



**MEHR
ERFAHREN**

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Analytische Geometrie

Baden-Württemberg

Abitur ab 2019

STARK



**MEHR
ERFAHREN**

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Analytische Geometrie

Baden-Württemberg

Abitur ab 2019



STARK

Inhalt

Vorwort

1	Wiederholung: Lineare Gleichungssysteme	1
1.1	Begriffsklärung	2
1.2	Das Gauß-Verfahren	3
1.3	Anzahl der Lösungen	6
1.4	Anwendungen	8
2	Darstellung geometrischer Objekte	11
2.1	Koordinatensystem	12
2.2	Schrägbilder	17
3	Vektoren	19
3.1	Definition	20
3.2	Punkte und Vektoren	20
3.3	Addition und skalare Multiplikation von Vektoren	22
3.4	Linearkombinationen	25
4	Skalarprodukt	29
4.1	Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts	30
4.2	Länge eines Vektors	32
4.3	Winkel zwischen zwei Vektoren	34
5	Parameterform von Geraden und Ebenen	37
5.1	Geraden	38
5.2	Ebenen	41
6	Weitere Darstellungsformen von Ebenen	45
6.1	Der Normalenvektor	46
6.2	Vektorprodukt	48
LF 6.3	Normalenform der Ebene	50
6.4	Koordinatenform der Ebene	52
6.5	Spurpunkte und Spurgeraden	55
7	Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	57
7.1	Berechnungen mithilfe der Parameterform	58
7.2	Berechnungen mithilfe der Koordinatenform	68
8	Schnittwinkel und Abstand	73
8.1	Schnittwinkel zwischen geometrischen Objekten	74
8.2	Abstand zwischen geometrischen Objekten	79

9	Flächeninhalt und Volumen	89
9.1	Fläche eines Parallelogramms	90
9.2	Volumen eines Spats	92
9.3	Volumen einer Pyramide	93
10	Anwendungsaufgaben und Modellierung	97
11	Aufgabenmix	103
Lösungen		111
Stichwortverzeichnis		201

Das mit **LF** markierte Kapitel ist für das Basisfach nicht relevant.
Zudem ist im Basisfach die Bestimmung von Schnittgeraden zweier Ebenen nicht relevant und es werden keine Abstandsberechnungen Punkt–Gerade und Gerade–Gerade behandelt.

Autor: Eberhard Endres

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch bietet Ihnen eine umfassende Zusammenstellung der Grundkompetenzen, die zum Lösen geometrischer Fragestellungen in der Oberstufe erforderlich sind, und unterstützt Sie damit bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik. Ab dem Abitur 2019 ist für die Abschlussprüfung ein wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR) zugelassen. Die Inhalte des Buches sind auf diesen Rechnerausgang ausgelegt.

Die einzelnen Kapitel sind so aufgebaut, dass die Lerninhalte jeweils eines Themenbereichs übersichtlich hergeleitet und dargestellt sowie mit **Beispielen** erläutert werden. Wichtige **Begriffe** und **Definitionen** sind dabei in farbig getönten Feldern, **Regeln** und **Merksätze** in farbig umrandeten Kästen hervorgehoben. Jeder Abschnitt schließt mit **Übungsaufgaben** zur Einübung des Gelernten sowie zur eigenen Erfolgskontrolle.

Zunächst werden in den ersten drei Kapiteln mit der Wiederholung von **linearen Gleichungssystemen**, der **Darstellung geometrischer Objekte** sowie der Definition von **Vektoren** elementare Grundsteine gelegt, die zur Beschreibung und Untersuchung von **Geraden** und **Ebenen** benötigt werden. In weiteren Kapiteln werden die vektorgeometrischen Hilfsmittel **Skalarprodukt** und **Vektorprodukt** eingeführt, mit denen die **Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten** untersucht sowie **Abstands- und Winkelprobleme** behandelt werden können. Außerdem werden **Flächen- und Volumenberechnungen** mithilfe von Vektoren durchgeführt.

Die erworbenen Kenntnisse werden anschließend eingesetzt, um **anwendungsorientierte Fragestellungen** zu bearbeiten. Im letzten Kapitel finden Sie eine bunte **Sammlung von Aufgaben**, die Sie nach der Bearbeitung der vorhergehenden Kapitel zur eigenen **Erfolgskontrolle** und **Wiederholung** nutzen können.

Prinzipiell kann **jedes Kapitel separat** bearbeitet werden, jedoch bauen die meisten davon auf vorhergehenden Einheiten auf, sodass sich auch die Bearbeitung des gesamten Buches anbietet. Es steht Ihnen frei, über die Geschwindigkeit und Schwerpunkte der Bearbeitung selbst zu entscheiden.

Die **Lösungswege für alle Aufgaben** sind im Lösungsteil ausführlich dargestellt, um eine gewissenhafte Kontrolle zu ermöglichen und somit den Lernerfolg zu unterstützen. Die mit einem Stern (*) gekennzeichneten Aufgaben sind etwas anspruchsvoller und regen in besonderer Weise zum Nachdenken an; Sie können diese beim ersten Durcharbeiten auch überspringen.

Viel Erfolg beim Abitur-Training Analytische Geometrie wünscht Ihnen



Eberhard Endres

4.1 Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts

In diesem Kapitel lernen Sie ein Produkt zwischen zwei Vektoren kennen, das durch seine Eigenschaften in vielen wichtigen geometrischen Fragestellungen Anwendung findet. Der Name Skalarprodukt weist darauf hin, dass das so definierte Produkt zweier Vektoren ein Skalar, also eine reelle Zahl, ist. Ein weiteres Produkt zwischen Vektoren lernen Sie in Kapitel 6 kennen.

Definition Das **Skalarprodukt** $\vec{a} \circ \vec{b}$ zwischen zwei reellen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist definiert als:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Bei zweidimensionalen Vektoren \vec{a} und \vec{b} ergibt sich entsprechend:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Beispiel Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -12 + 8 + 6 = 2$$

$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 - 12 + 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Achten Sie auf den Unterschied zwischen dem Zeichen „ \circ “ für Skalarprodukt und „ \cdot “ für die skalare Multiplikation. Das Ergebnis des ersteren ist eine Zahl, das Ergebnis des letzteren ein Vektor. Die skalare Multiplikation hat dabei Vorrang vor dem Skalarprodukt. In diesem Buch wird konsequent das Zeichen „ \circ “ für das Skalarprodukt verwendet.

Das Skalarprodukt besitzt einige wichtige Eigenschaften.

Regel

Eigenschaften des Skalarprodukts

- Das Skalarprodukt ist **kommutativ**: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{a}$ eines Vektors mit sich selbst ist nie negativ: $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$
Man schreibt: $\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2$
- Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{a}$ eines Vektors mit sich selbst ist genau dann gleich null, wenn \vec{a} der Nullvektor ist, also für $\vec{a} = \vec{0}$.
- Für das Skalarprodukt gilt das **Distributivgesetz**: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Diese Eigenschaften lassen sich leicht nachweisen; dafür greift man immer auf die Definition des Skalarprodukts zurück.

Beispiel Beweisen Sie das Kommutativgesetz für das Skalarprodukt.

Lösung:

Nach der Definition gelten folgende beiden Gleichungen:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \text{und} \quad \vec{b} \circ \vec{a} = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

Die jeweils rechten Seiten dieser Gleichungen stellen Terme in der Menge der reellen Zahlen dar. Für diese Terme gilt bekanntermaßen das Kommutativgesetz, sodass wegen $a_1 b_1 = b_1 a_1$ bzw. $a_2 b_2 = b_2 a_2$ bzw. $a_3 b_3 = b_3 a_3$ in der Menge der reellen Zahlen gilt:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3$$

Somit sind auch die linken Seiten der beiden Gleichungen gleich, d. h.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}.$$

Das Kommutativgesetz gilt folglich auch für das Skalarprodukt.

Aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts können Sie also mit dieser Multiplikation von Vektoren genauso rechnen wie mit der Multiplikation von Zahlen.

Unter anderem gelten die binomischen Formeln, z. B.:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{b}^2 \quad (\text{vgl. Aufgabe 31})$$

Aufgaben 25. Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -s \\ r \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$

26. Bestimmen Sie die Zahl a so, dass das Skalarprodukt die angegebenen Werte besitzt.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 8$

b) $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$

27. Beweisen Sie, dass für das Skalarprodukt gilt:

a) $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$ für alle Vektoren \vec{a}

b) $\vec{a} \circ \vec{a} = 0$ nur für $\vec{a} = \vec{0}$

c) Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

d) Für $k \in \mathbb{R}$ gilt: $k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b}$

28. Begründen Sie, dass folgende Gleichung in der Regel nicht gilt:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

29. Markieren Sie diejenigen Malpunkte, die ein Skalarprodukt darstellen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + 5 \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{d})$$

30. Vereinfachen Sie die Terme.

a) $\vec{a} \circ (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{c} \circ (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \circ (\vec{a} - \vec{c})$

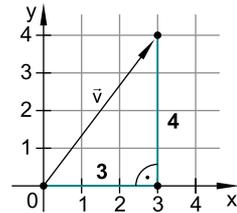
b) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b})$

31. Berechnen Sie: $(\vec{a} + \vec{b})^2$ und $(\vec{a} - \vec{b})^2$

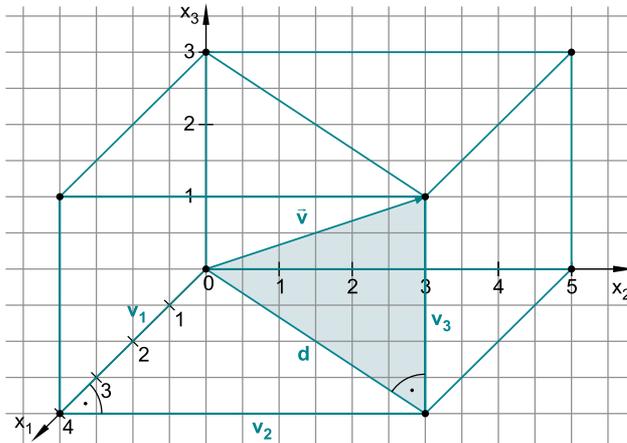
4.2 Länge eines Vektors

Stellt man den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in einem Koordinatensystem dar, so lässt sich seine Länge durch Ergänzung zu einem rechtwinkligen Dreieck berechnen. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich für die Länge des Vektors \vec{v} :

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$



Für dreidimensionale Vektoren gilt eine ähnliche Betrachtungsweise, wie man sich am Beispiel des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ anhand der Darstellung im Koordinatensystem klarmachen kann:



Der Vektor \vec{v} zeigt vier Einheiten nach vorne, fünf Einheiten nach rechts und drei Einheiten nach oben. Umrahmt man diesen Vektor durch einen Quader mit den Seitenlängen $v_1=4$, $v_2=5$ und $v_3=3$, bildet er genau eine Raumdiagonale in diesem Quader. Für deren Länge L gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$L = |\vec{v}| = \sqrt{d^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{50}$$

Allgemein gilt daher folgende Regel:

Regel

Länge eines Vektors

Die **Länge eines zweidimensionalen Vektors** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ beträgt $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Der **dreidimensionale Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ besitzt die **Länge** $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

In beiden Fällen gilt: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$

Synonym zum Begriff Länge spricht man oft auch vom **Betrag des Vektors**.

Beachten Sie dabei aber, dass sich $\sqrt{\vec{v}^2}$ nicht zu \vec{v} , sondern nur zu $|\vec{v}|$ vereinfachen lässt!

Beispiel

Berechnen Sie die Länge des Vektors, der vom Punkt $A(2|4|1)$ zum Punkt $B(4|7|5)$ führt.

Lösung:

Der Vektor \overline{AB} besitzt die Koordinaten

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 7-4 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und hat somit die Länge:

$$L = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

Aufgaben 32. Bestimmen Sie die Länge der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} r \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

33. Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC mit $A(1|2|-3)$, $B(2|6|5)$, $C(7|-4|-6)$.

$$25. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = \mathbf{1}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -s \\ r \end{pmatrix} = r \cdot (-s) + s \cdot r = -rs + rs = \mathbf{0}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot (-4) = 6 - 5 + 0 = \mathbf{1}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 1 \end{pmatrix} = a \cdot (-b) + b \cdot a + c \cdot 1 = -ab + ab + c = \mathbf{c}$$

$$26. \text{ a) } \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 8 \Leftrightarrow 3a - 2a + 10 = 8 \Leftrightarrow a + 10 = 8 \Leftrightarrow \mathbf{a = -2}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 6 = 6 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \\ \Leftrightarrow a \cdot (a - 2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a = 0 \text{ oder } a = 2}$$

27. a) $\vec{a} \circ \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0$, weil alle drei Summanden Quadrate sind und nicht negativ sein können.

b) $\vec{a} \circ \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ kann sich nur ergeben, wenn $a_1^2 = 0$ und $a_2^2 = 0$ und $a_3^2 = 0$ gilt. Dies ist aber gleichbedeutend mit:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

c) Vereinfachung der linken Seite der Behauptung ergibt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2) + a_3 \cdot (b_3 + c_3) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \end{aligned}$$

Vereinfachung der rechten Seite liefert:

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \end{aligned}$$

Die sechs Summanden stimmen in beiden Gleichungen überein, daher gilt das Distributivgesetz auch für das Skalarprodukt.

d) Gemäß Definition des Skalarprodukts gilt:

$$k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = k \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = k \cdot a_1 b_1 + k \cdot a_2 b_2 + k \cdot a_3 b_3 \quad \text{und}$$

$$(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (k \cdot a_1) \cdot b_1 + (k \cdot a_2) \cdot b_2 + (k \cdot a_3) \cdot b_3 \\ = k \cdot a_1 b_1 + k \cdot a_2 b_2 + k \cdot a_3 b_3$$

Da diese beiden Terme gleich sind, gilt also: $k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b}$

28. Das Skalarprodukt $\vec{b} \circ \vec{c}$ ist eine reelle Zahl; daher ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c})$ ein Vielfaches des Vektors \vec{a} . Andererseits ist $\vec{a} \circ \vec{b}$ ebenfalls eine reelle Zahl und somit $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ein Vielfaches des Vektors \vec{c} .

Wenn die Vektoren \vec{a} und \vec{c} keine Vielfachen voneinander sind, dann können somit auch Vielfache dieser Vektoren nicht gleich sein und damit kann die Gleichung nicht richtig sein.

29. Im Teilterm $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ muss einer der beiden Malpunkte ein Skalarprodukt darstellen. Die Produkte $\vec{a} \circ \vec{c}$ und $\vec{a} \circ \vec{d}$ stellen ebenfalls Skalarprodukte und damit reelle Zahlen dar. Die anderen Malpunkte bedeuten die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl oder zweier Zahlen und sind somit kein Skalarprodukt-Verknüpfungszeichen. Der Term lautet also richtig:

$$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} + 5 \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot (\vec{a} \circ \vec{c}) \cdot (\vec{a} \circ \vec{d})$$

oder alternativ:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c}) + 5 \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot (\vec{a} \circ \vec{c}) \cdot (\vec{a} \circ \vec{d})$$

30. a) $\vec{a} \circ (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{c} \circ (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \circ (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{c} \circ \vec{a} - \vec{c} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{c}$
 $= \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{a} \circ \vec{c} - \vec{b} \circ \vec{c} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} = \vec{0}$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{b}$
 $= \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

31. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
 $= (a_1 + b_1) \cdot (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \cdot (a_3 + b_3)$
 $= a_1^2 + 2a_1 b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2 b_2 + b_2^2 + a_3^2 + 2a_3 b_3 + b_3^2$
 $= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2 \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$
 $= \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{b}^2$

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} - \vec{b})^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \\
 &= (a_1 - b_1) \cdot (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \cdot (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) \cdot (a_3 - b_3) \\
 &= a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2 \\
 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\
 &= \vec{a}^2 - 2 \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{b}^2
 \end{aligned}$$

$$32. \quad |\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + s^2} = \sqrt{1+s^2}$$

$$|\vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{64+16+1} = \sqrt{81} = 9$$

$$|\vec{d}| = \left| \begin{pmatrix} r \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{r^2 + 16 + 9} = \sqrt{r^2 + 25}$$

33. Drückt man die Seiten des Dreiecks durch die entsprechenden Vektoren aus, erhält man:

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-2 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c = |\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = 9$$

$$\overline{BC} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ -4-6 \\ -6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = |\overline{BC}| = \sqrt{5^2 + (-10)^2 + (-11)^2} = \sqrt{25+100+121} = \sqrt{246} \approx 15,7$$

$$\overline{AC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ -4-2 \\ -6-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b = |\overline{AC}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = 9$$

$$34. \quad a) \quad \cos \gamma = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|} = \frac{9}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow \gamma \approx 41,6^\circ$$

$$b) \quad \cos \gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0}{5 \cdot 15} = 0 \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK