Abit

MEHR ERFAHREN

Mathemati

Gymnasium

Baden-Württemberg

ab 2023

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Analysis

Analytische Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur im Basisfach benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch den klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs, auch kurz vor dem Abitur.

- **Formeln** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen die Lerninhalte.
- Maßgeschnittene **Beispiele** verdeutlichen überall die Theorie. Sie sind durch das Symbol gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Allen Schülerinnen und Schülern wünschen wir eine gute Vorbereitung auf das Abitur und viel Erfolg bei der Prüfung!

Ihr Autorenteam
Attila Furdek, Matthias Benkeser, Diana Dragmann

Zahlreiche Beispielaufgaben mit vollständigen Lösungen für beide Teile der mündlichen Prüfung finden Sie im Buch „Abiturprüfung Baden-Württemberg, Mathematik Basisfach“ (Bestell-Nr. 85102).

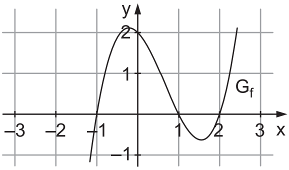
Ausführliche Erläuterungen sowie viele weitere Übungsaufgaben finden Sie in den Abitur-Trainingsbänden:
- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 840068)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 840078)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 840088)

2.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_n \neq 0$.

Die Werte a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 heißen Koeffizienten.
Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (siehe auch Abschnitt 2.6).

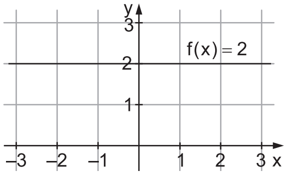
$f(x) = (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x-1)$
$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow \quad (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 0$
Nullstellen bei $x = 2$, $x = -1$ und $x = 1$

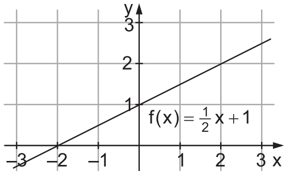


Wichtige Sonderfälle

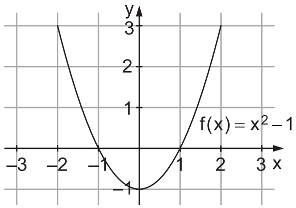
Konstante Funktion:
$f(x) = c$
Der Graph ist eine Parallele zur x-Achse.

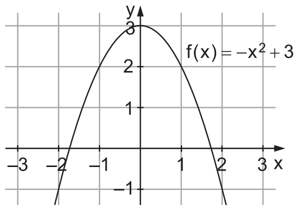
Lineare Funktion:
$f(x) = mx + c$
Der Graph ist eine Gerade.





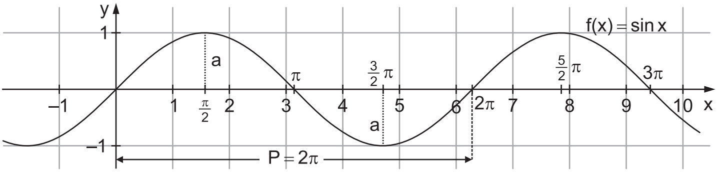
Quadratische Funktion:
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Der Graph ist eine Parabel.

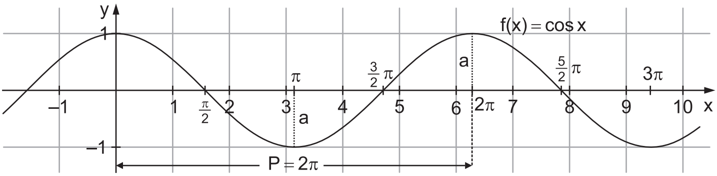




2.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)

Grundfunktionen sin x und cos x





Für beide Funktionen gilt:
Die Periode beträgt 2π.
Der Abstand zwischen zwei benachbarten Nullstellen ist π.

Unter der allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion versteht man Funktionen der Form
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$
mit $a \neq 0,\ b \neq 0$.

Bedeutung der Parameter (siehe auch Abschnitt 2.5)

a: bestimmt die Amplitude
b: bestimmt die Periode: $P = \frac{2\pi}{|b|}$
c: Verschiebung entlang der x-Achse
d: Verschiebung entlang der y-Achse

Nullstellen

Es gilt:

$$\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots,\ x = -2\pi,\ x = -\pi,\ x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi,\ \ldots$$

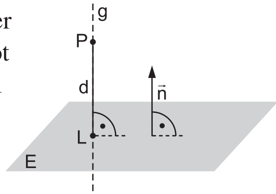
$$\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots,\ x = -\tfrac{3}{2}\pi,\ x = -\tfrac{\pi}{2},\ x = \tfrac{\pi}{2},\ x = \tfrac{3}{2}\pi,\ \ldots$$

4 Abstände und Winkel

4.1 Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Um den Abstand eines Punktes zu einer Ebene zu ermitteln, muss man das Lot von diesem Punkt auf die Ebene fällen.

Lotfußpunktverfahren
Der **Lotfußpunkt** L ist der Schnittpunkt der Lotgeraden g mit der Ebene, auf die das Lot gefällt wird. L ist der Ebenenpunkt mit dem kleinsten Abstand zum Punkt P. Dieser Abstand entspricht dem Abstand d des Punktes P zur Ebene E.



Vorgehensweise
Gegeben: Punkt P und Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Schritt 1: Gleichung der Lotgeraden g senkrecht zu E durch P aufstellen; der Normalenvektor der Ebene wird Richtungsvektor von g, der Punkt P wird Stützpunkt von g.

Schritt 2: Lotfußpunkt L als Schnittpunkt zwischen der Lotgeraden g und der Ebene E berechnen

Schritt 3: Abstand von P zu E als Abstand der Punkte P und L berechnen

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P(7|2|5)$ von der Ebene E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$.

Schritt 1: Lotgerade g senkrecht zu E durch P

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 2: Schnittpunkt von g und E (siehe Abschnitt 3.2)

$$\begin{aligned} 2\cdot(7+2t)-(2-t)+2\cdot(5+2t) &= 4 \\ 14+4t-2+t+10+4t &= 4 \\ 22+9t &= 4 \\ 9t &= -18 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

3 Zufallsgrößen

3.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsgröße** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine Zahl zu. Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsgröße X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Zufallsgröße die möglichen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Histogramm erfolgen.

Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X, die die Anzahl der Sechsen beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Für den gezinkten Würfel gilt: $P(6) = 0{,}3$; $P(\overline{6}) = 0{,}7$

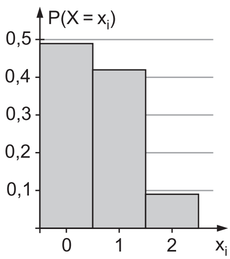
Die Zufallsgröße X kann folgende Werte annehmen:
$x_1 = 0;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = 2$

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Pfadregeln (siehe Abschnitt 2.3) ermittelt werden:

$$P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \underbrace{0{,}7}_{\overline{6}} \cdot \underbrace{0{,}7}_{\overline{6}} = 0{,}49$$

$$P(X = 1) = \underbrace{0{,}3}_{6} \cdot \underbrace{0{,}7}_{\overline{6}} + \underbrace{0{,}7}_{\overline{6}} \cdot \underbrace{0{,}3}_{6} = 0{,}42$$

$$P(X = 2) = \underbrace{0{,}3}_{6} \cdot \underbrace{0{,}3}_{6} = 0{,}09$$



Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,49	0,42	0,09