

Abitur **MEHR
ERFAHREN**

Mathematik
Gymnasium · Gesamthochschule
Hessen

Das musst du können!

STARK

Abitur **MEHR
ERFAHREN**

Mathematik

Gymnasium · Gesamthochschule
Hessen

Das musst du können!



STARK

Inhalt

Vorwort

Analysis

1	Eigenschaften von Funktionen	1
1.1	Nullstellen	1
1.2	Symmetrie (bezüglich des Koordinatensystems)	2
1.3	Grenzwert	3
2	Funktionsklassen	3
2.1	Ganzrationale Funktion	3
2.2	Wurzelfunktion	5
2.3	Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	5
2.4	Natürliche Exponentialfunktion	6
2.5	Natürliche Logarithmusfunktion	7
2.6	Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall	8
3	Ableitung	9
3.1	Die Ableitung	9
3.2	Tangentengleichung	11
4	Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung	12
4.1	Monotonieverhalten, Extrem- und Terrassenpunkte	12
4.2	Krümmungsverhalten, Wendepunkte	15
4.3	Extremwertaufgaben	18
4.4	Umkehrfunktion	20
5	Stammfunktion und unbestimmtes Integral	21
5.1	Stammfunktion	21
5.2	Unbestimmtes Integral	22
5.3	Integrationsverfahren	23

6	Bestimmtes Integral, Flächen- und Volumenberechnung	25
6.1	Bestimmtes Integral	25
6.2	Flächenberechnung	26
6.3	Uneigentliches Integral	29
6.4	Volumenberechnung	29
7	Integralfunktion	30

Geometrie

1	Lineare Gleichungssysteme	33
2	Vektoren	34
2.1	Rechnen mit Vektoren	34
2.2	Skalarprodukt	35
2.3	Vektorprodukt	36
3	Geraden und Ebenen	37
3.1	Parameterform von Geraden und Ebenen	37
3.2	Normalenform/Koordinatenform einer Ebene	38
3.3	Umwandlung: Parameterform \leftrightarrow Normalenform/Koordinatenform	39
3.4	Hesse'sche Normalenform	41
3.5	Projektionen	42
4	Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	43
4.1	Lage zweier Geraden	43
4.2	Lage einer Geraden zu einer Ebene	44
4.3	Lage zweier Ebenen	45
4.4	Schnittwinkel	48
5	Abstände zwischen geometrischen Objekten	49
5.1	Abstand zu einer Ebene	49
5.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	51
5.3	Abstand zweier windschiefer Geraden	53
6	Matrizen und Abbildungen	54
6.1	Grundlagen	54
6.2	Abbildungen	56
6.3	Verkettung von Abbildungen	57

Stochastik

1	Ereignisse	58
2	Wahrscheinlichkeitsberechnungen	59
2.1	Relative Häufigkeit und Gesetz der großen Zahlen	59
2.2	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	59
2.3	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	60
2.4	Baumdiagramme und Vierfeldertafeln	61
2.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	63
3	Urnenmodelle	65
3.1	Anzahl der Möglichkeiten	65
3.2	Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	66
4	Zufallsgrößen	68
4.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	68
4.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	69
4.3	Binomialverteilte Zufallsgrößen	71
4.4	Normalverteilte Zufallsgrößen	73
5	Testen von Hypothesen	76
	Stichwortverzeichnis	79

Inhalte, die nur für den **Leistungskurs** relevant sind:

- S. 6: Bedeutung der Parameter bei Sinus- und Kosinusfunktion
- S. 7/8: Kapitel 2.5 (Natürliche Logarithmusfunktion)
- S. 10/11: Quotientenregel
- S. 24: Partielle Integration
- S. 29: Kapitel 6.3 (Uneigentliches Integral)
- S. 36/37: Kapitel 2.3 (Vektorprodukt)
- S. 39/40: Möglichkeit 2, die das Vektorprodukt nutzt
- S. 53/54: Kapitel 5.3 (Abstand zweier windschiefer Geraden)
- S. 54–57: Kapitel 6 (Matrizen und Abbildungen)
- S. 73–75: Kapitel 4.4 (Normalverteilte Zufallsgrößen)
- S. 78: Hypothesentest mittels Normalverteilung

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie, Matrizenrechnung sowie Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im Buch ist genau gekennzeichnet, welche Inhalte nur für den LK wichtig sind. Alle anderen Themen sind für GK und LK prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:

- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 540021)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 540038)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 94009)

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden Bänden:

- Abiturprüfung Hessen, Mathematik LK (Bestell-Nr. 65000)
- Abiturprüfung Hessen, Mathematik GK (Bestell-Nr. 65100)

Analysis

1 Eigenschaften von Funktionen

1.1 Nullstellen

- Die Schnittstelle einer Funktion mit der x -Achse wird als Nullstelle bezeichnet. Es gilt $f(x_0) = 0$.

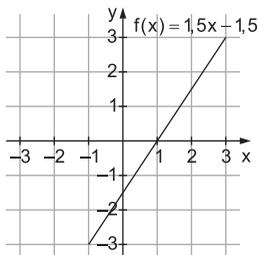
Nullstellen ungerader Ordnung

- Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle ungerader Ordnung, wenn der zugehörige Linearfaktor $(x - x_0)$ in der Linearfaktorzerlegung von $f(x)$ eine ungerade Potenz (1, 3, 5, ...) besitzt.
- Der Graph G_f weist bei x_0 einen Vorzeichenwechsel (VZW) auf.

Nullstellen gerader Ordnung

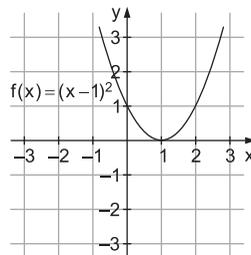
- Eine Funktion $f(x)$ hat an der Stelle x_0 eine Nullstelle gerader Ordnung, wenn der zugehörige Linearfaktor $(x - x_0)$ in der Linearfaktorzerlegung von $f(x)$ eine gerade Potenz (2, 4, 6, ...) besitzt.
- Der Graph G_f weist bei x_0 keinen Vorzeichenwechsel (VZW) auf.

$f(x) = 1,5x - 1,5 = 1,5(x - 1)$
einfache Nullstelle bei $x = 1$



Nullstelle mit VZW;
 G_f schneidet die x -Achse.

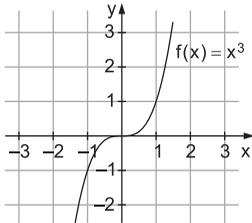
$f(x) = (x - 1)^2$
doppelte Nullstelle bei $x = 1$



Nullstelle ohne VZW;
 G_f berührt die x -Achse.

$$f(x) = x^3$$

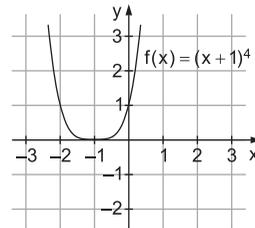
dreifache Nullstelle bei $x = 0$



Nullstelle mit VZW;
 G_f verläuft durch die x -Achse.

$$f(x) = (x + 1)^4$$

vierfache Nullstelle bei $x = -1$



Nullstelle ohne VZW;
 G_f berührt die x -Achse.



Nullstellen mit Vielfachheiten der Funktion $f(x) = \frac{x^5}{10}(x + 3)^2(x - 2)$:

$x = 0$: fünffache Nullstelle (VZW)

$x = -3$: doppelte Nullstelle (kein VZW)

$x = 2$: einfache Nullstelle (VZW)

1.2 Symmetrie (bezüglich des Koordinatensystems)

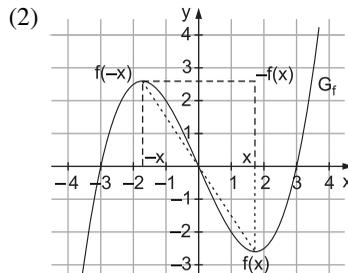
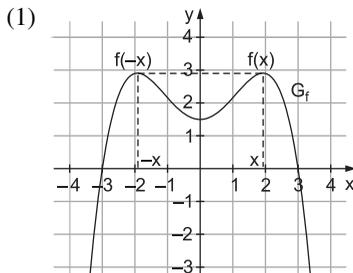
Der Graph einer reellen Funktion ist

(1) **achsensymmetrisch** (bezüglich der y -Achse), wenn gilt:

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_f$$

(2) **punktsymmetrisch** (bezüglich des Ursprungs), wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}_f$$



Rechnerisch überprüft man eine Funktion auf Symmetrie, indem man $(-x)$ statt x in den Funktionsterm einsetzt.



Symmetrieuntersuchung der Funktion $f(x) = -\frac{1}{10}x^2(x^2 - 9)$:

$$f(-x) = -\frac{1}{10}(-x)^2((-x)^2 - 9) = -\frac{1}{10}x^2(x^2 - 9) = f(x)$$

⇒ G_f ist achsensymmetrisch bezüglich der y -Achse.

1.3 Grenzwert

Allgemein unterscheidet man zwei Arten von Grenzwerten:

- Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

- Verhalten in der Nähe einer Definitionslücke, wenn man sich von links ($x \rightarrow x_0^-$) bzw. von rechts ($x \rightarrow x_0^+$) nähert

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ bzw. } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \quad x_0 \notin \mathbb{D}_f$$

Für das Rechnen mit Grenzwerten gelten die Grenzwertsätze:

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow p} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} g(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 \cdot \frac{1}{x^2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \cdot \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + 1 = 0 + 1 = 1$$

2 Funktionsklassen

2.1 Ganzrationale Funktion

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine reelle Funktion der Form:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

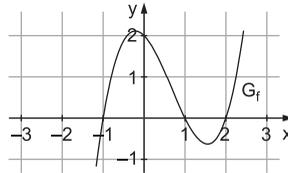
Die Werte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden.



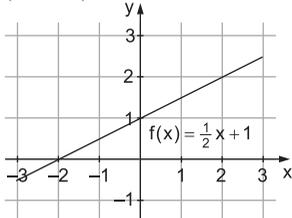
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstellen bei $x=2$,
 $x=-1$ und $x=1$

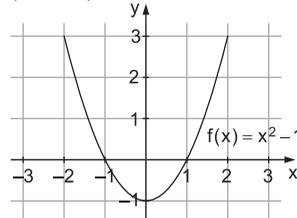


Spezialfälle

Lineare Funktion: $f(x) = mx + t$
(Grad 1)



Parabel: $f(x) = ax^2 + bx + c$
(Grad 2)



Merkregel: Eine ganzrationale Funktion ist

- achsensymmetrisch, wenn die x -Terme nur in geraden Potenzen im Funktionsterm vorkommen.
- punktsymmetrisch, wenn die x -Terme nur in ungeraden Potenzen im Funktionsterm vorkommen und $f(x)$ kein konstantes Glied enthält.

Das Grenzwertverhalten ist festgelegt durch den Koeffizienten a_n und den Grad der Funktion.

$a_n > 0$:

n gerade: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

n ungerade: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$a_n < 0$:

n gerade: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

n ungerade: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK