



**MEHR
ERFAHREN**

TRAINING

Gymnasium

Stochastik

Fit für die Oberstufe

STARK



**MEHR
ERFAHREN**

TRAINING

Gymnasium

Stochastik

Fit für die Oberstufe



STARK

Inhalt

Vorwort

1	Zufallsexperiment, Ergebnis, Ergebnismenge	1
2	Ereignis, Gegenereignis, Schnitt- und Vereinigungsmenge ..	6
3	Baumdiagramm und Zählprinzip	14
4	Absolute und relative Häufigkeit	20
4.1	Absolute Häufigkeit	20
4.2	Relative Häufigkeit	24
5	Darstellung von Daten	33
5.1	Darstellung absoluter Häufigkeiten	34
5.2	Darstellung relativer Häufigkeiten	42
5.3	Darstellungen mit „Schummeleffekt“	47
6	Deutung von Daten	57
6.1	Arithmetisches Mittel	57
6.2	Minimum, Maximum, Spannweite, Median und Quartil	60
6.3	Boxplot	65
6.4	Modalwert	67
7	Wahrscheinlichkeit	71
8	Laplace-Wahrscheinlichkeit	82
9	Pfadregeln	97
9.1	1. Pfadregel	97
9.2	2. Pfadregel	101
10	Vierfeldertafel	107
10.1	Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten	107
10.2	Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten	114
10.3	Vierfeldertafel und Baumdiagramm	116
11	Bedingte Wahrscheinlichkeit	119
	Lösungen	137
	Stichwortverzeichnis	205

Autorin: Sybille Reimann

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die Stochastik bzw. Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand aus Überlegungen zu Glücksspielen, weil jeder Mensch möglichst oft und viel gewinnen möchte. Derjenige, der über die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses Bescheid weiß, ist klar im Vorteil. Spiele – sei es mit Würfel, Tetraeder oder Glücksrädern – tauchen daher in diesem Buch immer wieder auf, um Ihnen den Stoff, den die **Lehrpläne der Unter- und Mittelstufe** vorgeben, nahezubringen. Spielen Sie mit!

Die Regeln dazu geben Sie selbst vor:

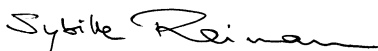
- Sie können das Buch nutzen, um den Stoff der Unter- und Mittelstufe **vor Beginn der Oberstufe** in seiner Gesamtheit zu wiederholen, damit alles wieder „sitzt“.
- **Während der Oberstufe** können Sie die Kapitel wiederholen, bei denen Sie Lücken feststellen, die Sie schnell schließen möchten.
- Sie können sich aber auch schon **in den Klassen 5 bis 10** im Buch Hilfe holen, wenn Sie den einen oder anderen Begriff über das Schulbuch hinaus durch ausführlich gerechnete Beispiele oder Übungsaufgaben festigen möchten.

In jedem Kapitel finden Sie:

- **Definitionen** in getönten und **Regeln** in umrandeten Kästen
- **Beispiele** mit kommentierten Lösungen, die Ihnen zeigen, wie Sie an Aufgaben herangehen
- Viele **Übungsaufgaben**, damit Sie Ihr Wissen selbstständig kontrollieren können

Am Ende des Buches können Sie **ausführliche Lösungen** zu allen Übungsaufgaben nachschlagen. Damit können Sie sich selbst überprüfen und Ihren Lernerfolg bestätigt finden.

Viel Spiel-Spaß und viel Erfolg!



Sybille Reimann

1 Zufallsexperiment, Ergebnis, Ergebnismenge

Im (Schul-)Leben treten zwei Arten von Experimenten auf:

- Experimente, bei denen der Versuchsausgang vorhersehbar ist. So weiß man, dass sich eine Feder dehnen wird, sobald man ein Gewicht an sie hängt, auch wenn man die Länge dieser Ausdehnung zunächst nicht vorhersehen kann. Der Versuch wird mit verschiedenen Gewichten (und auch verschiedenen Federn) wiederholt. Stets wird die Länge der Ausdehnung gemessen, die ein bestimmtes Gewicht bei einer bestimmten Feder bewirkt, um aus den Messwerten eine Gesetzmäßigkeit zwischen der Größe des Gewichts und der Länge der Ausdehnung (bei einer bestimmten Feder) ableiten zu können. Bei dieser Feder können dann die Längen der Ausdehnungen auch für andere Gewichtsgrößen berechnet werden.
- Experimente, bei denen zwar vorhersehbar ist, welche Versuchsausgänge möglich sind, man aber nicht vorhersehen kann, welcher von diesen möglichen Versuchsausgängen sich beim nächsten Versuch ergibt. So weiß man, dass beim Werfen eines handelsüblichen Würfels eine der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 geworfen wird. Die sich ergebende Augenzahl ist bei jedem Versuch „zufällig“, sie ist weder vorhersehbar noch berechenbar. Derartige Experimente nennt man **Zufallsexperimente**.



In diesem Buch werden ausschließlich Zufallsexperimente betrachtet und näher behandelt.

Definition

Jeden bei einem Zufallsexperiment möglichen Versuchsausgang nennt man ein **Ergebnis ω des Zufallsexperiments**. Die Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments nennt man die zugehörige **Ergebnismenge Ω** .

Es gilt also:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, wobei jedes mögliche Ergebnis in Ω genau einmal aufgeführt sein muss.

2 Zufallsexperiment, Ergebnis, Ergebnismenge

Bei vielen Zufallsexperimenten können – je nach Betrachtungsweise bzw. Sachlage – verschiedene Ergebnismengen angegeben werden. In allen Ergebnismengen muss aber jeder mögliche Versuchsausgang des Zufallsexperiments genau einmal enthalten sein.

Definition Die Anzahl der Ergebnisse in Ω nennt man die **Mächtigkeit** von Ω , kurz $|\Omega|$.

Beispiele

1. Aus der Schale mit 8 farbigen und 2 weißen Kugeln wird eine Kugel gezogen.
Geben Sie die Ergebnismenge und ihre Mächtigkeit an.

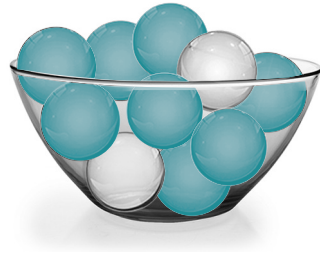
Lösung:

Die Ergebnismenge Ω lautet:

$\Omega = \{\text{weiß; farbig}\}$

Mächtigkeit der Ergebnismenge:

$|\Omega| = 2$



2. Ein Tetraeder, auf dessen vier Seiten sich die Ziffern 1, 2, 3 und 4 befinden, wird geworfen.
Geben Sie eine mögliche Ergebnismenge an.

Lösung:

Mögliche Ergebnismengen lauten:

$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4\}$

$\Omega_2 = \{1; \text{nicht } 1\}$

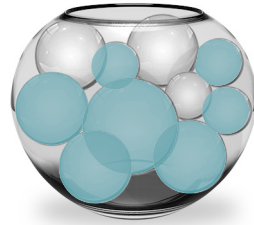
$\Omega_3 = \{\text{prim; nicht prim}\}$

Bemerkungen:

- Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Primzahlen unter 100 sind: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.
Die Eigenschaft „prim“ umfasst daher 2 und 3, „nicht prim“ 1 und 4.
- Die Ergebnismenge Ω_2 könnte bei einem Spiel von Interesse sein.
- $\{\text{kleiner } 2; \text{ größer } 2\}$ ist **keine** Ergebnismenge, da 2 als mögliches Ergebnis nicht in der Ergebnismenge enthalten ist.



3. Aus der Schale wird eine Kugel gezogen.
Bestimmen Sie ein mögliches Ω .



Lösung:

Auch hier können je nach Betrachtungsweise unterschiedliche Ergebnismengen angegeben werden.

$$\Omega_1 = \{\text{weiß; farbig}\}$$

$$\Omega_2 = \{\text{groß; mittel; klein}\}$$

$$\Omega_3 = \{\text{groß-farbig; mittel-farbig; klein-farbig; mittel-weiß; klein-weiß}\}$$

Bemerkungen:

- Bei Ω_1 ist man nur an der Farbe interessiert.
- Bei Ω_2 ist man nur an der Größe der Kugel interessiert.
- Ω_3 ist hier die „feinste“ Ergebnismenge.

Definition

Werden mehrere (Anzahl n) Zufallsexperimente nacheinander ausgeführt oder wird ein Zufallsexperiment mehrmals (n -mal) wiederholt, so lässt sich dies zu einem **mehrstufigen (n-stufigen) Zufallsexperiment** zusammenfassen. Jedes einzelne Ergebnis eines solchen n -stufigen Zufallsexperiments ist ein **n -Tupel $(e_1 | e_2 | e_3 | \dots | e_n)$** , bei dem e_i das Ergebnis des i -ten Experiments angibt.

Hinweis: Da es häufig sehr umständlich ist, innerhalb der Ergebnismenge einzelne Tupel wie z. B. $(a | b | d | z)$ zu schreiben, benutzt man meist anstelle eines Tupels die **abkürzende Schreibweise** $abdz$ (das erspart dann die vielen runden Klammern und die Trennstriche bei jedem einzelnen Tupel).

Beispiele

1. Ein Restaurant bietet ein dreigängiges Mittagsmenü an, bei dem der Gast zwischen Tomatensuppe (T) und Nudelsuppe (N), zwischen Schweinsbraten (S), Fischfilet (F) und Gemüseplatte (G) sowie zwischen Eis (E) und Kuchen (K) wählen kann.
Geben Sie eine mögliche Ergebnismenge an.

Lösung:

Eine mögliche Wahl wäre hier das 3-Tupel $(T | F | K)$, das sich kürzer als TFK schreiben lässt (siehe Hinweis).

$$\Omega = \{\text{TSE; TSK; TFE; TFK; TGE; TGK; NSE; NSK; NFE; NFK; NGE; NGK}\}$$

2. Geben Sie eine mögliche Ergebnismenge an, wenn das Tetraeder mit den Seiten 1, 2, 3 und 4 zweimal hintereinander geworfen wird.

Lösung:

Hier lassen sich verschiedene Ergebnismengen angeben:

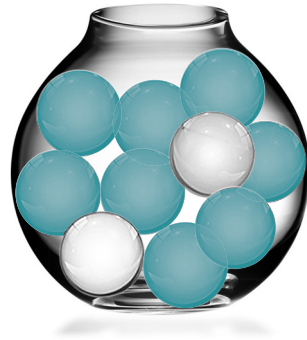
$$\Omega_1 = \{11; 12; 13; 14; 21; 22; 23; 24; 31; 32; 33; 34; 41; 42; 43; 44\}$$

$$\Omega_2 = \{\text{Pasch; nicht Pasch}\} \quad \text{Beim Pasch erscheint zweimal dieselbe Ziffer.}$$

$$\Omega_3 = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\} \quad \text{„Augensumme“}$$

3. Geben Sie die zugehörige Ergebnismenge an, wenn aus der Vase

- dreimal **hintereinander** eine Kugel **mit Zurücklegen** gezogen wird.
- dreimal **hintereinander** eine Kugel **ohne Zurücklegen** gezogen wird.
- drei Kugeln **nicht hintereinander**, sondern **gleichzeitig** gezogen werden.



Lösung:

- a) Mögliche Ergebnismengen lauten (mit w für weiß und f für farbig):

$$\Omega_1 = \{3 w; 2 w; 1 w; \text{kein } w\}$$

$$\Omega_2 = \{www; ww f; w f w; f w w; w f f; f w f; f f w; f f f\}$$

- b) Da nicht zurückgelegt wird, können höchstens zwei weiße Kugeln gezogen werden. Somit lauten mögliche Ergebnismengen:

$$\Omega_1 = \{2 w; 1 w; \text{kein } w\}$$

$$\Omega_2 = \{w w f; w f w; f w w; w f f; f w f; f f w; f f f\}$$

- c) Das gleichzeitige Ziehen entspricht einem Ziehen ohne Zurücklegen, bei dem es nicht auf die Reihenfolge ankommt, da man einmal in die Vase greift und dann drei Kugeln „ohne Ordnung“ in der Hand hält. In der Ergebnismenge können somit höchstens zwei weiße Kugeln vorhanden sein. Eine mögliche Ergebnismenge lautet:

$$\Omega_1 = \{2 w; 1 w; \text{kein } w\}$$

Möglich wäre auch $\Omega_2 = \{f w w; f f w; f f f\}$, aber **Vorsicht!** Man muss sich im Klaren sein, dass es sich bei dieser Aufzählung nicht um Tupel handelt, die ja eine Reihenfolge implizieren! Es empfiehlt sich eine Anmerkung, z. B. „in alphabetischer Reihenfolge aufgelistet“ o. Ä.

- Aufgaben**
- Ein Farbwürfel, von dessen sechs Seiten zwei rot, zwei blau und je eine gelb bzw. weiß gefärbt sind, wird geworfen.
Geben Sie die Ergebnismenge an.
 - Wie lautet die zugehörige Ergebnismenge, wenn der Farbwürfel aus Aufgabe 1 zweimal hintereinander geworfen wird?
 - Aus einem Skatspiel wird eine Karte gezogen und ihre Farbe notiert.



Bestimmen Sie die zugehörige Ergebnismenge.

- Paul besitzt in seinem Garten zwei Apfelbäume und je einen Birn- und einen Kirschbaum, die er heute nacheinander schneiden will.
 - Geben Sie die Ergebnismenge an.
 - Geben Sie die Ergebnismenge an, wenn Paul seine beiden Apfelbäume nach den Sorten „frühe Ernte“ (F) und „späte Ernte“ (S) unterscheidet.
- Wie lautet die Ergebnismenge, wenn aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 dreistellige Zahlen gebildet werden, in denen keine Ziffer mehrmals vorkommt?
- Aus den Ziffern 1, 2, 3 und 4 werden dreistellige Zahlen gebildet, in denen jede Ziffer beliebig oft vorkommen kann.
Ermitteln Sie die Ergebnismenge und ihre Mächtigkeit.
- Welche Ergebnismenge beschreibt die Auswahl von zwei aus fünf vorgelegten Prüfungsaufgaben A, B, C, D und E?
- In einem Blumenladen gibt es Tulpen in den Farben gelb, lila, orange, pink, rot und weiß. Es sollen bunte Sträuße gebunden werden, in denen jeweils vier dieser Farben vorkommen. Geben Sie die zugehörige Ergebnismenge an.

Lösungen

1. $\Omega = \{\text{rot; blau; gelb; weiß}\}$
oder mit den entsprechenden Abkürzungen: $\Omega = \{r; b; g; w\}$
2. $\Omega = \{rr; rb; rg; rw; br; bb; bg; bw; gr; gb; gg; gw; wr; wb; ww\}$
3. $\Omega = \{\spadesuit; \clubsuit; \heartsuit; \diamondsuit\}$
oder: $\Omega = \{\text{Pik; Kreuz; Herz; Karo}\}$
4. a) $\Omega = \{\text{AABK; ABAK; ABKA; AAKB; AKAB; AKBA; BAAK; BAKA; BKAA; KAAB; KABA; KBAA}\}$
b) $\Omega = \{\text{FSBK; FBSK; FBKS; FSKB; FKSB; FKBS; BFSK; BFKS; BKFS; KFSB; KFBS; KBFS; SFBK; SBFK; SBKF; SFKB; SKFB; SKBF; BSFK; BSKF; BKSF; KSFB; KSBF; KBSF}\}$
5. $\Omega = \{123; 124; 132; 134; 142; 143; 213; 214; 231; 234; 241; 243; 312; 314; 321; 324; 341; 342; 412; 413; 421; 423; 431; 432\}$
6. $\Omega = \{111; 112; 113; 114; 121; 122; 123; 124; 131; 132; 133; 134; 141; 142; 143; 144; 211; 212; 213; 214; 221; 222; 223; 224; 231; 232; 233; 234; 241; 242; 243; 244; 311; 312; 313; 314; 321; 322; 323; 324; 331; 332; 333; 334; 341; 342; 343; 344; 411; 412; 413; 414; 421; 422; 423; 424; 431; 432; 433; 434; 441; 442; 443; 444\}$
 $|\Omega| = 64$
7. $\Omega = \{\text{AB; AC; AD; AE; BC; BD; BE; CD; CE; DE}\}$
Anmerkung: Die ausgewählten Aufgaben sind hier in alphabetischer Reihenfolge aufgelistet, obwohl die Reihenfolge bei der Auswahl unerheblich ist.
8. $\Omega = \{\text{glop; glor; glow; glpr; glpw; glrw; gopr; gopw; gorw; gprw; lopr; lopw; lorw; lprw; oprw}\}$
Anmerkung: Die ausgewählten Farben sind hier in alphabetischer Reihenfolge aufgelistet, obwohl die Reihenfolge bei der Auswahl unerheblich ist.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK