man auch den Variablennamen mit einer tiefgestellten 0 (z. B. N_0: Anfangsanzahl).

Lösungen

1 Lineare Zunahme $\Rightarrow$ $y = b + a \cdot x$ mit $a > 0$
y: Höhe der Abraumhalde in Metern ($y = 5{,}16$)
b: Höhe der Abraumhalde zu Beginn
a: konstante Änderung der Höhe pro Stunde in Metern ($a = 0{,}78$)
x: Anzahl der Stunden ($x = 3{,}5$)

$$\begin{aligned} 5{,}16 &= b + 0{,}78 \cdot 3{,}5 \\ 5{,}16 &= b + 2{,}73 \qquad \vert -2{,}73 \\ 2{,}43 &= b \end{aligned}$$

Die Abraumhalde hatte zu Beginn der Grabung eine Höhe von **2,43 m**.

2 Lineare Abnahme $\Rightarrow$ $y = b + ax$ mit $a < 0$
y: Volumen des Wassers im Keller in Litern ($y = 0$)
b: Volumen des Wassers im Keller zu Beginn in Litern
($b = 50 \cdot 0{,}5 \cdot 1\,000 = 25\,000$)
a: konstante Änderung des Volumens pro Stunde in Litern ($a = -2\,600$)
x: Zeit in Stunden

Hinweise und Tipps:
$1\ m^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000\ \ell$

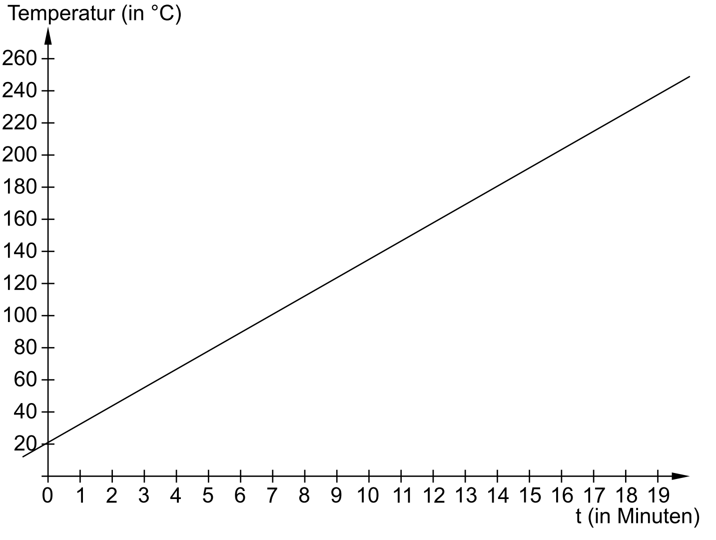
$$\begin{aligned} 0 &= 25\,000 + (-2\,600) \cdot x \\ 0 &= 25\,000 - 2\,600 \cdot x \qquad \vert -25\,000 \\ -25\,000 &= -2\,600 \cdot x \qquad \vert :(-2\,600) \\ \frac{-25\,000}{-2\,600} &= x \\ x &\approx 9{,}62 \end{aligned}$$

Die Pumpen arbeiten insgesamt etwa **9,6 Stunden**.

3 a) Lineare Zunahme $\Rightarrow$ $y = b + a \cdot x$
y: Temperatur in °C
b: Starttemperatur in °C ($b = 21$)
a: konstante Änderung der Temperatur pro Minute in °C ($a = 11{,}4$)
x: Zeit in Minuten

$y = 21 + 11{,}4 \cdot x$

nach 5 Minuten: $y = 21 + 11{,}4 \cdot 5 = 78$ $\Rightarrow$ **78 °C**
nach 9 Minuten: $y = 21 + 11{,}4 \cdot 9 = 123{,}6$ $\Rightarrow$ **123,6 °C**
nach 17 Minuten: $y = 21 + 11{,}4 \cdot 17 = 214{,}8$ $\Rightarrow$ **214,8 °C**

b) 

c) Es gilt:

$$y = b + a \cdot x$$
$$180 = 21 + 11{,}4 \cdot x \quad |-21$$
$$159 = 11{,}4 \cdot x \quad |:11{,}4$$
$$x \approx 13{,}9$$

Für Omas Kuchen muss der Ofen ca. **13,9 Minuten** vorgeheizt werden.

4 a) Exponentielle Zunahme $\Rightarrow$ $y = b \cdot a^x$ mit $a > 1$

y: Anzahl der Bakterien

b: Anzahl der Bakterien zu Beginn ($b = 1$)

a: konstanter Wachstumsfaktor pro 20 Minuten ($a = 2$)

x: Anzahl der 20-Minuten-Perioden $\left(x = \frac{24 \cdot 60}{20} = 72\right)$

$y = 1 \cdot 2^{72}$

$y \approx 4{,}72 \cdot 10^{21}$

Bei optimalen Bedingungen sind nach 24 Stunden etwa **$4{,}72 \cdot 10^{21}$ Bakterien** vorhanden.

b) Nach 23 Stunden und 40 Minuten waren etwa **$2{,}36 \cdot 10^{21}$ Bakterien** vorhanden. Das ist genau die Hälfte der Anzahl nach 24 Stunden.

5 a) Verdopplung bedeutet Zuwachs um 100 % $\Rightarrow$ $p = 1$

$a = 1 + p = 1 + 1 = \mathbf{2}$

b) Pro Jahr vermindert sich der Wert um 1,9 % $\Rightarrow$ $p = 0{,}019$

$a = 1 - p = 1 - 0{,}019 = \mathbf{0{,}981}$